



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2001

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite S de la suite (S_n) . Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S .

Partie I

On considère, pour tout nombre entier $p \geq 0$, les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) dt, \quad J_p = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p}(t) dt.$$

1°) Convergence de la suite (J_p/I_p)

1°) a) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t).$$

1°) b) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1}).$$

1°) c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} ; on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties.

1°) d) Dédurre des résultats précédents que J_p/I_p tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

2°) Convergence et limite de la suite (S_n)

2°) a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p , pour $p \geq 1$.

2°) b) En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

2°) c) Calculer J_0 et I_0 , puis déterminer la limite S de la suite (S_n) .

Partie II

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.

On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par $f_0(x) = 1/x$ et $f_k(x) = 1/[x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)]$ pour $k \geq 1$.
- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

1°) Sommation de séries télescopiques

1°) a) Établir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

1°) b) Établir, pour toute fonction f appartenant à E , la convergence de la série

$$\sum_{p \geq 1} (\Delta f)(p)$$

et calculer, pour tout nombre entier naturel n , les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p), \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

1°) c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.

1°) d) Établir, pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$, la convergence de la série

$$\sum_{p \geq 1} f_k(p)$$

et vérifier, pour tout nombre entier naturel n , que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}.$$

2°) Accélération de la convergence de (S_n)

2°) a) Établir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q (k-1)! f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

2°) b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1) \cdots (n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2) \cdots (n+q)}.$$

2°) c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S'_n) de nombres rationnels telle que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2) \cdots (n+q)}.$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

2°) d) Écrire en Python un algorithme calculant et affichant S'_n pour $q = 2$ lorsque $n \geq 1$ est donné.

Partie III

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement limité de S_n suivant les puissances de $1/n$.

1°) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

Établir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible.

2°) Étude des polynômes de Bernoulli

2°) a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par :

$$U_0(x) = 1, \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p} x^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

- Préciser U_1, U_2, U_3, U_4 .
- Montrer que $U'_n = U_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$.

2°) b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par :

$$V_0 = 1, \quad V'_n = V_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1, \quad V_n(0) = V_n(1) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

- Établir que $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante :

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0) x^p}{p!}.$$

- Établir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- Établir enfin que $V_n = U_n$ pour tout nombre entier naturel n .

2°) c) En déduire l'égalité $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel n .

Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

3°) Accélération de la convergence de (S_n)

3°) a) Établir, pour $p \geq 1$, la relation suivante, d'abord en supposant $q = 1$, puis $q \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) \\ = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}} dx.$$

3°) b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}},$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \mapsto |U_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0, 1]$.

3°) c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n'') de nombres rationnels telle que :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

3°) d) Écrire en Python un algorithme calculant et affichant S_n'' pour $q = 2$ lorsque $n \geq 1$ est donné.