



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2001

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I

Les fonctions intégrées sont continues sur $[0, \pi/2]$, donc les intégrales I_p et J_p existent pour chaque entier $p \geq 0$. De plus, $\cos^{2p}(t)$ est positive au voisinage de 0, donc $I_p > 0$. Tous les quotients J_p/I_p utilisés ci-dessous sont ainsi définis.

1°) a)

Méthode 1 — Concavité et corde

Sur $[0, \pi/2]$, la fonction sinus est de classe C^2 et sa dérivée seconde vaut $-\sin(t) \leq 0$; elle est donc concave. Son graphe est au-dessus de la corde reliant $(0, 0)$ à $(\pi/2, 1)$. Plus explicitement, pour $t \in [0, \pi/2]$, on écrit $t = (1 - 2t/\pi)0 + (2t/\pi)(\pi/2)$, avec des coefficients positifs de somme 1. La concavité donne

$$\sin(t) \geq \left(1 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin(0) + \frac{2t}{\pi} \sin(\pi/2) = \frac{2t}{\pi}.$$

Donc $t \leq (\pi/2) \sin(t)$.

Méthode 2 — Monotonie d'un quotient

Pour $t > 0$, posons $g(t) = \sin(t)/t$. Sa dérivée vaut $g'(t) = (t \cos(t) - \sin(t))/t^2$. La fonction $h(t) = t \cos(t) - \sin(t)$ vérifie $h(0) = 0$ et $h'(t) = -t \sin(t) \leq 0$ sur le segment. Ainsi $h(t) \leq 0$ et g est décroissante sur $]0, \pi/2]$.

Par conséquent, $g(t) \geq g(\pi/2) = 2/\pi$, d'où la même inégalité pour $t > 0$. Elle est aussi vraie en $t = 0$, où les deux membres sont nuls.

La concavité fournit directement une minoration affine ; le quotient permet de comparer le sinus à une fonction linéaire par une étude de variations.

1°) b)

Sur $[0, \pi/2]$, les deux membres de l'inégalité de a) sont positifs ou nuls. On peut les élever au carré puis multiplier par $\cos^{2p}(t) \geq 0$:

$$0 \leq t^2 \cos^{2p}(t) \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \cos^{2p}(t).$$

L'identité $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ et la croissance de l'intégrale donnent

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos^{2p}(t) - \cos^{2p+2}(t)) dt = \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1}).$$

1°) c)

On suit l'indication en écrivant $I_{p+1} = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{2p+1}(t) dt$. Les fonctions sont de classe C^1 sur le segment ; l'intégration par parties donne

$$I_{p+1} = [\sin(t) \cos^{2p+1}(t)]_0^{\pi/2} + (2p+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^{2p}(t) dt.$$

Le terme aux bornes est nul : en 0, le sinus est nul ; en $\pi/2$, le facteur $\cos^{2p+1}$ est nul puisque $2p+1 \geq 1$. Ainsi

$$I_{p+1} = (2p+1)(I_p - I_{p+1}).$$

En regroupant, on obtient $I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p$ pour tout $p \geq 0$.

1°) d)

Comme $I_p > 0$, b) et c) donnent

$$0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{I_{p+1}}{I_p} \right) = \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{2p+1}{2p+2} \right) = \frac{\pi^2}{8(p+1)}.$$

Le majorant tend vers 0 ; par encadrement, $J_p/I_p \rightarrow 0$.

2°) a)

Fixons $p \geq 1$ et posons $F(t) = \cos^{2p}(t)$. Cette fonction est de classe C^2 sur le segment.

Une première intégration par parties, avec une primitive t de 1, donne

$$I_p = [tF(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} tF'(t) dt = - \int_0^{\pi/2} tF'(t) dt,$$

car $F(\pi/2) = 0$. Une seconde intégration par parties, avec une primitive $t^2/2$ de t , donne

$$I_p = - \left[\frac{t^2}{2} F'(t) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} t^2 F''(t) dt.$$

Or $F'(t) = -2p \sin(t) \cos^{2p-1}(t)$; puisque $2p-1 \geq 1$, $F'(\pi/2) = 0$, et le facteur t^2 annule l'autre borne. De plus,

$$F''(t) = -2p \cos^{2p}(t) + 2p(2p-1) \sin^2(t) \cos^{2p-2}(t)$$

$$= 2p(2p-1) \cos^{2p-2}(t) - 4p^2 \cos^{2p}(t).$$

En reportant dans l'intégrale, on obtient

$$I_p = p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p.$$

Cette formule est valable aussi pour $p = 1$, où $\cos^{2p-2} = 1$.

2°) b)

La relation de 1°) c), appliquée à l'indice $p-1$, donne $I_p = (2p-1)I_{p-1}/(2p)$. En divisant l'égalité de a) par $2p^2 I_p > 0$, on obtient

$$\frac{1}{2p^2} = \frac{2p-1}{2p} \frac{J_{p-1}}{I_p} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}.$$

C'est l'identité demandée.

2°) c)

Les primitives usuelles donnent

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}, \quad J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 \, dt = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{24}.$$

En sommant l'identité de b) pour $1 \leq p \leq n$, les termes intermédiaires s'annulent :

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{J_n}{I_n}.$$

Donc $S_n = \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{J_n}{I_n}$. La limite de 1°) d) donne

$$S_n \longrightarrow S = \frac{\pi^2}{6}.$$

En particulier, la série

$$\sum_{p \geq 1} 1/p^2$$

converge et sa somme vaut $\pi^2/6$. On dispose aussi de l'encadrement $0 \leq S - S_n \leq \pi^2/[4(n+1)]$ fourni par 1°) d).

Partie II

Chaque fonction f_k est continue sur $]0, +\infty[$: son dénominateur y est strictement positif. Ce dénominateur est un produit de $k+1$ facteurs qui tendent vers $+\infty$, donc $f_k(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$. Les fonctions f_k appartiennent bien à E .

1°) a)

Pour $f \in E$, la fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Comme $f(x+1) \rightarrow 0$ et $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, sa limite est 0. Ainsi $\Delta f \in E$.

Pour $f, g \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la définition donne $\Delta(af + bg) = a\Delta f + b\Delta g$. Donc Δ est un endomorphisme de E .

1°) b)

Pour $N \geq 1$, la somme partielle est télescopique :

$$\sum_{p=1}^N (\Delta f)(p) = \sum_{p=1}^N (f(p+1) - f(p)) = f(N+1) - f(1).$$

Puisque $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $f(N+1) \rightarrow 0$. La série converge donc et sa somme est $-f(1)$.

Pour un entier $n \geq 0$ et $N \geq n+1$, le même calcul donne

$$\sum_{p=n+1}^N (\Delta f)(p) = f(N+1) - f(n+1).$$

En passant à la limite,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p) = -f(n+1).$$

Aucun caractère absolument convergent n'est nécessaire pour ces passages à la limite dans les sommes partielles.

1°) c)

Pour $k \geq 1$ et $x > 0$, la mise au même dénominateur donne

$$\begin{aligned} (\Delta f_{k-1})(x) &= \frac{1}{(x+1) \cdots (x+k)} - \frac{1}{x \cdots (x+k-1)} \\ &= \frac{x - (x+k)}{x(x+1) \cdots (x+k)} = -kf_k(x). \end{aligned}$$

Donc $\Delta f_{k-1} = -kf_k$, y compris pour $k = 1$ avec $f_0(x) = 1/x$.

1°) d)

On a $f_k = -(1/k)\Delta f_{k-1}$ et $f_{k-1} \in E$. D'après b), la série

$$\sum_{p \geq 1} f_k(p)$$

converge et

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} f_{k-1}(n+1) = \frac{1}{k(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}.$$

Le cas $n = 0$ donne en particulier sa somme totale $1/(k k!)$. Comme les termes $f_k(p)$ sont positifs, la convergence est aussi absolue.

2°) a)

Méthode 1 — Récurrence sur le nombre de termes

Pour $q = 1$,

$$\frac{1}{p^2} - f_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p} f_1(p).$$

Supposons l'égalité établie au rang $q \geq 1$. Comme $f_q(p) = (p+q+1)f_{q+1}(p)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1} (k-1)! f_k(p) &= \frac{q!}{p} f_q(p) - q! f_{q+1}(p) \\ &= q! \left(\frac{p+q+1}{p} - 1 \right) f_{q+1}(p) = \frac{(q+1)!}{p} f_{q+1}(p). \end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour tous $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

Méthode 2 — Télescopage suivant l'indice k

Fixons $p \geq 1$ et posons $R_k = (k!/p)f_k(p)$ pour $k \geq 0$. En particulier, $R_0 = f_0(p)/p = 1/p^2$. Pour $k \geq 1$, $f_{k-1}(p) = (p+k)f_k(p)$, donc

$$R_{k-1} - R_k = \frac{(k-1)!}{p}((p+k) - k)f_k(p) = (k-1)!f_k(p).$$

La somme de ces identités de $k = 1$ à $k = q$ donne

$$\sum_{k=1}^q (k-1)!f_k(p) = R_0 - R_q,$$

soit exactement la relation demandée.

La récurrence contrôle l'ajout d'un terme ; le télescopage explique la forme du reste.

2°) b)

Sommons d'abord l'identité de a) pour $p = n+1, \dots, N$. Les sommes en k sont finies ; chaque série

$$\sum f_k(p)$$

converge par 1°) d), et

$$\sum 1/p^2$$

converge par la partie I. On peut donc passer à la limite $N \rightarrow +\infty$ dans cette égalité, obtenant

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1) \cdots (n+k)} = q! \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{f_q(p)}{p}.$$

La série du membre de droite converge, par exemple parce que

$0 \leq f_q(p)/p \leq f_q(p)/(n+1)$ et que

$$\sum f_q(p)$$

converge. Ses termes sont positifs. De plus, $p \geq n+1$ donne

$$0 \leq q! \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{f_q(p)}{p} \leq \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_q(p)$$

$$= \frac{q!}{n+1} \frac{1}{q(n+1)(n+2) \cdots (n+q)} = \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2) \cdots (n+q)}.$$

On obtient l'encadrement annoncé. Pour $q=1$, le produit allant de $n+2$ à $n+q$ est vide et le majorant est $1/(n+1)^2$.

2°) c)

Pour $q \geq 1$ fixé, définissons

$$S'_n = S_n + \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}.$$

Tous les termes sont rationnels, donc $S'_n \in \mathbb{Q}$. Comme

$$S - S_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} 1/p^2$$

et $S = \pi^2/6$, b) donne

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2) \cdots (n+q)}.$$

Le majorant tend vers 0 pour q fixé; ainsi $S'_n \rightarrow S$. Il est d'ordre $1/n^{q+1}$, ce qui améliore la borne d'ordre $1/n$ sur la suite initiale.

Lorsque $q = 2$,

$$S'_n = S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

2°) d)

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Le programme suivant reçoit un entier $n \geq 1$, additionne les n termes de S_n , ajoute les deux corrections obtenues en c), puis affiche et renvoie le résultat.

Python

```
def somme_acceleree_1(n):
    s = 0.0
    for p in range(1, n + 1):
        s = s + 1.0 / (p * p)
    s_prime = s + 1.0 / (n + 1)
    s_prime = s_prime + 1.0 / (2 * (n + 1) * (n + 2))
    print(s_prime)
    return s_prime

somme_acceleree_1(10)
```

La borne supérieure de $\text{range}(1, n + 1)$ est exclue : les indices parcourus sont exactement $1, \dots, n$. Aucun import n'est nécessaire. Le code a été exécuté, notamment pour $n = 1, 2, 10$; pour $n = 10$, il affiche environ 1.6444647008635105. Il calcule une approximation en arithmétique flottante du nombre rationnel S'_n ; la preuve et la borne d'erreur de c) concernent sa valeur mathématique exacte.

Partie III

1°)

Pour $n \geq 2$, le terme de la somme correspondant à $p = 1$ est u_{n-1} . La relation demandée est donc équivalente à

$$u_{n-1} = - \sum_{p=2}^n \frac{u_{n-p}}{p!}.$$

Ou, en posant $m = n - 1 \geq 1$,

$$u_m = - \sum_{p=2}^{m+1} \frac{u_{m+1-p}}{p!}.$$

Le membre de droite fait intervenir seulement $u_0, \dots, u_{m-1}$. Avec $u_0 = 1$, cette formule définit par récurrence une unique suite; elle garantit aussi les relations initiales. Chaque u_m est rationnel, par récurrence, puisque les précédents le sont et que les factorielles sont des entiers non nuls.

Calculons les premiers termes :

$$u_1 = -\frac{u_0}{2!} = -\frac{1}{2},$$

$$u_2 = -\left(\frac{u_1}{2!} + \frac{u_0}{3!}\right) = -\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12},$$

$$u_3 = -\left(\frac{u_2}{2!} + \frac{u_1}{3!} + \frac{u_0}{4!}\right) = -\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = 0,$$

$$u_4 = -\left(\frac{u_3}{2!} + \frac{u_2}{3!} + \frac{u_1}{4!} + \frac{u_0}{5!}\right) = -\left(\frac{1}{72} - \frac{1}{48} + \frac{1}{120}\right) = -\frac{1}{720}.$$

Les fractions obtenues sont irréductibles ; la valeur nulle peut s'écrire 0/1.

2°) a)

Les valeurs de 1°) et la définition de U_n donnent

$$U_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$U_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12},$$

$$U_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12},$$

$$U_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}.$$

Pour $n \geq 1$, la dérivation de la somme finie donne

$$U'_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p} x^{p-1}}{(p-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_{n-1-j} x^j}{j!} = U_{n-1}(x).$$

Pour $n \geq 2$, on a $U_n(0) = u_n$ et

$$U_n(1) - U_n(0) = \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0$$

par la relation de 1°). Donc $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$. Chaque U_n est de degré n , de coefficient dominant $1/n!$.

2°) b)

En appliquant successivement $V'_n = V_{n-1}$, on obtient, pour $0 \leq p \leq n$,

$$V_n^{(p)} = V_{n-p}, \quad V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0).$$

En particulier, $V_n^{(n)} = V_0 = 1$ et $V_n^{(n+1)} = 0$, donc V_n est de degré n . La formule exacte de Taylor pour un polynôme de degré n donne

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{V_n^{(p)}(0)x^p}{p!} = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0)x^p}{p!}.$$

Pour $n \geq 2$, l'égalité des valeurs en 0 et 1 conduit donc à

$$0 = V_n(1) - V_n(0) = \sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!}.$$

Il reste à montrer que ces propriétés caractérisent toute la suite.

Méthode 1 — Unicité de la suite des valeurs en 0

Posons $v_n = V_n(0)$. On a $v_0 = 1$, et la dernière relation signifie

$$\sum_{p=1}^n v_{n-p}/p! = 0$$

pour $n \geq 2$. Par l'unicité démontrée en 1°), $v_n = u_n$ pour tous les indices. La formule exacte de Taylor précédente donne alors

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p} x^p}{p!} = U_n(x).$$

Méthode 2 — Dérivation et moyenne nulle

Pour tout $n \geq 1$, le théorème fondamental du calcul intégral et les conditions aux bornes de l'indice $n + 1 \geq 2$ donnent

$$\int_0^1 V_n(x) dx = V_{n+1}(1) - V_{n+1}(0) = 0.$$

De même, $\int_0^1 U_n(x) dx = 0$. On raisonne par récurrence : $V_0 = U_0 = 1$. Si $V_{n-1} = U_{n-1}$, alors $(V_n - U_n)' = 0$, donc $V_n - U_n$ est une constante c . Son intégrale sur $[0, 1]$ est c , mais elle vaut aussi 0 par les égalités précédentes. Ainsi $c = 0$ et $V_n = U_n$.

Cette preuve détermine les constantes d'intégration par la moyenne nulle, plutôt que par la récurrence sur les valeurs en 0. L'existence d'une suite satisfaisant les conditions est assurée par les U_n construits en a), et son unicité est maintenant établie.

2°) c)

Définissons $W_n(x) = (-1)^n U_n(1 - x)$. On a $W_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, la dérivation donne

$$W'_n(x) = (-1)^{n+1} U_{n-1}(1 - x) = (-1)^{n-1} U_{n-1}(1 - x) = W_{n-1}(x).$$

Pour $n \geq 2$, $W_n(0) = (-1)^n U_n(1)$ et $W_n(1) = (-1)^n U_n(0)$, donc ces valeurs sont égales par a). La suite (W_n) satisfait les conditions de b), qui la caractérisent. Ainsi $W_n = U_n$, soit

$$U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x).$$

Pour un indice impair $n = 2p + 1 \geq 3$, on a à la fois $U_n(0) = -U_n(1)$ par cette symétrie et $U_n(0) = U_n(1)$ par a). Donc $U_n(0) = U_n(1) = 0$. Comme $U_n(0) = u_n$, on obtient $u_{2p+1} = 0$ pour $p \geq 1$.

On retiendra pour la suite que tous les polynômes d'indice impair au moins 3 s'annulent aux deux bornes. L'indice 1 a les valeurs particulières $U_1(0) = -1/2$ et $U_1(1) = 1/2$.

3°) a)

Fixons $p \geq 1$. Les fonctions intégrées sont régulières sur $[0, 1]$, car $p + x \geq 1$. Toutes les intégrations par parties ci-dessous se font sur ce segment.

Cas $q = 1$

Posons $g(x) = (p + x)^{-2}$. Comme $U_1' = 1$, une première intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx &= [U_1(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 U_1(x)g'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) - \int_0^1 U_1(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

En utilisant $U_2' = U_1$ et $U_2(0) = U_2(1) = u_2$, une seconde intégration par parties donne

$$\int_0^1 U_1 g' = [U_2 g']_0^1 - \int_0^1 U_2 g'' = u_2(g'(1) - g'(0)) - \int_0^1 U_2 g''.$$

Or $g'(x) = -2(p + x)^{-3}$, donc $g'(1) - g'(0) = 2(1/p^3 - 1/(p+1)^3)$. Enfin, $U_3' = U_2$ et $U_3(0) = U_3(1) = 0$ donnent

$$\int_0^1 U_2 g'' = [U_3 g'']_0^1 - \int_0^1 U_3 g''' = - \int_0^1 U_3 g''' = 24 \int_0^1 \frac{U_3(x)}{(p+x)^5} dx,$$

car $g'''(x) = -24(p+x)^{-5}$. En regroupant ces égalités, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{(p+x)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + 2! u_2 \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{(p+1)^3} \right) = 4! \int_0^1 \frac{U_3(x)}{(p+x)^5} dx.$$

C'est la formule demandée pour $q = 1$.

Passage de q à $q + 1$

Supposons la formule établie pour un entier $q \geq 1$ et posons $s = 2q + 3$. Dans le reste, utilisons $U'_{2q+2} = U_{2q+1}$ et $U_{2q+2}(0) = U_{2q+2}(1) = u_{2q+2}$:

$$\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(p+x)^s} dx = u_{2q+2} \left(\frac{1}{(p+1)^s} - \frac{1}{p^s} \right) + s \int_0^1 \frac{U_{2q+2}(x)}{(p+x)^{s+1}} dx.$$

Dans la dernière intégrale, prenons pour primitive de U_{2q+2} le polynôme U_{2q+3} . Ses valeurs aux bornes sont nulles, donc

$$\int_0^1 \frac{U_{2q+2}(x)}{(p+x)^{s+1}} dx = (s+1) \int_0^1 \frac{U_{2q+3}(x)}{(p+x)^{s+2}} dx.$$

Après multiplication par $(2q+2)!$, le reste du rang q s'écrit ainsi

$$-(2q+2)! u_{2q+2} \left(\frac{1}{p^{2q+3}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+3}} \right) + (2q+4)! \int_0^1 \frac{U_{2q+3}(x)}{(p+x)^{2q+5}} dx.$$

En transférant le premier terme au membre de gauche, on ajoute exactement le terme $k = q + 1$ à la somme déjà présente. On obtient la formule au rang $q + 1$. La récurrence établit donc, pour tous $p \geq 1$ et $q \geq 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(p+x)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right)$$

$$= (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(p+x)^{2q+3}} dx.$$

3°) b)

La fonction $x \mapsto |U_{2q+1}(x)|$ est continue sur le segment $[0, 1]$; elle y admet un maximum fini M_{2q+1} . On commence par sommer l'identité de a) pour $p = n, \dots, N$, avec $N \geq n$. L'indice initial est n afin d'obtenir une intégrale télescopique de valeur limite $1/n$.

Les calculs des trois termes du membre de gauche sont :

$$\sum_{p=n}^N \int_0^1 \frac{dx}{(p+x)^2} = \sum_{p=n}^N \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1},$$

$$\frac{1}{2} \sum_{p=n}^N \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) = \frac{1}{2n^2} + \sum_{p=n+1}^N \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2(N+1)^2},$$

$$\sum_{p=n}^N \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) = \frac{1}{n^{2k+1}} - \frac{1}{(N+1)^{2k+1}}.$$

Pour justifier le passage à la limite du membre de droite, notons $s = 2q + 3$. Pour chaque p ,

$$\left| \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(p+x)^s} dx \right| \leq M_{2q+1} \int_0^1 \frac{dx}{(p+x)^s}.$$

La primitive de y^{-s} , avec $s > 1$, donne

$$\int_0^1 \frac{dx}{(p+x)^s} = \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{p^{s-1}} - \frac{1}{(p+1)^{s-1}} \right).$$

La somme de ces intégrales pour $p = n, \dots, N$ est donc $\frac{1}{s-1}(n^{-(s-1)} - (N+1)^{-(s-1)})$. Elle converge lorsque $N \rightarrow +\infty$, et vaut à la limite $1/[(s-1)n^{s-1}]$. Par comparaison, la série des intégrales contenant U_{2q+1} converge absolument. Il s'agit d'un passage à la limite dans des sommes finies, avec une majoration explicite, sans échange automatique entre série et intégrale.

On peut donc passer à la limite dans l'identité sommée. En posant

$$T_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} 1/p^2,$$

on obtient

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - T_n + \sum_{k=1}^q \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}} = (2q+2)! \sum_{p=n}^{+\infty} \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(p+x)^{2q+3}} dx.$$

En prenant les valeurs absolues et en utilisant le calcul de la somme majorante,

$$\left| T_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq (2q+2)! \frac{M_{2q+1}}{(2q+2)n^{2q+2}}$$

$$= \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

C'est l'inégalité recherchée; le signe du reste ne joue aucun rôle puisque l'on en majore la valeur absolue.

3°) c)

Pour $q \geq 1$ fixé, définissons

$$S_n'' = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^q \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}}.$$

Les u_{2k} sont rationnels par 1°), donc S_n'' est rationnel. Comme $S - S_n = T_n$ et $S = \pi^2/6$,

b) donne

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Cette borne tend vers 0, donc $S_n'' \rightarrow S$; pour q fixé, l'erreur est majorée par une constante fois $1/n^{2q+2}$.

Cas $q = 2$

Les coefficients connus donnent $2!u_2 = 1/6$ et $4!u_4 = -1/30$. Ainsi

$$S_n'' = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5},$$

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{120M_5}{n^6}.$$

On peut rendre la constante entièrement explicite. Par 2°) c), $u_5 = 0$, donc

$$U_5(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720} = \frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1)}{720}.$$

Sa dérivée est $U_4(x) = x^2(1-x)^2/24 - 1/720$. Sur $[0, 1]$, $x(1-x) \geq 0$, donc l'équation $U_5'(x) = 0$ équivaut à

$$x(1-x) = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Posons $d = \sqrt{1 - 4/\sqrt{30}}$, qui est réel strictement positif car $\sqrt{30} > 4$, puis $a = (1-d)/2$. Les deux points critiques sont a et $1-a$, avec $0 < a < 1/2 < 1-a < 1$. Le signe de U_4 est négatif sur $[0, a[$, positif sur $]a, 1-a[$ et négatif sur $]1-a, 1]$. En outre, $U_5(0) = U_5(1) = 0$ et $U_5(1-a) = -U_5(a)$ par la symétrie de 2°) c). Le maximum de $|U_5|$ est donc $-U_5(a)$.

Pour évaluer cette valeur, on a $a(a-1) = -1/\sqrt{30}$, $2a-1 = -d$ et $3a^2 - 3a - 1 = -1 - 3/\sqrt{30}$. La factorisation précédente donne

$$M_5 = -U_5(a) = \frac{d}{720} \left(\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{1}{10} \right) = \frac{\sqrt{30}+3}{21600} \sqrt{1 - \frac{4}{\sqrt{30}}}.$$

Finalement, pour $q = 2$, on dispose de la borne explicite

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{\kappa}{n^6}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{30}+3}{180} \sqrt{1 - \frac{4}{\sqrt{30}}} \simeq 0.02445819087.$$

3°) d)

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Le programme calcule d'abord S_n , puis ajoute les quatre termes correctifs déterminés pour $q = 2$.

Python

```
def somme_acceleree_2(n):
    s = 0.0
    for p in range(1, n + 1):
        s = s + 1.0 / (p * p)
    s_seconde = s + 1.0 / n - 1.0 / (2 * n ** 2)
    s_seconde = s_seconde + 1.0 / (6 * n ** 3)
```

```
s_seconde = s_seconde - 1.0 / (30 * n ** 5)
print(s_seconde)
return s_seconde

somme_acceleree_2(10)
```

L'entrée est un entier $n \geq 1$, ce qui garantit que tous les dénominateurs sont non nuls. La boucle parcourt exactement les indices 1 à n . Aucun import n'est nécessaire. Ce code a été exécuté, notamment pour $n = 1, 2, 10$; pour $n = 10$, il affiche environ 1.644934064499874. Les sorties numériques sont des approximations flottantes; elles illustrent la formule et ne remplacent pas la preuve de la borne d'erreur.

Relevé des adaptations

- II.2°) d) : Code adapté en Python; la demande de programmation est convertie en une fonction qui calcule, affiche et renvoie S'_n pour $q = 2$.
- III.3°) d) : Code adapté en Python; la demande de programmation est convertie en une fonction qui calcule, affiche et renvoie S''_n pour $q = 2$.