



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2003

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel, par $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n , et par $C^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $C^0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$.

À toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, on associe l'application notée φf , définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\varphi f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt.$$

On définit ainsi un endomorphisme φ de $C^0(\mathbb{R})$, dont on se propose d'étudier quelques propriétés au travers de parties largement indépendantes.

Partie I — Généralités

I.1. Dans cette question, on étudie quelques propriétés de φf en fonction de celles de f .

I.1.a. Prouver l'égalité suivante, pour toute fonction continue f et tout nombre réel x :

$$(\varphi f)(x) = \int_0^1 f(x+u-1) du.$$

I.1.b. On suppose la fonction f paire, respectivement impaire. Exprimer $(\varphi f)(-x)$ en fonction de $(\varphi f)(x+1)$.

I.1.c. On suppose la fonction f croissante, respectivement décroissante. Est-ce le cas de φf ?

I.1.d. On suppose la fonction f convexe, respectivement concave. Est-ce le cas de φf ?

I.1.e. On suppose que la fonction f a une limite L en $+\infty$, respectivement en $-\infty$. Est-ce le cas de φf ?

I.2. Dans cette question, on étudie l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_n[x]$.

I.2.a. Montrer que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par φ . On note alors φ_n l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_n[x]$.

I.2.b. Déterminer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

I.2.c. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de φ_n .

I.3. Dans cette question, on étudie l'injectivité et la surjectivité de φ .

I.3.a. Montrer, pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, que φf est de classe C^1 et préciser sa dérivée. Pour quelles valeurs de l'entier naturel j l'espace vectoriel $\varphi(C^k(\mathbb{R}))$ est-il inclus dans $C^j(\mathbb{R})$, où $k \in \mathbb{N}$?

I.3.b. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est formé des fonctions continues 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période.

I.3.c. L'endomorphisme φ est-il surjectif? Injectif?

I.4. Dans cette question, on étudie les éléments propres de φ .

I.4.a. On considère une valeur propre λ de φ , autrement dit un réel λ tel qu'il existe une fonction non nulle $f \in C^0(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi f = \lambda f$.

Montrer que toute fonction propre f associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$, c'est-à-dire toute fonction continue non nulle f telle que $\varphi f = \lambda f$, est nécessairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I.4.b. Quelles sont les fonctions polynomiales f qui sont fonctions propres de φ ?

I.4.c. Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, il existe une et une seule fonction exponentielle f définie par $f(x) = e^{ax}$, avec $a \in \mathbb{R}$, telle que $\varphi f = \lambda f$. En déduire que tout réel $\lambda > 0$ est valeur propre de φ .

I.4.d. Montrer que, pour tout réel $\lambda > 1$, la seule fonction bornée f appartenant au sous-espace propre associé à λ est la fonction nulle.

Dans la suite du problème, on étudie le sous-espace propre $E_1(\varphi)$ associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues f vérifiant, pour tout réel x ,

$$(\varphi f)(x) = f(x), \quad \text{soit} \quad \int_{x-1}^x f(t) dt = f(x).$$

Partie II — Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\varphi)$

II.1. On considère la fonction $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_0(0) = f_0(1) = 0$ et, pour $0 < x < 1$, par

$$f_0(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right).$$

II.1.a. Montrer que la courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point $(1/2, 0)$.

II.1.b. On admet que f_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que ses dérivées unilatérales aux extrémités vérifient $f'_0(0) = f'_0(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f_0(t) dt = 0$.

II.2. On définit par récurrence, à partir de f_0 , une suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par

$$f_{n+1}(x) = f_n(1)e^x - e^x \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt.$$

II.2.a. Montrer que f_{n+1} est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et vérifie $f'_{n+1} = f_{n+1} - f_n$. En déduire

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt.$$

II.2.b. Montrer que $f_{n+1}(0) = f_n(1)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

II.2.c. Établir enfin que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t) dt + \int_x^1 f_n(t) dt.$$

II.2.d. On note f l'application définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{N}$, par $f(x) = f_n(x - n)$. Ainsi f est définie sur $[0, +\infty[$.

Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$ pour tout réel $x \geq 1$.

II.3. On prolonge la fonction f définie ci-dessus sur $[0, +\infty[$ en une fonction définie sur $[-1, +\infty[$. À cet effet, on pose

$$f(x) = f(x+1) - f'(x+1), \quad -1 \leq x < 0.$$

Montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$ pour tout réel $x \geq 0$.

En réitérant ce même procédé sur $[-2, +\infty[$, $[-3, +\infty[$, etc., on obtient une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi f(x) = f(x)$ pour tout réel x . On ne demande pas d'explicitier ce raisonnement.

Partie III — Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\varphi)$

On désigne toujours par f une application de $E_1(\varphi)$ et par n un entier naturel.

III.1. On étudie les suites (M_n) et (m_n) des maxima et minima de f sur $[n, n+1]$.

III.1.a. Justifier l'existence du maximum M_n de f sur $[n, n+1]$, puis celle d'un réel $x_n \in [n, n+1]$ tel que $f(x_n) = M_n$.

III.1.b. On suppose $n \geq 1$. Montrer que :

- $f'(x_n) = 0$ si $n < x_n < n+1$, et comparer alors $f(x_n - 1)$ à $f(x_n)$.
- f est constante sur $[n, n+1]$ si $x_n = n+1$.

En déduire dans tous les cas que $M_{n-1} \geq M_n$.

III.1.c. On définit de même le minimum m_n de f sur $[n, n+1]$. Établir la monotonie de (m_n) et en déduire la convergence de (M_n) et de (m_n) .

III.2. On étudie l'existence d'une limite éventuelle de f en $+\infty$ et on pose

$$L = 2 \int_0^1 t f(t) dt.$$

III.2.a. Calculer la dérivée de l'application $g : x \mapsto \int_x^{x+1} (t-x)f(t) dt$ et exprimer $g(x)$ à l'aide de L .

III.2.b. Justifier l'inégalité suivante pour $x \geq n$:

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t)) dt \leq M_n - f(x+1).$$

En l'appliquant avec $x = x_{n+1} - 1$, en déduire

$$0 \leq \frac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}.$$

III.2.c. Établir une inégalité analogue faisant intervenir L , m_n et m_{n+1} , et en déduire enfin que $f(x)$ tend vers L lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Partie IV — Recherche des fonctions bornées de $E_1(\varphi)$

On désigne maintenant par f une application bornée de $E_1(\varphi)$ et on note

$$M = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

IV.1. On étudie la fonction u_0 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt.$$

IV.1.a. Comparer u_0 et $\varphi(f^2) - f^2$.

IV.1.b. Calculer la dérivée de u_0 et en déduire le sens de variation de u_0 .

IV.2. On définit par récurrence, à partir de u_0 , les fonctions u_n sur $\mathbb{R}$ par, pour $n \geq 1$,

$$u_n(x) = (\varphi u_{n-1})(x) = \int_{x-1}^x u_{n-1}(t) dt.$$

IV.2.a. Calculer la dérivée de u_n et en déduire le sens de variation de u_n .

IV.2.b. Déterminer le sens de variation de la suite $n \mapsto u_n(x)$ lorsque x est fixé.

IV.2.c. Établir, pour tout réel x et tout entier naturel n ,

$$0 \leq \sum_{k=0}^n u_k(x) \leq M^2.$$

IV.2.d. En déduire que la suite $n \mapsto u_n(x)$ converge vers 0, puis que f est constante sur $\mathbb{R}$.