



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2003

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I — Généralités

Pour une fonction continue f , nous écrivons $(\varphi f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$. Les intégrales sont ici prises sur des segments, donc existent par continuité.

I.1. Propriétés transmises par φ

I.1.a. Effectuons le changement de variable affine $t = x + u - 1$, pour x fixé. Lorsque $t = x - 1$, $u = 0$; lorsque $t = x$, $u = 1$; et $dt = du$. Ainsi

$$(\varphi f)(x) = \int_0^1 f(x + u - 1) du.$$

I.1.b. Dans $(\varphi f)(-x) = \int_{-x-1}^{-x} f(t) dt$, le changement de variable affine $t = -s$ donne

$$(\varphi f)(-x) = \int_x^{x+1} f(-s) ds.$$

Si f est paire, $f(-s) = f(s)$, donc $(\varphi f)(-x) = (\varphi f)(x + 1)$. Si f est impaire, $f(-s) = -f(s)$, donc $(\varphi f)(-x) = -(\varphi f)(x + 1)$.

La symétrie obtenue pour φf est ainsi centrée en $1/2$, plutôt qu'en 0.

I.1.c. Méthode 1 — Comparaison dans la représentation translatée.

Soient $x \leq y$. Si f est croissante, pour tout $u \in [0, 1]$,

$$f(x + u - 1) \leq f(y + u - 1).$$

Par croissance de l'intégrale et I.1.a, $(\varphi f)(x) \leq (\varphi f)(y)$. Donc φf est croissante. Pour f décroissante, toutes ces inégalités sont inversées : φf est décroissante.

Méthode 2 — Signe de la dérivée.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, obtenue par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Alors

$\varphi f(x) = F(x) - F(x - 1)$, donc

$$(\varphi f)'(x) = f(x) - f(x-1).$$

Si f est croissante, cette différence est positive ou nulle ; si f est décroissante, elle est négative ou nulle. Le critère de monotonie par la dérivée donne les mêmes conclusions. La première méthode ne demande que l'ordre ; la seconde met en évidence une formule de dérivation utile ensuite.

I.1.d. Supposons f convexe. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 1]$ et $u \in [0, 1]$, l'identité

$$\theta x + (1 - \theta)y + u - 1 = \theta(x + u - 1) + (1 - \theta)(y + u - 1)$$

permet d'appliquer l'inégalité de convexité :

$$f(\theta x + (1 - \theta)y + u - 1) \leq \theta f(x + u - 1) + (1 - \theta)f(y + u - 1).$$

Les fonctions intégrées sont continues. En intégrant sur $[0, 1]$ et en utilisant I.1.a, on obtient

$$(\varphi f)(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta(\varphi f)(x) + (1 - \theta)(\varphi f)(y).$$

Donc φf est convexe. Si f est concave, la même preuve avec l'inégalité inversée montre que φf est concave. Aucun critère de dérivée seconde n'est nécessaire.

I.1.e. Supposons d'abord que $f(t) \rightarrow L \in \mathbb{R}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $|f(t) - L| \leq \varepsilon$ pour $t \geq A$. Si $x \geq A + 1$, tous les points de $[x - 1, x]$ sont au moins A , donc

$$|(\varphi f)(x) - L| = \left| \int_{x-1}^x (f(t) - L) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $(\varphi f)(x) \rightarrow L$ en $+\infty$.

Si $f(t) \rightarrow L$ en $-\infty$, on choisit A tel que $|f(t) - L| \leq \varepsilon$ pour $t \leq A$. Pour $x \leq A$, l'intégrale sur $[x - 1, x]$ donne exactement la même estimation. Donc φf a aussi la limite L en $-\infty$.

Si l'on interprète la question avec une limite infinie, le résultat reste vrai : une minoration $f(t) \geq B$ sur une extrémité entraîne $(\varphi f)(x) \geq B$ dès que tout le segment est

dans cette extrémité, et une majoration $f(t) \leq -B$ entraîne $(\varphi f)(x) \leq -B$. Cela traite respectivement les limites $+\infty$ et $-\infty$.

I.2. Restriction aux polynômes

I.2.a. Pour $j \in \{0, \dots, n\}$, notons $e_j : x \mapsto x^j$. Une primitive donne

$$(\varphi e_j)(x) = \frac{x^{j+1} - (x-1)^{j+1}}{j+1}.$$

Dans la différence au numérateur, les termes de degré $j+1$ s'annulent. L'expression est donc polynomiale de degré au plus j , et appartient à $\mathbb{R}_n[x]$. Les e_j forment une base de cet espace ; par linéarité de l'intégrale, tout polynôme de degré au plus n est envoyé dans $\mathbb{R}_n[x]$. Cet espace est donc stable.

I.2.b. Le binôme donne, pour $j \geq 0$,

$$(x-1)^{j+1} = \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} (-1)^{j+1-i} x^i.$$

Après annulation du terme de degré $j+1$,

$$(\varphi e_j)(x) = \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^{j-i}}{j+1} \binom{j+1}{i} x^i.$$

Ainsi, dans la base $(e_0, \dots, e_n)$, la matrice A_n a ses lignes et colonnes numérotées de 0 à n et ses coefficients sont

$$(A_n)_{i,j} = \frac{(-1)^{j-i}}{j+1} \binom{j+1}{i} \quad \text{si } 0 \leq i \leq j \leq n, \quad (A_n)_{i,j} = 0 \quad \text{si } i > j.$$

Cette formule donne toute la matrice, y compris pour $n = 0$. Elle est triangulaire supérieure, avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1. Par exemple, pour $n = 2$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I.2.c. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux : la seule valeur propre de φ_n est donc 1. Déterminons son espace propre sans utiliser de déterminant.

Pour $j \geq 1$, la formule précédente commence par

$$\varphi e_j = e_j - \frac{j}{2} e_{j-1} + Q_j, \quad \deg Q_j \leq j-2,$$

avec $Q_1 = 0$. Soit $P = c_d x^d + \dots + c_0$ un polynôme non constant, avec $d \geq 1$ et $c_d \neq 0$. Le coefficient de degré $d-1$ dans $\varphi P - P$ vaut $-dc_d/2$, car les contributions des termes de degré inférieur sont de degré au plus $d-2$. Ce coefficient est non nul. Donc $\varphi P \neq P$.

Les constantes, en revanche, sont conservées par une intégrale sur un segment de longueur 1. Ainsi

$$E_1(\varphi_n) = \text{Vect}(e_0).$$

Les vecteurs propres de φ_n sont exactement les polynômes constants non nuls, également dans le cas $n = 0$.

I.3. Injectivité et surjectivité

I.3.a. Une primitive $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est de classe C^1 puisque f est continue. On a $\varphi f(x) = F(x) - F(x-1)$, donc $\varphi f \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$(\varphi f)'(x) = f(x) - f(x-1).$$

Si $f \in C^k(\mathbb{R})$, le membre de droite est de classe C^k . Ainsi $\varphi f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, ce qui donne l'inclusion demandée pour tous les entiers $0 \leq j \leq k+1$.

Pour vérifier qu'on ne peut garantir un ordre plus élevé, considérons la puissance élémentaire

$$h_k(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0, \quad h_k(x) = x^{k+1} \quad \text{si } x > 0.$$

Pour chaque $0 \leq r \leq k$, les dérivées d'ordre r sont nulles à gauche et proportionnelles à x^{k+1-r} à droite ; elles se prolongent continûment par 0 en 0. Donc $h_k \in C^k(\mathbb{R})$.

Pour $|x| < 1/2$, l'intégration directe donne

$$(\varphi h_k)(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0, \quad (\varphi h_k)(x) = \frac{x^{k+2}}{k+2} \quad \text{si } x > 0.$$

Sa dérivée d'ordre $k+1$ est nulle pour $x < 0$ et vaut $(k+1)!x$ pour $x > 0$. Elle est continue en 0, mais ses dérivées unilatérales en 0 valent respectivement 0 et $(k+1)!$. Elle n'est donc pas dérivable en 0. Ainsi $\varphi h_k \notin C^{k+2}(\mathbb{R})$.

Si $j \geq k+2$, l'appartenance à C^j impliquerait celle à C^{k+2} , ce que cet exemple exclut. En conclusion,

$$\varphi(C^k(\mathbb{R})) \subset C^j(\mathbb{R}) \iff 0 \leq j \leq k+1.$$

I.3.b. Si $f \in \text{Ker}(\varphi)$, alors φf est identiquement nulle. Sa dérivée l'est aussi, donc $f(x) - f(x-1) = 0$ pour tout x . Ainsi f est 1-périodique. De plus,

$$0 = (\varphi f)(1) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Réciproquement, si f est continue et 1-périodique, la formule de I.3.a donne $(\varphi f)' = 0$.

Par le théorème des accroissements finis, φf est constante. Si $\int_0^1 f(t) dt = 0$, cette constante, évaluée en 1, est nulle. Alors $f \in \text{Ker}(\varphi)$.

Ainsi le noyau est exactement constitué des fonctions continues 1-périodiques dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle. Pour une fonction périodique continue, la constance de φf montre aussi que l'intégrale est la même sur toute période.

I.3.c. Toutes les fonctions de l'image de φ sont de classe C^1 , d'après I.3.a. Or la fonction $x \mapsto |x|$ est continue et n'est pas dérivable en 0 ; elle n'appartient donc pas à l'image. Ainsi φ n'est pas surjectif sur $C^0(\mathbb{R})$.

La fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est continue, non nulle, 1-périodique et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, par calcul d'une primitive. Elle appartient au noyau par I.3.b. Donc φ n'est pas injectif.

I.4. Éléments propres

I.4.a. Supposons $\varphi f = \lambda f$, avec $\lambda \neq 0$. Comme f est continue, I.3.a donne $\varphi f \in C^1$, donc $f = \lambda^{-1} \varphi f \in C^1$.

Si $f \in C^k$, la même question donne $\varphi f \in C^{k+1}$, donc $f \in C^{k+1}$. Une récurrence sur k prouve $f \in C^k$ pour tout entier naturel k . Ainsi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

I.4.b. Une fonction propre doit être non nulle. Si un polynôme non nul P vérifie $\varphi P = \lambda P$, on choisit n au moins égal à son degré. Il est alors un vecteur propre de φ_n . La question I.2.c montre que $\lambda = 1$ et que P est constant.

Réciproquement, toute constante non nulle est fixée par φ , donc est fonction propre associée à 1. Ce sont exactement les fonctions polynomiales propres.

I.4.c. Pour $f_a(x) = e^{ax}$, la représentation de I.1.a donne

$$(\varphi f_a)(x) = e^{ax} H(a), \quad H(a) = \int_0^1 e^{a(u-1)} du = \int_0^1 e^{-av} dv.$$

Cette dernière égalité utilise le changement de variable affine $v = 1 - u$. Donc f_a est une fonction propre associée à λ si et seulement si $H(a) = \lambda$.

Calculons et étudions H sans dériver sous une intégrale :

$$H(a) = \frac{1 - e^{-a}}{a} \quad \text{si } a \neq 0, \quad H(0) = 1.$$

La formule rationnelle exponentielle est continue hors de 0. Pour $a \rightarrow 0$, les valeurs de e^{-av} , $0 \leq v \leq 1$, sont comprises entre $e^{-|a|}$ et $e^{|a|}$. Ces bornes encadrent également l'intégrale $H(a)$ et tendent vers 1, donc H est continue en 0.

Si $a < b$, on a $e^{-av} > e^{-bv}$ pour $v \in]0, 1]$. La différence est continue et strictement positive sur un sous-segment, donc son intégrale est strictement positive : $H(a) > H(b)$. Ainsi H est strictement décroissante.

Pour $a > 0$, $0 < H(a) \leq 1/a$, donc $H(a) \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow +\infty$. Pour $b > 0$,

$$H(-b) = \int_0^1 e^{bv} dv \geq \int_{1/2}^1 e^{b/2} dv = \frac{1}{2} e^{b/2} \rightarrow +\infty.$$

La fonction H , continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Pour chaque $\lambda > 0$, il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $H(a) = \lambda$. La fonction e^{ax} correspondante est non nulle et vérifie $\varphi f_a = \lambda f_a$.

Par conséquent, tout réel $\lambda > 0$ est valeur propre de φ . En particulier, $\lambda = 1$ correspond à $a = 0$.

I.4.d. Supposons f bornée et $\varphi f = \lambda f$ avec $\lambda > 1$. Posons $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$. Pour tout x ,

$$\lambda |f(x)| = |(\varphi f)(x)| \leq \int_{x-1}^x |f(t)| dt \leq M.$$

En prenant la borne supérieure, on obtient $\lambda M \leq M$. Comme $M \geq 0$ et $\lambda - 1 > 0$, il vient $M = 0$, donc $f = 0$. On n'a pas supposé que la borne supérieure était atteinte.

Dans les parties suivantes, $E_1(\varphi)$ désigne l'espace des fonctions continues satisfaisant $\varphi f = f$. Par I.4.a, toutes ces fonctions sont de classe C^∞ et vérifient

$$f'(x) = f(x) - f(x-1).$$

Partie II — Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\varphi)$

II.1. La fonction initiale

II.1.a. Pour $0 < x < 1$,

$$(1-x)((1-x)-1) = (1-x)(-x) = x(x-1)$$

et $(1-x) - 1/2 = -(x - 1/2)$. Donc $f_0(1-x) = -f_0(x)$. Cette identité reste vraie aux extrémités puisque $f_0(0) = f_0(1) = 0$.

Ainsi la transformation $(x, y) \mapsto (1-x, -y)$ laisse la courbe invariante. C'est la symétrie centrale de centre $(1/2, 0)$.

II.1.b. Question adaptée au programme actuel.

Résultat admis dans cette version adaptée : f_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et

$f'_0(0) = f'_0(1) = 0$, pour les dérivées unilatérales aux extrémités. Cette propriété garantit la régularité initiale et sera utilisée pour la continuité du premier prolongement en II.3.

Il reste à calculer l'intégrale. La fonction est continue, donc intégrable sur $[0, 1]$. Par le changement de variable affine $t = 1 - u$ et la symétrie de II.1.a,

$$\int_0^1 f_0(t) dt = \int_0^1 f_0(1-u) du = - \int_0^1 f_0(u) du.$$

Cette intégrale réelle est égale à son opposé, donc

$$\int_0^1 f_0(t) dt = 0.$$

II.2. Construction sur $[0, +\infty[$

II.2.a. La fonction initiale est continue. Supposons f_n continue sur $[0, 1]$. La fonction $t \mapsto f_n(t)e^{-t}$ est continue; sa primitive à partir de 0 est de classe C^1 . Par la définition de f_{n+1} , cette dernière est alors de classe C^1 , et

$$f'_{n+1}(x) = f_n(1)e^x - e^x \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt - f_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x).$$

Cela prouve par récurrence que toutes les fonctions sont continues, et que chaque f_{n+1} est de classe C^1 . En intégrant la dérivée sur $[0, 1]$,

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt.$$

II.2.b. En $x = 0$, la définition donne immédiatement $f_{n+1}(0) = f_n(1)$.

Montrons par récurrence l'identité $f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt$. Pour $n = 0$, elle découle de $f_0(1) = 0$ et de II.1.b. Si elle est vraie à l'indice n , II.2.a donne

$$f_{n+1}(1) - f_n(1) = \int_0^1 f_{n+1}(t) dt - \int_0^1 f_n(t) dt.$$

En remplaçant $f_n(1)$ par son intégrale, les deux termes correspondants s'annulent, donc

$$f_{n+1}(1) = \int_0^1 f_{n+1}(t) dt. \text{ La propriété est vraie pour tout } n.$$

II.2.c. Intégrons $f'_{n+1} = f_{n+1} - f_n$ sur $[0, x]$:

$$f_{n+1}(x) = f_{n+1}(0) + \int_0^x f_{n+1}(t) dt - \int_0^x f_n(t) dt.$$

La question II.2.b donne $f_{n+1}(0) = f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt$. Par Chasles,

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t) dt + \int_x^1 f_n(t) dt.$$

Cette formule vaut aussi pour $x = 0$ et $x = 1$.

II.2.d. Sur chaque intervalle $[n, n+1[$, $f(x) = f_n(x-n)$ est continue. À un entier $n \geq 1$, la limite à gauche vaut $f_{n-1}(1)$ et la valeur ainsi que la limite à droite valent $f_n(0)$. Elles sont égales par II.2.b. La fonction est également continue à droite en 0. Ainsi f est continue sur $[0, +\infty[$.

Soit $x \geq 1$. Écrivons $x = n + u$, avec $n \geq 1$ entier et $u \in [0, 1[$. L'intégrale sur $[x-1, x]$ se scinde à l'entier n :

$$\int_{x-1}^x f(t) dt = \int_u^1 f_{n-1}(v) dv + \int_0^u f_n(v) dv.$$

Les changements de variable utilisés sont des translations. Les valeurs isolées aux extrémités ne modifient pas les intégrales ; la continuité déjà établie assure la cohérence des valeurs de jonction.

La formule de II.2.c avec l'indice $n-1$ donne que le membre de droite est $f_n(u) = f(x)$. Donc

$$f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt \quad \text{pour tout } x \geq 1.$$

II.3. Premier prolongement vers les réels négatifs

Pour $-1 \leq x < 0$, le point $x+1$ appartient à $[0, 1[$, où $f = f_0$. Le prolongement est donc explicitement

$$f(x) = f_0(x+1) - f'_0(x+1).$$

Il est continu sur $[-1, 0[$ par la régularité admise de f_0 . Lorsque $x \rightarrow 0^-$, cette expression tend vers $f_0(1) - f'_0(1) = 0 = f(0)$. Le prolongement est donc continu sur $[-1, +\infty[$.

Pour $x \in [0, 1]$, posons $Q(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt - f_0(x)$. La continuité du prolongement donne, pour $0 < x < 1$,

$$Q'(x) = f_0(x) - f(x-1) - f'_0(x).$$

Or la définition du prolongement donne $f(x-1) = f_0(x) - f'_0(x)$. Ainsi $Q' = 0$ sur $]0, 1[$.

La fonction Q est continue sur $[0, 1]$, donc constante sur cet intervalle. En $x = 1$,

$$Q(1) = \int_0^1 f_0(t) dt - f_0(1) = 0.$$

Donc $Q(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$. Pour $x \geq 1$, l'égalité reste celle de II.2.d, puisqu'elle ne fait intervenir que des valeurs de f sur $[0, +\infty[$. On a donc bien

$$f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

L'énoncé fournit ensuite, sans demander d'explicitier l'itération, le prolongement continu sur $\mathbb{R}$ obtenu en répétant ce procédé. Ce résultat particulier donne une fonction de $E_1(\varphi)$ dont la restriction à $[0, 1]$ est f_0 . Elle n'est pas constante : $f_0(0) = 0$, tandis que

$$f_0(3/4) = \frac{1}{4}e^{-16/3} > 0.$$

La partie II établit ainsi l'existence annoncée d'une fonction non constante dans $E_1(\varphi)$.

Partie III — Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\varphi)$

On considère une fonction $f \in E_1(\varphi)$. Elle est de classe C^∞ et satisfait

$$f'(x) = f(x) - f(x-1).$$

III.1. Maxima et minima sur des segments successifs

III.1.a. La fonction f est continue sur le segment fermé et borné $[n, n+1]$. Le théorème des bornes atteintes garantit qu'elle y possède un maximum fini M_n et qu'il existe $x_n \in [n, n+1]$ tel que $f(x_n) = M_n$.

III.1.b. Fixons $n \geq 1$ et distinguons les trois positions possibles de x_n .

Si $n < x_n < n+1$, f admet un maximum local en ce point intérieur et est dérivable.

Donc $f'(x_n) = 0$. L'identité différentielle donne alors $f(x_n - 1) = f(x_n) = M_n$. Comme

$x_n - 1 \in [n - 1, n]$, on en déduit $M_{n-1} \geq M_n$.

Si $x_n = n + 1$, la relation $\varphi f = f$ donne

$$M_n = f(n + 1) = \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

Sur ce segment, $f(t) \leq M_n$. La fonction continue positive ou nulle $M_n - f(t)$ a donc une intégrale nulle. Si elle était strictement positive en un point, la continuité la rendrait positive sur un petit segment et son intégrale serait strictement positive. Elle est donc identiquement nulle. Ainsi f est constante, de valeur M_n , sur $[n, n + 1]$. En particulier $f(n) = M_n$; comme $n \in [n - 1, n]$, on obtient $M_{n-1} \geq M_n$.

Enfin, si $x_n = n$, alors $f(n) = M_n$ et $n \in [n - 1, n]$, donc directement $M_{n-1} \geq M_n$.

Dans tous les cas, $M_{n-1} \geq M_n$: la suite (M_n) est décroissante.

III.1.c. Appliquons III.1.b à la fonction $-f$, qui appartient à $E_1(\varphi)$ par linéarité. Son maximum sur $[n, n + 1]$ est $-m_n$. La décroissance de ces maxima donne $-m_{n-1} \geq -m_n$, donc $m_{n-1} \leq m_n$. La suite (m_n) est croissante.

On a toujours $m_n \leq M_n$. Ainsi, pour tout n ,

$$m_0 \leq m_n \leq M_n \leq M_0.$$

La suite décroissante (M_n) est minorée par m_0 , et la suite croissante (m_n) est majorée par M_0 . Le théorème de la limite monotone donne deux limites finies, que l'on note M_∞ et m_∞ , avec $m_\infty \leq M_\infty$.

On retiendra aussi que, pour tout $t \geq n$,

$$m_n \leq f(t) \leq M_n.$$

En effet, on choisit un entier $p \geq n$ tel que $t \in [p, p + 1]$, puis on utilise

$$m_n \leq m_p \leq f(t) \leq M_p \leq M_n.$$

III.2. Identification de la limite

III.2.a. Pour éviter une formule de dérivation sous une intégrale à paramètre, écrivons

$$g(x) = \int_x^{x+1} t f(t) dt - x \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

Chaque intégrale de la forme $\int_x^{x+1} h(t) dt$ est une différence de primitives et a pour dérivée $h(x+1) - h(x)$. Par dérivation d'un produit,

$$g'(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x) - \int_x^{x+1} f(t) dt - x(f(x+1) - f(x)).$$

Les termes se simplifient en

$$g'(x) = f(x+1) - \int_x^{x+1} f(t) dt = 0,$$

la dernière égalité étant $\varphi f(x+1) = f(x+1)$. Donc g est constante sur $\mathbb{R}$. En évaluant en 0,

$$g(x) = g(0) = \int_0^1 tf(t) dt = L/2.$$

III.2.b. Pour $x \geq n$, le résultat de III.1.c donne $M_n - f(t) \geq 0$ sur $[x, x+1]$. De plus, $0 \leq t - x \leq 1$. Donc

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t)) dt \leq \int_x^{x+1} (M_n - f(t)) dt.$$

La dernière intégrale vaut $M_n - f(x+1)$ puisque le segment a longueur 1 et que

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = f(x+1). \text{ On obtient l'inégalité demandée.}$$

D'autre part, grâce à III.2.a,

$$\int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t)) dt = \frac{M_n}{2} - g(x) = \frac{M_n - L}{2}.$$

Choisissons $x = x_{n+1} - 1$. Comme $x_{n+1} \in [n+1, n+2]$, on a $x \geq n$; et $f(x+1) = M_{n+1}$. Ainsi

$$0 \leq \frac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}.$$

III.2.c. Pour $x \geq n$, $f(t) - m_n \geq 0$ sur $[x, x+1]$, donc le même raisonnement donne

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(f(t) - m_n) dt \leq f(x+1) - m_n.$$

Le membre central vaut $(L - m_n)/2$. Choisissons un point $y_{n+1} \in [n+1, n+2]$ où le minimum m_{n+1} est atteint, puis $x = y_{n+1} - 1 \geq n$. On obtient

$$0 \leq \frac{L - m_n}{2} \leq m_{n+1} - m_n.$$

Les suites (M_n) et (m_n) convergent par III.1.c, donc leurs différences successives tendent vers 0. En passant à la limite dans les deux encadrements,

$$M_\infty = L, \quad m_\infty = L.$$

Pour conclure sur la fonction, soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que, pour $n \geq N$,

$L - \varepsilon \leq m_n \leq M_n \leq L + \varepsilon$. Le dernier résultat de III.1.c donne directement, pour tout $x \geq N$,

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L = 2 \int_0^1 t f(t) dt.$$

La convergence est obtenue par un encadrement valable pour tous les réels suffisamment grands, pas seulement pour des points particuliers.

Partie IV — Recherche des fonctions bornées de $E_1(\varphi)$

On suppose maintenant f bornée sur $\mathbb{R}$ et on pose $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$. La fonction f est de classe C^∞ .

IV.1. L'écart quadratique local

IV.1.a. Développons le carré et utilisons $\varphi f = f$:

$$u_0(x) = \int_{x-1}^x f(t)^2 dt - 2f(x) \int_{x-1}^x f(t) dt + f(x)^2 \int_{x-1}^x 1 dt.$$

Le segment a longueur 1, donc

$$u_0(x) = \varphi(f^2)(x) - 2f(x)^2 + f(x)^2 = \varphi(f^2)(x) - f(x)^2.$$

Ainsi les deux fonctions à comparer sont égales. Par sa définition intégrale, $u_0 \geq 0$.

IV.1.b. La formule de I.3.a appliquée à f^2 et la dérivation de f^2 donnent

$$u'_0(x) = f(x)^2 - f(x-1)^2 - 2f(x)f'(x).$$

Comme $f' = f - f(\cdot - 1)$,

$$u'_0(x) = f(x)^2 - f(x-1)^2 - 2f(x)(f(x) - f(x-1)) = -(f(x) - f(x-1))^2.$$

Donc $u'_0(x) = -(f'(x))^2 \leq 0$: u_0 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

IV.2. Itération de l'opérateur

IV.2.a. Pour $n \geq 1$, $u_n = \varphi u_{n-1}$. Comme u_{n-1} est continue, I.3.a donne

$$u'_n(x) = u_{n-1}(x) - u_{n-1}(x-1).$$

La fonction u_0 est décroissante par IV.1.b. Si u_{n-1} est décroissante, alors

$u_{n-1}(x) \leq u_{n-1}(x-1)$, donc $u'_n \leq 0$ et u_n est décroissante. Par récurrence, toutes les fonctions u_n sont décroissantes.

Elles sont également positives ou nulles : $u_0 \geq 0$ et l'intégrale d'une fonction positive ou nulle conserve cette propriété.

IV.2.b. Pour $t \in [x-1, x]$, la décroissance de u_n donne $u_n(t) \geq u_n(x)$. En intégrant sur ce segment de longueur 1,

$$u_{n+1}(x) = \int_{x-1}^x u_n(t) dt \geq u_n(x).$$

Pour chaque x fixé, la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est donc croissante et positive ou nulle.

IV.2.c. Notons φ^0 l'identité et φ^r la composée de r applications de φ . Par IV.1.a et la linéarité,

$$u_k = \varphi^k(u_0) = \varphi^{k+1}(f^2) - \varphi^k(f^2).$$

La somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \varphi^{n+1}(f^2) - f^2.$$

Pour toute fonction continue h telle que $0 \leq h \leq M^2$, la positivité et la croissance de l'intégrale donnent

$$0 \leq \varphi h(x) \leq \int_{x-1}^x M^2 dt = M^2.$$

Comme $0 \leq f^2 \leq M^2$, une récurrence donne $0 \leq \varphi^r(f^2) \leq M^2$ pour chaque r . D'autre part, les u_k sont positifs ou nuls. Ainsi

$$0 \leq \sum_{k=0}^n u_k(x) = \varphi^{n+1}(f^2)(x) - f(x)^2 \leq M^2 - f(x)^2 \leq M^2.$$

On obtient l'inégalité demandée pour tout x et tout n , y compris pour $n = 0$.

IV.2.d. Méthode 1 — Série à termes positifs et monotonie.

Fixons x . Les sommes partielles

$$\sum_{k=0}^n u_k(x)$$

sont croissantes, car les termes sont positifs, et majorées par M^2 . Elles convergent par le théorème de la limite monotone. Le terme général de cette série convergente tend donc vers 0 : $u_n(x) \rightarrow 0$.

Or $(u_n(x))$ est croissante et positive ou nulle par IV.2.b. Pour chaque n , $0 \leq u_0(x) \leq u_n(x)$; en passant à la limite, $u_0(x) = 0$. Cela vaut pour tout x , donc u_0 est identiquement nulle. La formule de IV.1.b donne alors $0 = u'_0(x) = -(f'(x))^2$, donc $f'(x) = 0$ pour tout x . Par le théorème des accroissements finis, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Estimation directe utilisant les deux monotonies.

La croissance de $(u_n(x))$ donne, pour $0 \leq k \leq n$, $u_k(x) \geq u_0(x)$. Par IV.2.c,

$$0 \leq (n+1)u_0(x) \leq \sum_{k=0}^n u_k(x) \leq M^2.$$

Donc $0 \leq u_0(x) \leq M^2/(n+1)$ pour tout n , et $u_0(x) = 0$. Cette identité entraîne $u_n = \varphi^n(u_0) = 0$ pour tout n , donc en particulier $u_n(x) \rightarrow 0$. Elle donne aussi $f' = 0$ par IV.1.b, puis la constance de f . Cette approche évite d'introduire une série infinie.

Réciproquement, chaque fonction constante est fixée par φ , car les intervalles d'intégration ont longueur 1, et elle est bornée. Les fonctions de $E_1(\varphi)$ bornées sur $\mathbb{R}$ sont donc exactement les fonctions constantes.

Relevé des adaptations

II.1.b. L'étude de régularité de la fonction f_0 , définie par une exponentielle avec singularités aux extrémités, est remplacée par l'admission du résultat particulier : $f_0 \in C^1([0, 1])$ et $f'_0(0) = f'_0(1) = 0$. Cela évite une étude technique de régularité aux points de raccord tout en conservant la fonction initiale et toutes les questions qui en dépendent. Les dérivées nulles sont précisées pour justifier le raccord en 0 dans II.3. L'intégrale nulle est démontrée.

Aucune autre question n'est modifiée. Le prolongement itéré sur $\mathbb{R}$ dans II.3 reste le résultat fourni par l'énoncé sans demande d'explicitation. Les preuves n'utilisent ni déterminants ni outils généraux de dérivation sous une intégrale.