



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2002

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1°) Définition de l'endomorphisme.

a) La dérivation est linéaire. Pour tous réels α, β et polynômes P, Q , on a donc

$$\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q).$$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, P' a degré au plus $n - 1$ et P'' au plus $n - 2$, lorsqu'ils sont non nuls. Ainsi $2XP' - P''$ a degré au plus n ; les dérivées nulles des polynômes constants ne posent aucune difficulté. L'application est linéaire et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$: c'est un endomorphisme.

b) On calcule les images des vecteurs de la base. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X$ et, pour $2 \leq j \leq n$,

$$\varphi(X^j) = 2jX^j - j(j-1)X^{j-2}.$$

La matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ est donc définie par

$$m_{j,j} = 2(j-1) \quad (1 \leq j \leq n+1), \quad m_{j-2,j} = -(j-1)(j-2) \quad (3 \leq j \leq n+1),$$

tous les autres coefficients étant nuls. C'est une matrice triangulaire supérieure, dont la diagonale est $(0, 2, 4, \dots, 2n)$ et dont la deuxième diagonale au-dessus de la diagonale principale est $(-2, -6, -12, \dots, -n(n-1))$.

Par exemple, pour $n = 3$, sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2°) Éléments propres.

- a) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. On obtient donc $\lambda_p = 2p$ pour $0 \leq p \leq n$. Elles sont réelles, distinctes et rangées dans l'ordre croissant.

L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$. Un endomorphisme de cet espace possédant $n + 1$ valeurs propres distinctes est diagonalisable. Ainsi φ est diagonalisable. Chacun de ses $n + 1$ espaces propres est de dimension 1, puisque leur somme est directe et leur dimension totale vaut $n + 1$.

- b) L'équation donnée équivaut à $\varphi(H_p) = 2pH_p$. L'espace propre associé à $2p$ est de dimension 1 et contient un polynôme non nul Q_p . Divisons Q_p par son coefficient dominant non nul : le résultat est un polynôme unitaire H_p de cet espace propre.

Tout autre polynôme non nul de l'espace propre est un multiple de H_p . S'il est lui aussi unitaire, ce multiple vaut 1. Cela prouve l'existence et l'unicité de H_p .

- c) Soit $d = \deg H_p$, et notons $c \neq 0$ son coefficient dominant, ici égal à 1. Le coefficient de X^d dans $2XH'_p - H''_p$ vaut $2dc$. Dans l'équation $\varphi(H_p) = 2pH_p$, ce même coefficient vaut $2pc$. On a donc $d = p$.

Ce raisonnement vaut aussi pour $d = 0$, où la dérivée est nulle ; il donne alors $p = 0$. Ainsi chaque H_p a exactement le degré p .

- d) Question adaptée au programme actuel : pour $n = 2$, le polynôme H_3 est défini dans $\mathbb{R}_3[X]$, car il ne peut appartenir à $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour $p = 0$, le seul polynôme unitaire constant est $H_0 = 1$. Pour $p = 1$, écrire $H_1 = X + c$ dans l'équation donne $2c = 0$, donc $H_1 = X$.

Pour $p = 2$, posons $H_2 = X^2 + aX + b$. Alors

$$H''_2 - 2XH'_2 + 4H_2 = 2 + 2aX + 4b.$$

L'annulation donne $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$, donc $H_2 = X^2 - \frac{1}{2}$.

Pour $p = 3$, posons $H_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$. On calcule

$$H_3'' - 2XH_3' + 6H_3 = 2aX^2 + (6 + 4b)X + 2a + 6c.$$

Il vient $a = 0$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = 0$, donc $H_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$.

Pour le calcul général, écrivons

$$H_p = \sum_{k=0}^p c_k X^k$$

avec $c_p = 1$. Le coefficient de X^k dans l'équation différentielle est

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + 2(p-k)c_k = 0,$$

en convenant que les coefficients au-delà du degré p sont nuls. Pour $k = p-1$, on obtient $2c_{p-1} = 0$. Pour $k = p-2$, on obtient $p(p-1) + 4c_{p-2} = 0$.

Ainsi le coefficient de X^{p-1} est 0, et celui de X^{p-2} est $-\frac{p(p-1)}{4}$.

3°) Produit scalaire.

a) Le produit $R = PQ$ est un polynôme. Si $R = 0$, l'intégrale est nulle et existe. Sinon, il existe un entier $d \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que $|R(x)| \leq C|x|^d$ pour $|x| \geq 1$.

La croissance de l'exponentielle par rapport aux puissances donne $|x|^{d+2}e^{-x^2} \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. En effet, en posant $t = x^2$, cette expression est $t^{(d+2)/2}e^{-t}$.

Pour $|x|$ assez grand, on a donc $|R(x)|e^{-x^2} \leq C/x^2$. Les intégrales de $1/x^2$ convergent aux deux extrémités infinies. La comparaison de fonctions positives montre la convergence absolue de l'intégrale sur ces deux extrémités. Sur tout segment, l'intégrande est continue et intégrable. Ainsi $\langle P, Q \rangle$ est bien définie.

b) La bilinéarité vient de la linéarité des intégrales convergentes, établie grâce à a), et la symétrie de l'égalité $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$.

Pour tout P , $\langle P, P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)^2 e^{-x^2} dx \geq 0$. Si $P \neq 0$, il existe x_0 tel que $P(x_0) \neq 0$, car un polynôme non nul ne peut s'annuler en tout point. La fonction continue

$P(x)^2 e^{-x^2}$ est strictement positive en x_0 . Sur un petit segment autour de x_0 , elle est donc minorée par une constante strictement positive. Son intégrale sur ce segment est strictement positive, et l'intégrale sur toute la droite est au moins aussi grande.

Ainsi $\langle P, P \rangle > 0$ pour $P \neq 0$. L'application est bilinéaire, symétrique et définie positive : elle est un produit scalaire réel.

c) La dérivation du produit donne

$$\frac{d}{dx}(P'(x)e^{-x^2}) = (P''(x) - 2xP'(x))e^{-x^2} = -\varphi(P)(x)e^{-x^2}.$$

Pour effectuer l'intégration par parties, on travaille d'abord sur un segment $[-R, R]$, avec $R > 0$:

$$\int_{-R}^R \varphi(P)(x)Q(x)e^{-x^2} dx = -[P'(x)Q(x)e^{-x^2}]_{-R}^R + \int_{-R}^R P'(x)Q'(x)e^{-x^2} dx.$$

Le terme de bord tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$, car $P'Q$ est un polynôme et l'exponentielle e^{-x^2} domine toute puissance. Les deux intégrales convergent absolument par a), appliquée aux polynômes concernés. Le passage à la limite donne

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)Q'(x)e^{-x^2} dx.$$

Cette dernière expression est symétrique en P et Q . En échangeant les polynômes et en utilisant la symétrie du produit scalaire, on obtient $\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$.

d) Puisque $\varphi(H_p) = 2pH_p$ et $\varphi(H_q) = 2qH_q$, la question c) donne

$$2p\langle H_p, H_q \rangle = 2q\langle H_p, H_q \rangle.$$

Si $p \neq q$, le coefficient $2(p - q)$ est non nul, donc $\langle H_p, H_q \rangle = 0$.

Les polynômes $H_0, \dots, H_n$ sont non nuls et orthogonaux, donc indépendants. Ils sont au nombre de $n + 1$, dimension de l'espace, et forment donc une base orthogonale.

Pour $1 \leq p \leq n$, les polynômes $H_0, \dots, H_{p-1}$ ont des degrés distincts de 0 à $p-1$. Ils forment une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$. Tout Q de cet espace est une combinaison linéaire de ces polynômes; par bilinéarité et orthogonalité, $\langle H_p, Q \rangle = 0$.

4°) Racines des polynômes.

- a) Comme $H_0 = 1$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)e^{-x^2} dx = 0$. Le polynôme H_p est non nul. S'il était partout positif ou nul, l'intégrale serait strictement positive, par continuité et stricte positivité du poids. S'il était partout négatif ou nul, elle serait strictement négative.

Ainsi H_p prend au moins une valeur strictement positive et une valeur strictement négative. Entre ces deux points, sa continuité assure une racine. Comme un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines, le passage d'un signe à l'autre impose au moins une racine où il change de signe. Cela établit la conclusion.

- b) Au voisinage d'une racine réelle a de multiplicité r , on peut écrire $H_p(X) = (X - a)^r Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$. Le polynôme Q garde un signe constant près de a . Ainsi H_p change de signe en a exactement lorsque r est impair.

Le polynôme P_m possède exactement une fois chacune des racines où H_p change de signe. Dans $H_p P_m$, ces multiplicités deviennent donc paires. Les autres racines réelles de H_p ont déjà une multiplicité paire. Par conséquent, le produit ne change de signe en aucune de ses racines réelles; sur les intervalles séparés par ces racines, il garde un même signe.

Les deux polynômes étant unitaires, $H_p P_m$ est strictement positif pour les réels positifs assez grands. Il est donc positif ou nul sur toute la droite, et non identiquement nul. L'intégrale $\langle H_p, P_m \rangle$ existe par I-3° a) et est strictement positive par continuité et positivité du poids.

Si $m < p$, on aurait $P_m \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, donc $\langle H_p, P_m \rangle = 0$ par I-3° d). Cela contredit la stricte positivité précédente. Ainsi $m \geq p$; comme $m \leq \deg H_p = p$, on obtient $m = p$.

- c) Le polynôme H_p a degré p et possède p racines réelles distinctes où il change de signe. Chaque racine a une multiplicité au moins égale à 1. La somme des

multiplicités ne peut dépasser le degré p ; chacune vaut donc exactement 1. Toutes les racines sont réelles et simples.

5°) Relations entre les polynômes.

a) Pour $3 \leq p \leq n$ et $Q \in \mathbb{R}_{p-3}[X]$, le produit XQ a degré au plus $p-2$. Par I-3° d),

$$\langle XH_{p-1}, Q \rangle = \langle H_{p-1}, XQ \rangle = 0.$$

De même, $\langle H_p, Q \rangle = 0$. Par différence, $\langle H_p - XH_{p-1}, Q \rangle = 0$.

Les deux termes sont unitaires de degré p . Leur différence $T = H_p - XH_{p-1}$ a donc degré au plus $p-1$. Les coefficients de X^{p-1} dans les deux termes sont nuls par I-2° d), donc $\deg T \leq p-2$.

Exprimons

$$T = \sum_{k=0}^{p-2} c_k H_k.$$

Pour chaque $k \leq p-3$, l'orthogonalité obtenue donne $0 = \langle T, H_k \rangle = c_k \langle H_k, H_k \rangle$. Le dernier facteur est strictement positif, donc $c_k = 0$. Ainsi $T = c_{p-2} H_{p-2}$.

Le coefficient de X^{p-2} dans T vaut

$$-\frac{p(p-1)}{4} + \frac{(p-1)(p-2)}{4} = -\frac{p-1}{2}.$$

Comme H_{p-2} est unitaire, $c_{p-2} = -(p-1)/2$. On obtient $H_p - XH_{p-1} = -\frac{p-1}{2} H_{p-2}$, soit la relation annoncée.

Pour $p=2$, l'espace de degré au plus $p-3$ n'intervient pas. Les formules explicites donnent directement $H_2 - XH_1 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} H_0$, donc la relation reste valable.

b) Méthode 1 — Orthogonalité et intégration par parties.

Pour $p \geq 2$ et $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, on effectue sur $[-R, R]$ l'intégration par parties

$$\int_{-R}^R H'_p(x)Q(x)e^{-x^2} dx = [H_p(x)Q(x)e^{-x^2}]_{-R}^R + \int_{-R}^R H_p(x)(2xQ(x) - Q'(x))e^{-x^2} dx.$$

Le terme de bord tend vers 0 par croissance comparée, et les intégrales convergent absolument par I-3° a). En passant à la limite, on obtient $\langle H'_p, Q \rangle = \langle H_p, 2XQ - Q' \rangle$.

Le polynôme $2XQ - Q'$ a degré au plus $p - 1$, donc le membre de droite est nul par I-3° d). Cela prouve l'orthogonalité demandée.

Écrivons ensuite H'_p dans la base $H_0, \dots, H_{p-1}$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$. L'orthogonalité à $\mathbb{R}_{p-2}[X]$ rend nuls tous les coefficients sauf celui de H_{p-1} . Or H'_p a coefficient dominant p , tandis que H_{p-1} est unitaire. Ainsi $H'_p = pH_{p-1}$.

Pour $p = 1$, $H'_1 = 1 = H_0$, donc la relation vaut encore.

Méthode 2 — Dérivation de l'équation des polynômes.

En dérivant $H''_p - 2XH'_p + 2pH_p = 0$, on obtient

$$H^{(3)}_p - 2XH''_p + 2(p-1)H'_p = 0.$$

Le polynôme H'_p/p est unitaire de degré $p - 1$ et vérifie l'équation définissant H_{p-1} . L'unicité de I-2° b) donne donc $H'_p/p = H_{p-1}$.

Pour $p \geq 2$ et $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, I-3° d) entraîne alors $\langle H'_p, Q \rangle = p\langle H_{p-1}, Q \rangle = 0$. Cette seconde méthode établit la même orthogonalité et la même relation, dans l'ordre inverse. La première suit l'indication de l'énoncé; la seconde utilise l'équation définissant la famille.

Partie II

Sur U , tous les arguments $x_j - x_i$ des logarithmes sont strictement positifs. La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, en particulier de classe $\mathcal{C}^2$, sur l'ouvert U .

1°) Cas $n = 2$.

a) Posons $d = x_2 - x_1 > 0$. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \frac{2}{d}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \frac{2}{d}.$$

Leur annulation donne $x_1 = -1/d$ et $x_2 = 1/d$, donc $d = 2/d$. Comme $d > 0$, $d = \sqrt{2}$. On obtient l'unique point critique

$$a = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Ses coordonnées sont strictement ordonnées, donc il appartient bien à U .

b) Les carrés des coordonnées ont pour somme 1 et l'écart vaut $\sqrt{2}$. Ainsi

$$F(a) = 1 - 2 \ln \sqrt{2} = 1 - \ln 2.$$

Méthode 1 — Hessienne et valeurs propres.

La fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et a est critique. La hessienne en un point quelconque est

$$\nabla^2 F(x) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{d^2} & -\frac{2}{d^2} \\ -\frac{2}{d^2} & 2 + \frac{2}{d^2} \end{pmatrix}.$$

En a , puisque $d^2 = 2$, elle vaut $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Les vecteurs ${}^t(1, 1)$ et ${}^t(1, -1)$ sont des vecteurs propres, associés respectivement aux valeurs 2 et 4. Ils sont indépendants et donnent toutes les valeurs propres de cette matrice d'ordre 2.

Toutes les valeurs propres sont strictement positives. Le critère hessien assure que a est un minimum local strict, de valeur $1 - \ln 2$.

Méthode 2 — Séparation du centre et de l'écart.

Posons $c = (x_1 + x_2)/2$ et $d = x_2 - x_1 > 0$. On a $x_1 = c - d/2$ et $x_2 = c + d/2$, donc

$$F(x) = 2c^2 + q(d), \quad q(d) = \frac{d^2}{2} - 2 \ln d.$$

La dérivée $q'(d) = d - 2/d = (d^2 - 2)/d$ est négative pour $0 < d < \sqrt{2}$ et positive pour $d > \sqrt{2}$. Ainsi q a un minimum global strict en $\sqrt{2}$, de valeur $1 - \ln 2$.

Le terme $2c^2$ est minimal, avec valeur 0, uniquement en $c = 0$. Par conséquent $F(x) \geq 1 - \ln 2$, avec égalité uniquement pour $c = 0$ et $d = \sqrt{2}$, c'est-à-dire en a . Cette méthode établit même le minimum global strict et explique le rôle de la séparation des coordonnées.

2°) Point critique dans le cas général.

a) En dérivant le produit fini, on obtient

$$P'(x) = \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} (x - a_k).$$

Si x est distinct de toutes les racines, $P(x) \neq 0$. La division donne

$$P'(x)/P(x) = \sum_j 1/(x - a_j).$$

Pour i fixé, on peut donc écrire

$$P'(x)/P(x) - 1/(x - a_i) = \sum_{j \neq i} 1/(x - a_j).$$

Les points a_j sont distincts, car $a \in U$. Chacun des termes de cette somme finie est continu au voisinage de a_i . La limite est donc

$$\lim_{x \rightarrow a_i} \left(\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} \right) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j}.$$

b) La formule de Taylor-Young affirme que, pour une fonction q de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0,

$$q(t) = q(0) + q'(0)t + \frac{q''(0)}{2}t^2 + o(t^2) \quad (t \rightarrow 0).$$

Plus généralement, pour q de classe $\mathcal{C}^m$ au voisinage de 0, le développement jusqu'à l'ordre m est

$$\sum_{k=0}^m q^{(k)}(0)t^k/k! + o(t^m).$$

Ici, les deux fonctions sont des polynômes, donc les hypothèses sont satisfaites.

Pour $f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t)$, on a $f(0) = 0$, puisque $P(a_i) = 0$. On calcule $f'(t) = tP''(a_i + t)$, puis $f''(t) = P''(a_i + t) + tP^{(3)}(a_i + t)$. Ainsi $f'(0) = 0$ et $f''(0) = P''(a_i)$, d'où

$$f(t) = \frac{P''(a_i)}{2}t^2 + o(t^2).$$

Pour $g(t) = tP(a_i + t)$, on a $g(0) = 0$, $g'(t) = P(a_i + t) + tP'(a_i + t)$ et $g''(t) = 2P'(a_i + t) + tP''(a_i + t)$. Il vient $g'(0) = 0$ et $g''(0) = 2P'(a_i)$, d'où

$$g(t) = P'(a_i)t^2 + o(t^2).$$

Comme a_i est une racine simple du produit P ,

$$P'(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j) \neq 0.$$

Pour $t \neq 0$ assez petit, $P(a_i + t) \neq 0$ et

$$\frac{P'(a_i + t)}{P(a_i + t)} - \frac{1}{t} = \frac{f(t)}{g(t)}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par t^2 , le quotient tend vers $P''(a_i)/(2P'(a_i))$.

Le raisonnement reste valable lorsque $P''(a_i) = 0$: le numérateur divisé par t^2 tend alors vers 0.

c) L'identification des limites obtenues en a) et b) donne

$$\sum_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}.$$

Calculons ensuite le gradient. Les termes avec $j > i$ donnent $2/(x_j - x_i)$, tandis que ceux avec $j < i$ donnent $-2/(x_i - x_j)$. Une expression uniforme est

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = 2x_i - 2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Si a est critique, on a

$$a_i = \sum_{j \neq i} 1/(a_i - a_j).$$

Par l'identité précédente, $2a_i P'(a_i) - P''(a_i) = 0$. Ainsi le polynôme $2XP' - P''$ s'annule en chacun des a_i .

d) Le polynôme P est unitaire de degré n . Le polynôme $2XP' - P''$ est de degré n , avec coefficient dominant $2n$. Il possède les n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$; leur produit de facteurs, qui est P , le divise. Le quotient est donc la constante $2n$:

$$2XP' - P'' = 2nP.$$

Ainsi $P'' - 2XP' + 2nP = 0$. Par l'unicité de I-2° b), $P = H_n$.

Cela donne l'unicité du point critique : ses coordonnées doivent être les racines de H_n placées dans l'ordre strictement croissant, ordre imposé par U .

Il faut aussi vérifier l'existence. Par I-4° c), H_n possède n racines réelles distinctes ; notons-les $a_1 < \dots < a_n$. Le point a ainsi défini appartient à U . Pour $P = H_n$, son équation donne $P''(a_i) = 2a_i P'(a_i)$. Comme $P'(a_i) \neq 0$, la formule de c) entraîne

$$\sum_{j \neq i} 1/(a_i - a_j) = a_i,$$

donc chaque dérivée partielle de F s'annule en a .

Il existe donc exactement un point critique dans U : le vecteur des racines ordonnées de H_n .

3°) Nature du point critique.

a) Soient $x, y \in U$, $t \in [0, 1]$, et $z = tx + (1 - t)y$. Pour $1 \leq i < n$,

$$z_{i+1} - z_i = t(x_{i+1} - x_i) + (1 - t)(y_{i+1} - y_i).$$

Les deux différences sont strictement positives. Les coefficients sont positifs ou nuls et ont somme 1, donc $z_{i+1} - z_i > 0$, y compris lorsque $t = 0$ ou 1. Ainsi $z \in U$; l'ouvert est convexe.

b) Question adaptée au programme actuel : la convexité de $s \mapsto -\ln s$ est demandée sur $]0, +\infty[$, qui est son domaine de définition réel.

La fonction $q(s) = s^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec $q''(s) = 2 > 0$. Elle est donc convexe. Pour $x, y \in U$ et $t \in [0, 1]$, sa convexité donne

$$(tx_i + (1-t)y_i)^2 \leq tx_i^2 + (1-t)y_i^2.$$

C'est exactement l'inégalité de convexité de la fonction $x \mapsto x_i^2$ sur U .

La fonction $\ell(s) = -\ln s$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et $\ell''(s) = 1/s^2 > 0$. Elle est donc convexe sur cet intervalle.

Pour $i < j$, les différences $x_j - x_i$ et $y_j - y_i$ sont strictement positives. Leur combinaison est

$$(tx_j + (1-t)y_j) - (tx_i + (1-t)y_i) = t(x_j - x_i) + (1-t)(y_j - y_i).$$

En lui appliquant la convexité de ℓ , on obtient

$$-\ln(t(x_j - x_i) + (1-t)(y_j - y_i)) \leq -t \ln(x_j - x_i) - (1-t) \ln(y_j - y_i).$$

C'est l'inégalité de convexité de $x \mapsto -\ln(x_j - x_i)$ sur U . En additionnant les inégalités des termes carrés et deux fois celles des logarithmes, tous les coefficients étant positifs, on obtient la convexité de F .

c) Méthode 1 — Restriction à un segment et inégalité de convexité.

Fixons $x \in U$ et posons $z(t) = a + t(x - a)$. Par a), $z(t) \in U$ pour $t \in [0, 1]$. Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U , la dérivation le long d'une droite donne

$$\psi'(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(z(t)).$$

En $t = 0$, $z(0) = a$ et toutes les dérivées partielles en a sont nulles : $\psi'(0) = 0$.

La convexité de F donne $\psi(t) \leq tF(x) + (1-t)F(a)$ pour $t \in [0, 1]$. Comme $\psi(0) = F(a)$, pour $0 < t \leq 1$ cela donne

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \leq F(x) - F(a).$$

Lorsque $t \rightarrow 0^+$, le membre de gauche tend vers $\psi'(0) = 0$. Il en résulte $F(x) - F(a) \geq 0$. Comme x est arbitraire dans U , le point a est un minimum global.

Méthode 2 — Forme quadratique de la hessienne.

La fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert convexe U . En dérivant le gradient obtenu en II-2° c), on trouve

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = 2 + 2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{2}{(x_i - x_j)^2} \quad (i \neq j).$$

Pour toute colonne $v = {}^t(v_1, \dots, v_n)$, le regroupement des termes par paires donne

$${}^t v \nabla^2 F(x) v = 2 \sum_i v_i^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{(v_i - v_j)^2}{(x_i - x_j)^2}.$$

Chaque dénominateur est strictement positif. Pour $v \neq 0$, le premier terme est strictement positif, donc cette forme quadratique est strictement positive. La hessienne est symétrique. Si v est un vecteur propre associé à λ , l'identité ${}^t v \nabla^2 F(x) v = \lambda \|v\|^2$ montre $\lambda > 0$. Toutes ses valeurs propres sont ainsi strictement positives.

Le critère global pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert convexe, dont la hessienne est partout positive, donne un minimum global en tout point critique. Il s'applique donc en a .

On peut préciser la stricte positivité de l'écart par un calcul sur le segment. Pour $v = x - a$, on a $\psi''(t) = {}^t v \nabla^2 F(z(t)) v \geq 2\|v\|^2$. La formule de Taylor avec reste intégral

sur $[0, 1]$ donne

$$F(x) - F(a) = \psi(1) - \psi(0) - \psi'(0) = \int_0^1 (1-t)\psi''(t) dt \geq \|x - a\|^2.$$

Ainsi $F(x) > F(a)$ dès que $x \neq a$. Les dérivées le long du segment sont bien définies et continues jusqu'aux bornes, car ce segment est contenu dans l'ouvert U . Le minimum global est strict et unique. La première méthode suit les questions de convexité ; la seconde donne une minoration quantitative de l'écart au minimum.

4°) Valeur du minimum.

a) Posons

$$A_n = \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right|.$$

Toutes les racines utilisées sont réelles et simples, par la partie I. Les produits sont finis.

Première relation — Récurrence du produit A_n .

Pour chaque racine y_i de H_{n-1} , la relation I-5° a) donne

$$H_n(y_i) = -\frac{n-1}{2} H_{n-2}(y_i).$$

Pour $n \geq 3$, écrivons

$$H_{n-2}(X) = \prod_{k=1}^{n-2} (X - z_k)$$

et

$$H_{n-1}(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (X - y_i).$$

Alors

$$\prod_{i=1}^{n-1} H_{n-2}(y_i) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (y_i - z_k),$$

tandis que

$$\prod_{k=1}^{n-2} H_{n-1}(z_k) = \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{i=1}^{n-1} (z_k - y_i).$$

Les facteurs ne diffèrent que par le signe ; il y en a $(n-1)(n-2)$, un nombre pair. Les deux produits sont donc égaux. En prenant les valeurs absolues, on obtient

$$A_n = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left| \prod_{k=1}^{n-2} H_{n-1}(z_k) \right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} A_{n-1}.$$

Pour initialiser cette relation, $H_1 = X$ a pour unique racine 0, et $H_2(0) = -1/2$. Ainsi $A_2 = 1/2$.

En itérant pour les indices de 3 à n , on obtient

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{2}\right)^k = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k^k}{2^{\sum_{k=1}^{n-1} k}} = \frac{2^2 3^3 \dots (n-1)^{n-1}}{2^{n(n-1)/2}}.$$

Le facteur 1^1 ne change pas le numérateur. Pour $n = 2$, la dernière expression vaut bien $1/2$, grâce à la convention du produit vide.

Deuxième relation — Produit des dérivées aux racines.

La dérivation de

$$H_n(X) = \prod_{j=1}^n (X - a_j)$$

donne, en a_i ,

$$H'_n(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j).$$

Cette valeur est non nulle, car les racines sont distinctes. Son module est donc celui indiqué dans le sujet.

En multipliant sur tous les indices i , chaque paire $i < j$ fournit les deux facteurs $a_i - a_j$ et $a_j - a_i$, dont le produit est $-(a_j - a_i)^2$. En posant $N = n(n-1)/2$, il vient

$$\prod_{i=1}^n H'_n(a_i) = (-1)^N \prod_{i < j} (a_j - a_i)^2 = (-1)^N p_n^2.$$

Puisque $a_1 < \dots < a_n$, chaque différence dans p_n est strictement positive, donc $p_n > 0$. On peut écrire

$$p_n = \sqrt{\left| \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) \right|} = \sqrt{(-1)^N \prod_{i=1}^n H'_n(a_i)}.$$

Troisième relation — Utilisation de $H'_n = nH_{n-1}$.

On a

$$p_n^2 = \prod_i |H'_n(a_i)| = n^n \left| \prod_i H_{n-1}(a_i) \right|.$$

D'autre part,

$$\prod_{i=1}^n H_{n-1}(a_i) = \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^{n-1} (a_i - y_k),$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} H_n(y_k) = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^n (y_k - a_i).$$

Il y a $n(n-1)$ facteurs, un nombre pair, donc les deux produits sont égaux. Ainsi

$$p_n^2 = n^n \left| \prod_{k=1}^{n-1} H_n(y_k) \right| = n^n A_n.$$

En remplaçant A_n , on obtient

$$p_n^2 = \frac{\prod_{k=1}^n k^k}{2^{n(n-1)/2}}, \quad p_n = \frac{\prod_{k=1}^n k^{k/2}}{2^{n(n-1)/4}}.$$

La racine carrée positive est imposée par $p_n > 0$. Tous les points demandés en a) sont ainsi établis.

b) Méthode 1 — Identification des coefficients du polynôme.

En développant le produit des facteurs de H_n , le coefficient de X^{n-1} est

$$-\sum_i a_i$$

et celui de X^{n-2} est

$$\sum_{i < j} a_i a_j.$$

Par I-2° d), ces coefficients valent respectivement 0 et $-n(n-1)/4$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0, \quad \sum_{i < j} a_i a_j = -\frac{n(n-1)}{4}.$$

L'identité

$$\left(\sum_i a_i \right)^2 = \sum_i a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j$$

donne alors

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Méthode 2 — Sommation des équations du point critique.

Les équations obtenues en II-2° c) sont

$$a_i = \sum_{j \neq i} 1/(a_i - a_j).$$

En les sommant, chaque paire $i < j$ donne $1/(a_i - a_j) + 1/(a_j - a_i) = 0$. Donc

$$\sum_i a_i = 0.$$

En multipliant l'équation d'indice i par a_i , puis en sommant, on obtient

$$\sum_i a_i^2 = \sum_{i < j} \left(\frac{a_i}{a_i - a_j} + \frac{a_j}{a_j - a_i} \right).$$

Le terme de chaque paire vaut $(a_i - a_j)/(a_i - a_j) = 1$, car les coordonnées sont distinctes. Il y a $n(n-1)/2$ paires, donc

$$\sum_i a_i^2 = n(n-1)/2.$$

L'identité du carré de la somme donne ensuite

$$\sum_{i < j} a_i a_j = -n(n-1)/4.$$

La première méthode utilise les coefficients de H_n , comme demandé; la seconde retrouve ces sommes à partir des équations du minimum et fournit un contrôle indépendant.

Calcul de la valeur du minimum.

Les différences $a_j - a_i$ étant strictement positives, les propriétés du logarithme sur les produits finis donnent

$$F(a) = \sum_i a_i^2 - 2 \sum_{i < j} \ln(a_j - a_i) = \frac{n(n-1)}{2} - 2 \ln p_n.$$

La formule de a) donne

$$2 \ln p_n = \sum_{k=1}^n k \ln k - \frac{n(n-1)}{2} \ln 2.$$

Par conséquent, le minimum global de F sur U est

$$F(a) = \frac{n(n-1)}{2}(1 + \ln 2) - \sum_{k=1}^n k \ln k.$$

Pour $n = 2$, cela donne $F(a) = 1 + \ln 2 - (1 \ln 1 + 2 \ln 2) = 1 - \ln 2$, en accord avec II-1°.

La formule de p_n donne aussi $p_2 = \sqrt{2}$, égal à l'écart entre les deux coordonnées du point critique.

Relevé des adaptations

- I-2° d) : définition de H_3 dans $\mathbb{R}_3[X]$ lorsque $n = 2$. Le sujet suppose seulement $n \geq 2$, alors qu'un polynôme de degré 3 ne peut appartenir à $\mathbb{R}_2[X]$.
- II-3° b) : rectification du domaine de convexité de $s \mapsto -\ln s$ en $]0, +\infty[$, au lieu de $\mathbb{R}$.
La fonction n'est définie dans le cadre réel que pour $s > 0$.