



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2002

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Un polynôme non nul est dit unitaire lorsque son coefficient dominant, c'est-à-dire celui de son terme de plus haut degré, est égal à 1.

L'objet du problème est l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables en partie II. On étudie auparavant une famille de polynômes et leurs racines en partie I. Les parties ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre des résultats de la partie I pour traiter la partie II.

Partie I

1°) Définition d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Établir que l'application associant à tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme $\varphi(P) = 2XP' - P''$, où P' et P'' désignent ses dérivées première et seconde, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Écrire sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

2°) Éléments propres de φ .

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ de φ , rangées dans l'ordre croissant, et montrer que φ est diagonalisable.

b) Montrer que, pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, il existe un unique polynôme unitaire $H_p \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $H_p'' - 2XH_p' + 2pH_p = 0$.

c) Montrer que H_p est nécessairement de degré p .

d) Expliciter H_0, H_1, H_2, H_3 dans la base canonique, puis calculer les coefficients de X^{p-1} pour $1 \leq p \leq n$ et de X^{p-2} pour $2 \leq p \leq n$ dans H_p . Lorsque $n = 2$, on définit ici H_3 en appliquant la question b) dans $\mathbb{R}_3[X]$ avec $p = 3$.

3°) Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que l'intégrale suivante est définie pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx.$$

b) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Exprimer la dérivée de $x \mapsto P'(x)e^{-x^2}$ en fonction de $\varphi(P)(x)e^{-x^2}$. Prouver que, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$.

d) En déduire que $\langle H_p, H_q \rangle = 0$ pour deux entiers distincts $p, q \in \{0, \dots, n\}$, puis que $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale. Montrer enfin que $\langle H_p, Q \rangle = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, lorsque $1 \leq p \leq n$.

4°) Étude des racines de H_p , pour $1 \leq p \leq n$.

a) Montrer, en remarquant que $\langle H_p, H_0 \rangle = 0$, que H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

b) On note $a_1, \dots, a_m$ les racines distinctes de H_p où il change de signe, avec $m \leq p$, et on pose

$$P_m(X) = \prod_{j=1}^m (X - a_j).$$

Étudier le signe de $H_p P_m$ et déterminer $\langle H_p, P_m \rangle$ si $m < p$. En déduire que $m = p$.

c) En déduire que H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

5°) Relations entre les polynômes H_p , pour $2 \leq p \leq n$.

- a) Pour $3 \leq p \leq n$ et $Q \in \mathbb{R}_{p-3}[X]$, prouver que $\langle XH_{p-1}, Q \rangle = 0$ et $\langle H_p - XH_{p-1}, Q \rangle = 0$.
En exprimant $H_p - XH_{p-1}$ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$, établir

$$2H_p - 2XH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0 \quad (2 \leq p \leq n).$$

- b) Prouver que $\langle H'_p, Q \rangle = 0$ pour $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, lorsque $2 \leq p \leq n$. En déduire

$$H'_p = pH_{p-1} \quad (1 \leq p \leq n).$$

Partie II

On considère $\mathbb{R}^n$ et l'ouvert $U = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$. Il n'est pas demandé de vérifier que U est ouvert.

La fonction étudiée est définie sur U par

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i).$$

Par exemple, pour $n = 3$,

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \ln(x_2 - x_1) - 2 \ln(x_3 - x_2) - 2 \ln(x_3 - x_1).$$

- 1°) Étude du cas $n = 2$, où $F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \ln(x_2 - x_1)$.

- a) Calculer les deux dérivées partielles de F en tout point de U et déterminer l'unique point $a \in U$ où elles sont nulles.

- b) Calculer $F(a)$ et montrer que F présente un minimum local en a .

- 2°) Étude du point critique de F dans le cas général.

À tout $a \in U$, on associe

$$P(X) = \prod_{j=1}^n (X - a_j).$$

Un point de U est dit critique lorsque toutes les dérivées partielles de F y sont nulles.

a) Pour tout réel x distinct de $a_1, \dots, a_n$, établir

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j}.$$

En déduire, pour chaque i , la limite lorsque $x \rightarrow a_i$ de $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$.

b) À l'aide de la formule de Taylor-Young, dont on demande de rappeler l'énoncé, déterminer les développements limités à l'ordre 2 à l'origine de

$$f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t), \quad g(t) = tP(a_i + t).$$

En déduire la limite lorsque $x \rightarrow a_i$ de $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$, en posant $x = a_i + t$.

c) Utiliser les résultats précédents pour établir

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}.$$

Exprimer les n dérivées partielles de F en fonction de $x_1, \dots, x_n$. Montrer que, si a est critique, le polynôme $2XP' - P''$ admet les racines $a_1, \dots, a_n$.

d) En déduire qu'il existe un réel λ , à préciser, tel que $2XP' - P'' = \lambda P$. Comparer P et H_n . Établir que F admet un unique point critique a dans U .

3°) Nature du point critique dans le cas général.

- a) Montrer que, si $x, y \in U$ et $0 \leq t \leq 1$, alors $tx + (1 - t)y \in U$.
- b) Une fonction f sur U est dite convexe lorsque, pour tous $x, y \in U$ et $t \in [0, 1]$,
 $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$.
 - Montrer que $s \mapsto s^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que $x \mapsto x_i^2$ est convexe sur U .
 - Montrer que $s \mapsto -\ln s$ est convexe sur $]0, +\infty[$. En déduire que $x \mapsto -\ln(x_j - x_i)$ est convexe sur U pour $i < j$.
 - Établir que F est convexe sur U .
- c) Soit a le point critique et $x \in U$. Pour $t \in [0, 1]$, on pose $\psi(t) = F(tx + (1 - t)a)$.
 - Calculer $\psi'(t)$ et montrer que $\psi'(0) = 0$.
 - Pour $0 < t \leq 1$, établir $\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \leq F(x) - F(a)$. Conclure que F admet un minimum en a .

4°) Calcul du minimum $F(a)$ dans le cas général.

- a) On désigne par $y_1, \dots, y_{n-1}$ les racines de H_{n-1} et, pour $n \geq 3$, par $z_1, \dots, z_{n-2}$ celles de H_{n-2} .
 - À l'aide de $2H_n - 2XH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0$, établir

$$\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \left(\frac{n-1}{2} \right)^{n-1} \left| \prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(z_i) \right| \quad (n \geq 3),$$

puis

$$\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \frac{2^2 3^3 \dots (n-1)^{n-1}}{2^{n(n-1)/2}}.$$

Le produit du numérateur est vide et vaut 1 pour $n = 2$.

- Établir

$$|H'_n(a_i)| = \left| \prod_{j \neq i} (a_i - a_j) \right|$$

et évaluer

$$p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

en fonction de

$$\prod_{i=1}^n H'_n(a_i).$$

- À l'aide de $H'_n = nH_{n-1}$, établir

$$p_n^2 = n^n \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right|.$$

- En déduire p_n en fonction de n .

b) En remarquant que

$$H_n(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_i) = X^n - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) X^{n-1} + \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) X^{n-2} - \dots$$

$$+ (-1)^n \prod_{i=1}^n a_i,$$

calculer

$$\sum_i a_i,$$

$$\sum_{i < j} a_i a_j,$$

puis

$$\sum_i a_i^2.$$

En déduire $F(a)$ et retrouver, pour $n = 2$, le résultat de II-1°.