



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2000

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Les trois quantités étudiées sont bien définies pour toute fonction-polynôme réelle : $|P|$ et P^2 sont continues sur $[-1, 1]$, donc intégrables, et $|P|$ y atteint un maximum. On travaille avec $n \geq 1$.

PARTIE I : Minimisation de $N_2(P)$ pour P décrivant $\mathcal{P}_n$

1°) Produit scalaire sur les polynômes.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, le produit PQ est continu sur $[0, 1]$, donc son intégrale existe. La symétrie résulte de $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[x]$, la linéarité de l'intégrale donne :

$$\langle aP + bQ, R \rangle = a\langle P, R \rangle + b\langle Q, R \rangle.$$

Par symétrie, l'application est aussi linéaire par rapport à la seconde variable : elle est bilinéaire.

Pour tout P , on a $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$. Vérifions le caractère défini. Si cette intégrale est nulle et s'il existait $t_0 \in [0, 1]$ avec $P(t_0) \neq 0$, la continuité donnerait un intervalle de longueur strictement positive, contenu dans $[0, 1]$, sur lequel $P(t)^2$ serait minoré par une constante strictement positive. Son intégrale serait alors strictement positive, ce qui est impossible.

Ainsi, $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Un polynôme non nul de degré au plus n possède au plus n racines réelles distinctes. Ici, le nombre de racines est infini : P est donc le polynôme nul. Réciproquement, le polynôme nul a une norme nulle.

Conclusion

$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire réel sur $\mathbb{R}_n[x]$. La norme associée est $\|P\| = \sqrt{\int_0^1 P(t)^2 dt}$.

2°) Minimisation sur le segment $[0, 1]$.

a) Existence, unicité et relations d'orthogonalité.

Méthode 1 — Projection orthogonale sur les polynômes de degré inférieur.

Le théorème de projection orthogonale affirme que, dans un espace euclidien E , pour tout sous-espace vectoriel V et tout $z \in E$, il existe un unique vecteur $p_V(z) \in V$ qui minimise la distance de z à V . Il est caractérisé par $z - p_V(z) \in V^\perp$. Pour tout $v \in V$, on a en outre :

$$\|z - v\|^2 = \|z - p_V(z)\|^2 + \|p_V(z) - v\|^2.$$

Ici, $E = \mathbb{R}_n[x]$ est un espace euclidien de dimension $n + 1$, muni du produit scalaire de 1° , et $V = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ est un sous-espace vectoriel. On applique le théorème au polynôme $z(t) = t^n$.

La base $(1, t, \dots, t^{n-1})$ de V permet d'écrire sa projection de manière unique :

$$A(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j.$$

Le carré de la distance entre z et

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j$$

est exactement $f(x_0, \dots, x_{n-1})$. Ainsi, le théorème donne l'existence et l'unicité du n -uplet minimisant f .

Posons $R_n(t) = t^n - A(t)$. La caractérisation de la projection impose $R_n \in V^\perp$. Il suffit de tester les vecteurs de la base de V :

$$\int_0^1 R_n(t) t^k dt = 0, \quad 0 \leq k < n.$$

En intégrant les monômes, on obtient, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\frac{1}{n+k+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} = 0.$$

Les n relations explicites sont donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} = \frac{1}{n+k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

La formule de Pythagore donne, pour tout $Q \in V$, $\|t^n - Q\|^2 = \|R_n\|^2 + \|A - Q\|^2$. Le minimum est donc $m_n = \|R_n\|^2$, et l'égalité n'est possible que pour $Q = A$. Comme R_n est unitaire de degré n , il est non nul : $m_n > 0$.

Méthode 2 — Fonction quadratique, hessienne et système linéaire.

Développons le carré et intégrons une somme finie de monômes :

$$f(x) = \frac{1}{2n+1} - 2 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{n+j+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_i x_j}{i+j+1}.$$

C'est une fonction polynomiale de n variables, donc de classe C^2 sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^n$. Posons $G = (1/(i+j+1))_{0 \leq i, j < n}$ et $b = (1/(n+i+1))_{0 \leq i < n}$. La dérivation de cette expression finie donne :

$$\nabla f(x) = 2(Gx - b), \quad H_f(x) = 2G.$$

La matrice G est symétrique. Pour toute colonne réelle $z = (z_0, \dots, z_{n-1})^t$ non nulle :

$$z^t G z = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} z_j t^j \right)^2 dt > 0,$$

car le polynôme entre parenthèses est non nul et le produit scalaire est défini positif. Si $Gz = 0$, cette égalité imposerait $z = 0$: le noyau de G est réduit à $\{0\}$. Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, le théorème du rang montre que G est inversible.

Il existe donc un unique point critique $a = G^{-1}b$. Pour toute valeur propre réelle λ de $2G$ et tout vecteur propre $z \neq 0$, on a $\lambda \|z\|^2 = z^t (2G) z > 0$. Le théorème spectral s'applique à la matrice symétrique $2G$: toutes ses valeurs propres sont strictement positives. La hessienne a donc partout ce signe, et le critère du programme sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^n$ donne un minimum global en a .

L'unicité se vérifie également par le calcul exact : puisque $Ga = b$, le développement de la fonction quadratique donne :

$$f(x) - f(a) = (x - a)^t G (x - a) > 0 \quad \text{pour } x \neq a.$$

L'équation $Ga = b$ est précisément le système des n relations écrit dans la méthode 1. La projection explique leur signification géométrique ; l'étude de la hessienne donne une preuve d'optimisation et justifie l'inversibilité du système sans calcul de déterminant.

b) Factorisation du numérateur de F .

Posons

$$D(x) = \prod_{r=1}^{n+1} (x + r).$$

Pour x en dehors des valeurs exclues, la mise au même dénominateur donne :

$$D(x)F(x) = \prod_{r=1}^n (x + r) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \prod_{\substack{1 \leq r \leq n+1 \\ r \neq j+1}} (x + r).$$

Le membre de droite définit un polynôme B de degré au plus n , sur tout $\mathbb{R}$, y compris aux valeurs où F n'est pas définie. Pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, les relations de a) donnent $F(k) = 0$. Comme $D(k) \neq 0$, on a $B(k) = 0$.

Le polynôme B possède donc les n racines distinctes $0, 1, \dots, n-1$. Par factorisation des polynômes réels, il existe un réel a tel que :

$$B(x) = a \prod_{k=0}^{n-1} (x - k).$$

Cette conclusion vaut aussi si B était nul ; nous allons vérifier que la constante a est strictement positive.

Faisons tendre x vers $-n-1$ dans l'expression polynomiale de B . Chaque produit de la somme portant un coefficient a_j contient le facteur $x + n + 1$ et tend donc vers 0. Le premier produit tend vers :

$$\prod_{r=1}^n (r - n - 1) = (-1)^n n!.$$

Dans la factorisation de B , on obtient :

$$a \prod_{k=0}^{n-1} (-n-1-k) = a(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

En égalant ces deux limites et en divisant par les facteurs non nuls, on trouve :

$$a = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0.$$

Ainsi, sur le domaine de F :

$$F(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (x-k)}{\prod_{r=1}^{n+1} (x+r)}.$$

c) Expression de m_n par un produit scalaire.

Les fonctions sont polynomiales, donc toutes les intégrales sur $[0, 1]$ sont définies. Avec les notations de a), $t^n = R_n(t) + A(t)$, et R_n est orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n-1$, notamment à A . Donc :

$$\int_0^1 R_n(t) t^n dt = \int_0^1 R_n(t) (R_n(t) + A(t)) dt = \int_0^1 R_n(t)^2 dt = m_n.$$

L'égalité demandée est ainsi établie. Le même calcul peut se lire directement à partir des relations de a), car

$$\int_0^1 R_n(t) A(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \int_0^1 R_n(t) t^j dt = 0.$$

d) Valeur du minimum sur $[0, 1]$.

En développant l'intégrale de c), on obtient :

$$m_n = \frac{1}{2n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{n+j+1} = F(n).$$

La valeur n appartient au domaine de F , puisque tous ses dénominateurs sont alors strictement positifs. Dans la formule de b) :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (n-k) = n!, \quad \prod_{r=1}^{n+1} (n+r) = \frac{(2n+1)!}{n!}.$$

Ainsi :

$$m_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

Cette valeur est strictement positive, conformément à l'interprétation comme norme au carré d'un polynôme non nul.

3°) Retour au segment $[-1, 1]$.

a) Changement de variable et borne inférieure.

Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Le changement de variable affine $x = 2t - 1$ envoie $[0, 1]$ sur $[-1, 1]$ et donne $dx = 2 dt$. Comme l'intégrande est continu, on peut écrire :

$$N_2(P)^2 = 2 \int_0^1 P(2t-1)^2 dt.$$

Le polynôme $Q(t) = 2^{-n}P(2t-1)$ est unitaire de degré n , car le coefficient dominant de

$P(2t - 1)$ est 2^n . Il existe donc des réels $x_0, \dots, x_{n-1}$ tels que

$$Q(t) = t^n - \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j.$$

Par la définition du minimum m_n :

$$N_2(P)^2 = 2^{2n+1} \int_0^1 Q(t)^2 dt \geq 2^{2n+1} m_n.$$

Les deux membres sont positifs ou nuls ; la croissance de la racine carrée donne :

$$N_2(P) \geq 2^n \sqrt{2m_n}.$$

b) Minimum et polynôme qui le réalise.

La borne de a) est atteinte si et seulement si $Q = R_n$, puisque a) de la question 2°) établit l'unicité du minimiseur sur $[0, 1]$. Il suffit donc de prendre :

$$P_{2,n}(x) = 2^n R_n \left(\frac{x+1}{2} \right).$$

Le coefficient dominant de ce polynôme est $2^n \cdot 2^{-n} = 1$, donc $P_{2,n} \in \mathcal{P}_n$. Son image par la transformation de a) est R_n , ce qui prouve qu'il atteint la borne et qu'il est l'unique minimiseur de N_2 .

Avec la valeur de m_n , le minimum vaut :

$$\min_{P \in \mathcal{P}_n} N_2(P) = 2^n \sqrt{\frac{2(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

On peut expliciter les coefficients de R_n , au lieu de les laisser définis par le système de 2°) a). Pour $0 \leq j < n$, multiplions $F(x)$ par $x + j + 1$ et faisons tendre x vers $-j - 1$.

Dans sa définition initiale, seul le terme portant a_j subsiste, et la limite vaut $-a_j$. Dans la factorisation de 2°) b), on utilise :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (-j-1-k) = (-1)^n \frac{(n+j)!}{j!},$$

$$\prod_{\substack{1 \leq r \leq n+1 \\ r \neq j+1}} (r-j-1) = (-1)^j j! (n-j)!.$$

Ainsi :

$$-a_j = \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^{n-j} \frac{(n+j)!}{(j!)^2 (n-j)!}.$$

Le coefficient dominant de R_n vaut 1, et la même expression appliquée à $j = n$ vaut aussi 1. On obtient donc la formule explicite :

$$R_n(t) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \frac{(n+j)!}{(j!)^2 (n-j)!} t^j.$$

Elle détermine complètement $P_{2,n}$ par la transformation affine ci-dessus. Par exemple, pour $n = 1$, on a $R_1(t) = t - \frac{1}{2}$, $P_{2,1}(x) = x$ et le minimum vaut $\sqrt{2/3}$, en accord avec $\int_{-1}^1 x^2 dx = 2/3$.

PARTIE II : Minimisation de $N_\infty(P)$ pour P décrivant $\mathcal{P}_n$

1°) Propriétés des polynômes T_k .

a) Degré et coefficient dominant.

Les fonctions $T_0 = 1$ et $T_1 = x$ sont des polynômes. La récurrence $T_{k+1} = 2xT_k - T_{k-1}$ conserve cette propriété. Pour le degré et le coefficient dominant, on vérifie les deux premiers indices positifs :

$$T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Ils ont respectivement pour degrés 1, 2 et coefficients dominants $1 = 2^0$, $2 = 2^1$.

Supposons pour un entier $k \geq 2$ que T_k ait pour degré k et coefficient dominant 2^{k-1} , et que T_{k-1} ait pour degré $k-1$. Le polynôme $2xT_k$ a pour degré $k+1$ et coefficient dominant 2^k . Le terme T_{k-1} , de degré strictement inférieur, ne peut modifier ce coefficient. Ainsi, T_{k+1} a pour degré $k+1$ et coefficient dominant 2^k .

Par récurrence, T_k est un polynôme de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1} pour tout $k \geq 1$. Pour $k = 0$, son degré est 0 et son coefficient dominant est 1.

b) Identité trigonométrique.

On a d'abord $T_1(\cos \theta) = \cos \theta$. La formule rappelée dans le sujet donne $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos(2\theta)$, d'où :

$$T_2(\cos \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos(2\theta).$$

Puis :

$$T_3(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(2\theta) - \cos \theta = \cos(3\theta),$$

car $2 \cos \theta \cos(2\theta) = \cos(3\theta) + \cos \theta$.

Pour la formule générale, les cas $k = 0$ et $k = 1$ donnent $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos 0$ et l'identité déjà obtenue. Si l'identité est vraie aux indices k et $k-1$, alors :

$$T_{k+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(k\theta) - \cos((k-1)\theta) = \cos((k+1)\theta).$$

La dernière égalité est exactement la formule de produit de cosinus du sujet. On a donc, pour tout réel θ et tout entier $k \geq 0$:

$$T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta).$$

2°) Minimum de la norme uniforme.

a) Alternance des signes et contradiction.

Supposons qu'un polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ vérifie $N_\infty(P) < 2^{1-n}$. Posons $S = T_n/2^{n-1}$, $D = S - P$ et $x_k = \cos(k\pi/n)$ pour $0 \leq k \leq n$.

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$; les points vérifient donc $1 = x_0 > x_1 > \dots > x_n = -1$. D'après 1°) b) :

$$S(x_k) = 2^{1-n} \cos(k\pi) = 2^{1-n}(-1)^k.$$

L'hypothèse donne $|P(x_k)| < 2^{1-n}$ pour chaque k . Si k est pair,

$D(x_k) = 2^{1-n} - P(x_k) > 0$. Si k est impair, $D(x_k) = -2^{1-n} - P(x_k) < 0$. Ainsi :

$$(-1)^k D(x_k) > 0, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Sur chaque intervalle $[x_{k+1}, x_k]$, les valeurs de D aux extrémités sont de signes opposés. Comme D est continu, le théorème des valeurs intermédiaires fournit une racine dans l'intervalle ouvert $]x_{k+1}, x_k[$. Les n intervalles ouverts sont disjoints : on obtient donc au moins n racines réelles distinctes.

Or, par 1°) a), S est unitaire de degré n , tout comme P . Leurs termes dominants se compensent, donc D a un degré au plus $n - 1$ s'il n'est pas nul. Il ne peut posséder n

racines distinctes. Il n'est pas le polynôme nul non plus, puisque $D(x_0) > 0$. La contradiction montre qu'aucun $P \in \mathcal{P}_n$ ne peut vérifier l'inégalité stricte supposée.

b) Valeur du minimum et polynôme minimisant.

La question a) donne $N_\infty(P) \geq 2^{1-n}$ pour tout $P \in \mathcal{P}_n$. Prenons :

$$P_{\infty,n}(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}.$$

Il est unitaire de degré n . Tout $x \in [-1, 1]$ s'écrit $x = \cos \theta$ pour un $\theta \in [0, \pi]$, car la fonction cosinus réalise une bijection de ce segment sur $[-1, 1]$. Ainsi, $|T_n(x)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$. De plus, $T_n(1) = 1$, donc le supremum de $|T_n|$ vaut exactement 1.

Par conséquent :

$$N_\infty(P_{\infty,n}) = 2^{1-n}, \quad \min_{P \in \mathcal{P}_n} N_\infty(P) = 2^{1-n}.$$

Pour $n = 1$, le polynôme proposé est x et le minimum vaut 1 ; la preuve par deux points d'alternance reste valable.

PARTIE III : Minimisation de $N_1(P)$ pour P décrivant $\mathcal{P}_n$

1°) Propriétés des polynômes U_k .

a) Degré, coefficient dominant et parité.

Les polynômes $U_0 = 1$ et $U_1 = 2x$ ont pour degrés 0 et 1, et pour coefficients dominants 2^0 et 2^1 . Si U_k a pour degré k et coefficient dominant 2^k , tandis que U_{k-1} a pour degré $k-1$, le terme $2xU_k$ a pour degré $k+1$ et coefficient dominant 2^{k+1} . La soustraction de U_{k-1} ne peut modifier ce terme dominant. La récurrence donne donc :

$$\deg(U_k) = k, \quad \text{coefficient dominant de } U_k = 2^k, \quad k \geq 0.$$

Pour la parité, l'identité $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$ est vraie aux indices 0 et 1. Supposons-la vraie aux indices k et $k-1$. Alors :

$$U_{k+1}(-x) = -2x(-1)^k U_k(x) - (-1)^{k-1} U_{k-1}(x).$$

Comme $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$, le membre de droite se réécrit :

$$(-1)^{k+1} (2xU_k(x) - U_{k-1}(x)) = (-1)^{k+1} U_{k+1}(x).$$

Par récurrence, la formule est vraie pour tout $k \geq 0$. Ainsi, U_k est pair lorsque k est pair et impair lorsque k est impair.

b) Suites réelles et formule trigonométrique pour U_k .

Fixons $\theta \in \mathbb{R}$. La relation impose $u_{k+1} = 2 \cos \theta u_k - u_{k-1}$: les deux premiers termes u_0, u_1 déterminent donc toute la suite de manière unique, par récurrence. On va construire une solution réelle ayant ces deux premiers termes.

Si $\sin \theta \neq 0$, les formules d'addition du sinus et du cosinus donnent :

$$\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(k\theta),$$

$$\sin((k+1)\theta) + \sin((k-1)\theta) = 2 \cos \theta \sin(k\theta).$$

Les suites $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ vérifient donc la relation. Les deux premiers termes de $A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ sont A et $A \cos \theta + B \sin \theta$. En prenant $A = u_0$ et

$B = (u_1 - u_0 \cos \theta) / \sin \theta$, on obtient la solution ayant les termes initiaux demandés.

L'unicité par récurrence prouve que toutes les solutions sont :

$$u_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta), \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \sin \theta \neq 0.$$

Si $\sin \theta = 0$, posons $\varepsilon = \cos \theta \in \{-1, 1\}$ et $w_k = \varepsilon^k u_k$. En remplaçant u_k par $\varepsilon^k w_k$ dans la relation et en utilisant $\varepsilon^2 = 1$, on obtient :

$$w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} = 0.$$

Autrement dit, $w_{k+1} - w_k = w_k - w_{k-1}$: la suite w_k est arithmétique. Les solutions sont donc :

$$u_k = \varepsilon^k (A + Bk), \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \sin \theta = 0.$$

Cette construction couvre tous les réels θ et ne repose que sur les identités trigonométriques et l'unicité d'une suite déterminée par ses deux premiers termes.

Prenons maintenant $\theta \in]0, \pi[$, donc $\sin \theta > 0$, et $u_k = U_k(\cos \theta)$. Ses deux premiers termes sont $u_0 = 1$ et $u_1 = 2 \cos \theta$. La première formule donne $A = 1$ et $B = \cos \theta / \sin \theta$. Ainsi, par la formule d'addition du sinus :

$$U_k(\cos \theta) = \cos(k\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin(k\theta) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

Pour la valeur en 1, faisons tendre θ vers 0 par valeurs positives. La continuité du polynôme U_k donne $U_k(\cos \theta) \rightarrow U_k(1)$. Comme $\sin t/t \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$, on a :

$$\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta} = (k+1) \frac{\sin((k+1)\theta)}{(k+1)\theta} \frac{\theta}{\sin \theta} \rightarrow k+1.$$

Donc $U_k(1) = k + 1$. Pour la valeur en -1 , posons $h = \pi - \theta \rightarrow 0^+$. Les formules d'addition donnent $\sin((k+1)(\pi - h)) = (-1)^k \sin((k+1)h)$ et $\sin(\pi - h) = \sin h$. Par continuité et par le même quotient de sinus :

$$U_k(-1) = (-1)^k(k+1).$$

Ces limites s'appliquent aussi à $k = 0$ et donnent alors les valeurs 1 aux deux extrémités.

c) Relation entre la dérivée de T_{k+1} et U_k .

Pour $\theta \in]0, \pi[$, l'identité $T_{k+1}(\cos \theta) = \cos((k+1)\theta)$ est une égalité de fonctions dérivables. La dérivation par composition donne :

$$-\sin \theta T'_{k+1}(\cos \theta) = -(k+1) \sin((k+1)\theta).$$

On divise par $\sin \theta > 0$ et on utilise b) :

$$T'_{k+1}(\cos \theta) = (k+1)U_k(\cos \theta).$$

Quand θ parcourt $]0, \pi[$, le réel $\cos \theta$ parcourt $] -1, 1[$. Les deux polynômes T'_{k+1} et $(k+1)U_k$ coïncident donc sur un intervalle contenant une infinité de points. Leur différence est un polynôme ayant une infinité de racines, donc elle est nulle. L'identité est ainsi valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T'_{k+1} = (k+1)U_k.$$

2°) Une condition suffisante de minimisation de N_1 .

Un polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ n'est pas nul et possède un nombre fini de racines réelles. La fonction $\text{sgn}(P)$ est constante sur chaque intervalle séparant ses racines et ne possède

qu'un nombre fini de discontinuités. Les intégrales où elle intervient existent en découpant $[-1, 1]$ en ces intervalles ; les valeurs isolées aux racines ne changent pas les intégrales.

a) Orthogonalité de la différence $Q - P$.

Soient $P, Q \in \mathcal{P}_n$, et supposons que P vérifie (*). Les termes dominants de Q et de P valent tous deux x^n , donc leur différence est de degré au plus $n - 1$. Il existe des réels $b_0, \dots, b_{n-1}$ tels que :

$$Q(x) - P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$$

Par linéarité de l'intégrale d'une somme finie et par les relations (*) :

$$\int_{-1}^1 (Q(x) - P(x)) \operatorname{sgn}(P(x)) dx = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \int_{-1}^1 x^k \operatorname{sgn}(P(x)) dx = 0.$$

L'égalité demandée est démontrée pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$.

b) Comparaison des intégrales des valeurs absolues.

Pour tout réel x , on a $P(x) \operatorname{sgn}(P(x)) = |P(x)|$, y compris lorsque $P(x) = 0$. La question a) donne donc :

$$N_1(P) = \int_{-1}^1 P(x) \operatorname{sgn}(P(x)) dx = \int_{-1}^1 Q(x) \operatorname{sgn}(P(x)) dx.$$

Comme $\operatorname{sgn}(P(x)) \in \{-1, 0, 1\}$, on a toujours $Q(x) \operatorname{sgn}(P(x)) \leq |Q(x)|$. Toutes les fonctions concernées sont intégrables sur le segment, donc la croissance de l'intégrale donne :

$$N_1(P) \leq \int_{-1}^1 |Q(x)| dx = N_1(Q).$$

Ainsi, tout polynôme de $\mathcal{P}_n$ vérifiant $(*)$ réalise le minimum de N_1 sur $\mathcal{P}_n$.

c) Calcul de $N_1(U_n)$ et minimum provisoirement conditionnel.

Méthode 1 — Changement de variable imposé.

La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta/(n+1))$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $[0, (n+1)\pi]$. Elle envoie les extrémités sur 1 et -1 , et sa dérivée vaut $-\sin(\theta/(n+1))/(n+1)$. Le changement de variable du sujet donne :

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1} \int_0^{(n+1)\pi} \left| U_n \left(\cos \frac{\theta}{n+1} \right) \right| \sin \frac{\theta}{n+1} d\theta.$$

Pour $0 < \theta < (n+1)\pi$, la formule de 1°) b) donne :

$$U_n \left(\cos \frac{\theta}{n+1} \right) = \frac{\sin \theta}{\sin(\theta/(n+1))}.$$

Le dénominateur est alors strictement positif, donc le produit de l'intégrande se simplifie en $|\sin \theta|$. Cette égalité se prolonge aux deux extrémités par continuité : le produit initial et $|\sin \theta|$ y valent tous deux 0. Aucune intégrale impropre n'est introduite. On obtient :

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1} \int_0^{(n+1)\pi} |\sin \theta| d\theta.$$

Découpons le segment en les $n+1$ intervalles $[j\pi, (j+1)\pi]$, avec $0 \leq j \leq n$. Sur chacun, la translation $\theta = j\pi + t$ donne $|\sin \theta| = \sin t$ pour $0 \leq t \leq \pi$. Son intégrale vaut

$[-\cos t]_0^\pi = 2$. Ainsi :

$$N_1(U_n) = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2.$$

Méthode 2 — Variations de T_{n+1} sur ses intervalles de monotonie.

Posons $d_j = \cos(j\pi/(n+1))$ pour $0 \leq j \leq n+1$. Sur l'intervalle $]d_{j+1}, d_j[$, on peut écrire $x = \cos \varphi$ avec $j\pi/(n+1) < \varphi < (j+1)\pi/(n+1)$. La formule de 1°) b) montre que $U_n(x)$ a le signe constant $(-1)^j$, car $\sin \varphi > 0$ et $\sin((n+1)\varphi)$ a ce signe.

Par 1°) c), $T'_{n+1} = (n+1)U_n$. Le polynôme T_{n+1} est donc monotone sur chaque segment $[d_{j+1}, d_j]$, et :

$$T_{n+1}(d_j) = \cos(j\pi) = (-1)^j.$$

L'intégration de sa dérivée, de signe constant sur chaque intervalle, fournit :

$$\int_{d_{j+1}}^{d_j} |T'_{n+1}(x)| dx = |T_{n+1}(d_j) - T_{n+1}(d_{j+1})| = 2.$$

En sommant puis en divisant par $n+1$, on retrouve $N_1(U_n) = 2$. Le changement de variable convertit l'intégrale en celle de $|\sin|$; cette seconde méthode l'interprète comme la somme des variations de T_{n+1} .

Le polynôme $P_{1,n} = U_n/2^n$ est unitaire de degré n , d'après 1°) a). À ce stade, on utilise provisoirement le résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'original :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \int_{-1}^1 x^k \operatorname{sgn} \left(\frac{U_n(x)}{2^n} \right) dx = 0.$$

La question b) montre alors que $P_{1,n}$ minimise N_1 . Comme le facteur 2^{-n} est positif :

$$N_1(P_{1,n}) = 2^{-n} N_1(U_n) = 2^{1-n}.$$

Sous l'hypothèse provisoirement admise, le minimum est donc 2^{1-n} , atteint pour $U_n/2^n$. La question 3°) va démontrer précisément cette hypothèse, ce qui rendra la conclusion définitive.

3°) Vérification de la condition (*).

a) Racines et signes de U_n .

Méthode 1 — Formule trigonométrique.

Pour $1 \leq j \leq n$, le réel $\theta_j = j\pi/(n+1)$ appartient à $]0, \pi[$. La formule de 1°) b) donne :

$$U_n(c_j) = \frac{\sin(j\pi)}{\sin(j\pi/(n+1))} = 0.$$

Les nombres $c_1, \dots, c_n$ sont distincts, car le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$. Ils fournissent donc n racines distinctes au polynôme de degré n .

Pour $0 \leq j \leq n$, si $x \in]c_{j+1}, c_j[$, il existe un unique $\theta \in]j\pi/(n+1), (j+1)\pi/(n+1)[$ tel que $x = \cos \theta$. Le dénominateur $\sin \theta$ est positif, et $\sin((n+1)\theta)$ a le signe $(-1)^j$. Ainsi :

$$\operatorname{sgn}(U_n(x)) = (-1)^j \quad \text{sur }]c_{j+1}, c_j[.$$

En particulier, le signe est positif sur $]c_1, c_0[$, négatif sur $]c_2, c_1[$, et alterne jusqu'au signe $(-1)^n$ sur $]c_{n+1}, c_n[$.

Méthode 2 — Factorisation réelle et comptage des facteurs négatifs.

Les mêmes valeurs $U_n(c_j) = 0$ se déduisent directement de la formule trigonométrique. Puisque les n racines sont distinctes, que le degré vaut n et que le coefficient dominant vaut 2^n , la factorisation réelle donne :

$$U_n(x) = 2^n \prod_{r=1}^n (x - c_r).$$

Sur $]c_{j+1}, c_j[$, les facteurs associés aux j racines $c_1, \dots, c_j$ sont strictement négatifs, et ceux associés aux autres racines sont strictement positifs. Le coefficient 2^n est positif : le signe du produit est donc $(-1)^j$. Les deux approches donnent le même tableau de signes ; la factorisation permet en outre de lire que toutes ces racines sont simples.

b) Cas $n + k$ impair.

La parité de U_n , démontrée en 1°) a), donne $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$. La fonction signe vérifie $\operatorname{sgn}((-1)^n y) = (-1)^n \operatorname{sgn}(y)$, y compris lorsque $y = 0$. Donc, pour l'intégrande $g(x) = x^k \operatorname{sgn}(U_n(x))$:

$$g(-x) = (-1)^{n+k} g(x).$$

Si $n + k$ est impair, l'intégrande est impair. Il est intégrable, puisque U_n ne possède qu'un nombre fini de racines. Le changement de variable $x = -t$ donne

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = \int_0^1 g(-t) dt = - \int_0^1 g(t) dt. \text{ Les deux moitiés se compensent, d'où :}$$

$$I_k = 0.$$

c) Cas $n + k$ pair : démonstration trigonométrique réelle.

Question adaptée au programme actuel.

On conserve l'égalité à établir et la conclusion de l'original. L'annulation de la somme est démontrée par des identités trigonométriques réelles et des sommes finies.

Première étape — Calculer l'intégrale à partir du tableau de signes.

Posons $m = k + 1$. Sur $]c_{j+1}, c_j[$, le signe de U_n vaut $(-1)^j$. Les valeurs aux racines sont sans effet sur l'intégrale. En découpant $[-1, 1]$ et en intégrant le monôme x^k , on obtient :

$$I_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \int_{c_{j+1}}^{c_j} x^k dx = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^n (-1)^j (c_j^m - c_{j+1}^m).$$

Pour chaque indice intérieur $1 \leq j \leq n$, les deux contributions au terme c_j^m se regroupent en $2(-1)^j c_j^m$. Les contributions aux extrémités sont $c_0^m - (-1)^n c_{n+1}^m$. Or $c_0 = 1$ et $c_{n+1} = -1$, donc la seconde contribution vaut $-(-1)^{n+m}$. Comme $n + k$ est pair et $m = k + 1$, le nombre $n + m$ est impair : cette contribution vaut 1.

Les deux extrémités fournissent donc 2. On obtient exactement :

$$I_k = \frac{1}{m} \left(2 + 2 \sum_{j=1}^n (-1)^j c_j^m \right) = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j^{k+1}.$$

Deuxième étape — Développer une puissance de cosinus en somme de cosinus.

Montrons par récurrence sur l'entier $m \geq 0$ que $\cos^m t$ est une combinaison linéaire réelle des $\cos(\ell t)$, avec $0 \leq \ell \leq m$ et $m - \ell$ pair. Pour $m = 0$, il s'agit de $1 = \cos(0t)$.

Si le résultat est vrai à l'ordre m , multiplions la combinaison obtenue par $\cos t$. Pour chaque terme, la formule rappelée dans le sujet donne :

$$\cos t \cos(\ell t) = \frac{1}{2} (\cos((\ell + 1)t) + \cos((\ell - 1)t)).$$

Si $\ell = 0$, on utilise $\cos(-t) = \cos t$; sinon, les deux fréquences sont non négatives. Dans tous les cas, après avoir remplacé une éventuelle fréquence négative par sa valeur

absolue, les fréquences obtenues sont comprises entre 0 et $m + 1$ et ont la même parité que $m + 1$. Cela démontre l'hérédité.

Ainsi, il existe des réels b_ℓ tels que :

$$\cos^m t = \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq m \\ m-\ell \text{ pair}}} b_\ell \cos(\ell t).$$

Il s'agit d'une somme finie établie à partir d'une identité du sujet ; aucun résultat général sur des développements infinis n'est nécessaire.

Troisième étape — Annuler les sommes trigonométriques alternées.

Posons $N = n + 1$. Soit ℓ un entier tel que $0 \leq \ell < N$ et $N + \ell$ soit pair. Définissons :

$$S_\ell = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \cos \frac{\ell j \pi}{N}, \quad \alpha = \pi + \frac{\ell \pi}{N}.$$

La formule d'addition du cosinus donne

$$\cos(j\alpha) = \cos(j\pi + \ell j\pi/N) = (-1)^j \cos(\ell j\pi/N), \text{ puisque } \sin(j\pi) = 0 \text{ et } \cos(j\pi) = (-1)^j.$$

Donc

$$S_\ell = \sum_{j=0}^{N-1} \cos(j\alpha).$$

Les deux formules d'addition du sinus donnent, par soustraction :

$$\sin((j+1/2)\alpha) - \sin((j-1/2)\alpha) = 2 \sin(\alpha/2) \cos(j\alpha).$$

En sommant de $j = 0$ à $j = N - 1$, les termes intermédiaires se compensent :

$$2 \sin(\alpha/2) S_\ell = \sin((N - 1/2)\alpha) - \sin(-\alpha/2) = \sin(N\alpha - \alpha/2) + \sin(\alpha/2).$$

On a $N\alpha = (N + \ell)\pi$. Par l'hypothèse de parité, c'est un multiple entier de 2π , donc $\sin(N\alpha - \alpha/2) = -\sin(\alpha/2)$. Le membre de droite vaut donc 0.

Enfin, $0 \leq \ell < N$ implique $\pi \leq \alpha < 2\pi$, donc $\sin(\alpha/2) > 0$. La division est autorisée, et l'on conclut :

$$S_\ell = 0.$$

Le cas $\ell = 0$ est inclus : il intervient uniquement lorsque N est pair, et la somme des N signes alternés est bien nulle.

Quatrième étape — Appliquer les deux identités à I_k .

On a $m = k + 1 \leq n = N - 1$, puisque $k < n$. De plus, $N + m = n + k + 2$ est pair.

Chaque fréquence ℓ intervenant dans la deuxième étape vérifie donc $\ell \leq m < N$ et $N + \ell$ pair, puisque $m - \ell$ est pair. La troisième étape s'applique à chacune d'elles.

En évaluant le développement de $\cos^m$ aux points $j\pi/N$ et en sommant une somme finie :

$$\sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \cos^m \frac{j\pi}{N} = \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq m \\ m-\ell \text{ pair}}} b_\ell S_\ell = 0.$$

Or $c_j = \cos(j\pi/N)$ et $N - 1 = n$. La somme qui apparaît dans la première étape est donc nulle. Ainsi, $I_k = 0$ également lorsque $n + k$ est pair.

Avec b), on a finalement démontré $I_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n - 1\}$. Comme le facteur 2^{-n} est strictement positif, $\text{sgn}(U_n(x)/2^n) = \text{sgn}(U_n(x))$ pour tout x . Par conséquent :

$$\int_{-1}^1 x^k \text{sgn} \left(\frac{U_n(x)}{2^n} \right) dx = 0, \quad 0 \leq k < n.$$

L'hypothèse (*) est entièrement démontrée. Le résultat provisoire de 2°) c) devient définitif :

$$\min_{P \in \mathcal{P}_n} N_1(P) = 2^{1-n}, \quad P_{1,n}(x) = \frac{U_n(x)}{2^n} \text{ réalise ce minimum.}$$

On peut également vérifier l'unicité de ce minimiseur. Si $Q \in \mathcal{P}_n$ atteint la même valeur, la preuve de 2°) b) donne :

$$\int_{-1}^1 (|Q(x)| - Q(x) \operatorname{sgn}(U_n(x))) dx = 0.$$

L'intégrande est positif ou nul et continu sur chaque intervalle ouvert $]c_{j+1}, c_j[$. Une valeur strictement positive en un point de l'un de ces intervalles donnerait, par continuité, une intégrale strictement positive. Il est donc nul sur chacun de ces intervalles. Cela signifie que Q y est positif ou nul lorsque U_n est positif, et négatif ou nul lorsque U_n est négatif.

De part et d'autre de chaque racine c_j pour $1 \leq j \leq n$, les signes imposés sont opposés. Par continuité de Q , sa valeur au point c_j est à la fois positive ou nulle et négative ou nulle, donc $Q(c_j) = 0$. Le polynôme Q est unitaire de degré n et possède les n racines distinctes c_j : il vaut

$$\prod_{j=1}^n (x - c_j) = U_n(x)/2^n.$$

Le minimiseur de N_1 est donc unique.

Pour $n = 1$, la vérification de (*) relève de b), puisque $n + k = 1$ pour l'unique indice $k = 0$. Le polynôme $U_1/2 = x$ a une intégrale de valeur absolue égale à $1 = 2^{1-1}$, conformément au résultat général.

Relevé des adaptations

- III 3°) c) — Le calcul initial de la somme est remplacé par un développement fini en cosinus et une identité télescopique obtenue à partir des formules d'addition du sinus. L'égalité pour $I_{k'}$, sa conclusion et toutes les dépendances sont conservées. La preuve est entièrement réelle et conforme au référentiel fourni ; aucun résultat nouveau n'est admis définitivement.