



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2000

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans l'ensemble du problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On note $\mathcal{P}_n$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[x]$ formé des fonctions-polynômes unitaires et de degré n , autrement dit des fonctions-polynômes de degré n dont le coefficient de x^n est égal à 1.

L'objectif du problème est de déterminer des fonctions-polynômes P appartenant à $\mathcal{P}_n$ et réalisant le minimum sur $\mathcal{P}_n$ de chacune des trois expressions suivantes :

$$N_1(P) = \int_{-1}^1 |P(x)| dx, \quad N_2(P) = \sqrt{\int_{-1}^1 P(x)^2 dx}, \quad N_\infty(P) = \sup\{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

Les trois parties du problème sont consacrées à la résolution des trois problèmes ainsi définis. La partie I est indépendante des deux suivantes.

PARTIE I : Minimisation de $N_2(P)$ pour P décrivant $\mathcal{P}_n$

On associe à tout couple (P, Q) de fonctions-polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ le nombre réel suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

- 1°) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- 2°) On considère la fonction f associant à tout n -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ de nombres réels l'expression suivante, qui représente le carré de la distance entre les deux fonctions-polynômes $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto x_{n-1}t^{n-1} + \dots + x_1t + x_0$ de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 \left(t^n - \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \right)^2 dt.$$

- a) Citer avec précision le théorème permettant d'affirmer l'existence et l'unicité d'un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ réalisant le minimum, désormais noté m_n , de l'expression $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ lorsque $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ décrit $\mathbb{R}^n$, et montrer que ces n nombres réels vérifient les n relations suivantes :

$$\int_0^1 \left(t^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j \right) t^k dt = 0, \quad 0 \leq k < n.$$

On explicitera ces n relations en calculant les n intégrales figurant ci-dessus pour $0 \leq k < n$.

- b) On pose, pour tout nombre réel x distinct de $-1, -2, \dots, -n, -n-1$:

$$F(x) = \frac{1}{x+n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{x+j+1}.$$

Établir l'existence d'un nombre réel a tel que l'on ait, pour x distinct de $-1, -2, \dots, -n, -n-1$:

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1) \cdots (x+2)(x+1)F(x) = ax(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1).$$

Déterminer la valeur de a en faisant tendre x vers $-n-1$ dans chacun des deux membres de l'égalité précédente ; on exprimera a en fonction de $n!$ et de $(2n)!$.

- c) Établir l'égalité suivante :

$$m_n = f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \int_0^1 \left(t^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j \right) t^n dt.$$

d) Établir enfin que $m_n = F(n)$ et en déduire que :

$$m_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

3°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

a) Pour toute fonction-polynôme P appartenant à $\mathcal{P}_n$, effectuer le changement de variable défini par $x = 2t - 1$ dans l'intégrale figurant dans l'expression de $N_2(P)$ et en déduire que :

$$N_2(P) \geq 2^n \sqrt{2m_n}.$$

b) En déduire le minimum de $N_2(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

PARTIE II : Minimisation de $N_\infty(P)$ pour P décrivant $\mathcal{P}_n$

On considère la suite des fonctions (T_k) définies par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, puis, pour $k \geq 1$, par la relation de récurrence :

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Par ailleurs, on rappelle la formule de trigonométrie suivante :

$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions T_k .

- a) Montrer que T_k est une fonction-polynôme de degré k , de coefficient dominant 2^{k-1} pour $k \geq 1$.
- b) On considère un nombre réel θ . Exprimer en fonction de θ les nombres $T_1(\cos \theta)$, $T_2(\cos \theta)$, $T_3(\cos \theta)$ et montrer que $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ pour tout nombre entier naturel k .
- 2°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

- a) On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme P appartenant à $\mathcal{P}_n$ telle que :

$$N_\infty(P) = \sup\{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- Préciser, pour $0 \leq k \leq n$, le signe de $\frac{1}{2^{n-1}}T_n\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) - P\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right)$.
 - En déduire que $T_n/2^{n-1} - P$ admet au moins n racines réelles, puis établir une contradiction en examinant le degré de $T_n/2^{n-1} - P$.
- b) En déduire le minimum de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

PARTIE III : Minimisation de $N_1(P)$ pour P décrivant $\mathcal{P}_n$

On considère la suite des fonctions (U_k) définies par $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ et, pour $k \geq 1$, par :

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x).$$

- 1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions U_k .

- a) Montrer que U_k est une fonction-polynôme, préciser son degré et son coefficient dominant. Établir de plus que $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$.
- b) Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k \geq 0}$ vérifiant, pour un réel θ fixé et pour tout $k \geq 1$, la relation de récurrence :

$$u_{k+1} - 2 \cos \theta u_k + u_{k-1} = 0.$$

En déduire, pour tout nombre réel θ appartenant à $]0, \pi[$, l'expression de $U_k(\cos \theta)$ en fonction de $\sin((k+1)\theta)$ et de $\sin \theta$, puis déterminer $U_k(1)$ et $U_k(-1)$ à l'aide d'un passage à la limite.

- c) En dérivant la relation $T_{k+1}(\cos \theta) = \cos((k+1)\theta)$, exprimer $(k+1)U_k$ en fonction de la dérivée de T_{k+1} .

2°) Pour tout nombre réel x , on note $\operatorname{sgn}(x)$ la fonction « signe de x », définie par :

$$\operatorname{sgn}(x) = 1 \text{ si } x > 0, \quad \operatorname{sgn}(x) = 0 \text{ si } x = 0, \quad \operatorname{sgn}(x) = -1 \text{ si } x < 0.$$

On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme P appartenant à $\mathcal{P}_n$ telle que :

$$(*) \quad \int_{-1}^1 x^k \operatorname{sgn}(P(x)) dx = 0, \quad 0 \leq k < n.$$

- a) Prouver, pour toute fonction-polynôme Q appartenant à $\mathcal{P}_n$, l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^1 (Q(x) - P(x)) \operatorname{sgn}(P(x)) dx = 0.$$

- b)** En déduire que $N_1(P) \leq N_1(Q)$.
- c)** Calculer l'intégrale $N_1(U_n)$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(\theta/(n+1))$, où θ décrit le segment $[0, (n+1)\pi]$. En admettant que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie l'hypothèse (*), en déduire le minimum de $N_1(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.
- 3°)** On démontre pour terminer que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse faite à la question précédente. À cet effet, on introduit les nombres réels suivants :

$$c_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}, \quad 0 \leq j \leq n+1.$$

On notera que ceux-ci vérifient $-1 = c_{n+1} < c_n < \dots < c_2 < c_1 < c_0 = 1$.

- a)** Déterminer la valeur de $U_n(c_j)$ pour $1 \leq j \leq n$ et déterminer le signe de $U_n(x)$ sur chacun des $n+1$ intervalles $]c_{n+1}, c_n[, \dots,]c_2, c_1[,]c_1, c_0[$.

On considère alors l'intégrale suivante, où k désigne un nombre entier tel que $0 \leq k < n$:

$$I_k = \int_{-1}^1 x^k \operatorname{sgn}(U_n(x)) dx.$$

- b)** On suppose $n+k$ impair. Déterminer la valeur de I_k en étudiant la parité de la fonction figurant sous le signe intégral.
- c)** On suppose $n+k$ pair. Prouver l'égalité suivante :

$$I_k = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j^{k+1}.$$

Pour démontrer que cette somme est nulle, on pose $N = n+1$ et $m = k+1$. On pourra procéder ainsi :

- En utilisant $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$, montrer par récurrence que la fonction $t \mapsto \cos^m t$ est une combinaison linéaire réelle des fonctions $t \mapsto \cos(\ell t)$, où $0 \leq \ell \leq m$ et $m - \ell$ est pair.
- Pour $0 \leq \ell < N$ et $N + \ell$ pair, prouver que

$$\sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \cos(\ell j \pi / N) = 0.$$

On pourra poser $\alpha = \pi + \ell \pi / N$ et établir, à partir des formules d'addition du sinus, l'identité

$$2 \sin(\alpha/2) \cos(j\alpha) = \sin((j + 1/2)\alpha) - \sin((j - 1/2)\alpha),$$

puis sommer.

En déduire que $I_k = 0$ et que $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse (*) de la question 2°).