



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1999

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout ce problème, on désigne par :

- a) E un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dans lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y \rangle$.
- b) $S(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E . On rappelle qu'un endomorphisme u est dit symétrique s'il vérifie $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ pour tout couple (x, y) de vecteurs appartenant à E .
- c) $T(E)$ le sous-ensemble de $S(E)$ constitué des endomorphismes symétriques u dont le rang est inférieur ou égal à 1 et qui vérifient $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ pour tout vecteur x appartenant à E .

Dans la partie I, on décrit les endomorphismes appartenant à $T(E)$ puis, dans la partie II, on munit l'espace vectoriel $S(E)$ d'un produit scalaire et on étudie, au sens de la norme associée, les meilleures approximations des éléments de $S(E)$ par des éléments de $T(E)$.

Préliminaire : trace d'une matrice et d'un endomorphisme

On désigne par $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre $p \geq 1$. On associe à toute matrice $A = (a_{i,j})$ appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sa trace, notée $\text{Tr}(A)$ et définie par :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^p a_{k,k} = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{p,p}.$$

- a. Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ désignent deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, expliciter $\text{Tr}(AB)$ et montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- b. Si M' et M désignent deux matrices semblables appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, en déduire que les traces de M' et M sont égales.

Dans la suite, on appelle trace d'un endomorphisme de E la valeur commune de la trace de ses matrices M relativement aux différentes bases de E .

Partie I : étude des éléments de l'ensemble $T(E)$

1. Sous-espace orthogonal à un vecteur non nul x de E .

On considère dans cette question un vecteur non nul x appartenant à E .

(a) Pour tout vecteur v appartenant à E , exprimer en fonction de x et de v l'unique nombre réel $\lambda(v)$ tel que le vecteur $v - \lambda(v)x$ soit orthogonal à x .

(b) En remarquant que tout vecteur v appartenant à E peut s'écrire sous la forme :

$$v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x), \quad (1)$$

établir que la droite dirigée par le vecteur x et le sous-espace X constitué des vecteurs de E orthogonaux au vecteur x sont supplémentaires dans E .

2. Élément de $T(E)$ associé à un vecteur de E .

À tout vecteur non nul x de E , on associe l'application u_x , de E dans E , définie par :

$$u_x(v) = \langle x, v \rangle x.$$

(a) Montrer que u_x appartient à $T(E)$, puis écrire la matrice de u_x dans une base de E constituée du vecteur x et d'une base du sous-espace X orthogonal à x .

En déduire la trace de u_x et la trace de $u_x \circ u_x$ en fonction de x .

(b) Déterminer en fonction de x les valeurs propres et les sous-espaces propres de u_x .

(c) On désigne par f un endomorphisme de E .

À l'aide de la formule (1), expliciter les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_x$, dans une base de E constituée du vecteur x et d'une base du sous-espace X orthogonal à x , puis en déduire la trace de $f \circ u_x$ en fonction de x .

3. Vecteurs de E associés à un élément de $T(E)$.

À tout élément non nul u de $T(E)$, on associe un vecteur non nul x de la droite $\text{Im } u$.

(a) Montrer que x est vecteur propre de u et que la valeur propre associée μ est positive.

(b) À l'aide de la formule (1), montrer que l'on a, pour tout vecteur v appartenant à E :

$$u(v) = \frac{\mu}{\|x\|^2} \langle x, v \rangle x.$$

(c) En déduire que la valeur propre μ est strictement positive et qu'il existe au moins un vecteur y de E tel que $u = u_y$, c'est-à-dire tel que l'on ait, pour tout vecteur v appartenant à E :

$$u(v) = \langle y, v \rangle y.$$

(d) L'application de E dans $T(E)$ associant à tout vecteur x appartenant à E l'endomorphisme u_x de $T(E)$ défini par $u_x(v) = \langle x, v \rangle x$ est-elle injective ?
Surjective ?

Partie II : approximation des éléments de $S(E)$ par des éléments de $T(E)$

On associe à tout couple (f, g) d'endomorphismes appartenant à $S(E)$ le nombre réel :

$$[f, g] = \text{Tr}(f \circ g),$$

valeur commune de la trace des matrices de $f \circ g$ relativement aux différentes bases de E .

Ainsi, lorsque l'espace euclidien E est rapporté à une base orthonormale dans laquelle on désigne par $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ les matrices, alors symétriques, de f et de g , on a :

$$[f, g] = \text{Tr}(AB).$$

1. Un produit scalaire sur $S(E)$.

(a) Montrer que l'application associant à tout couple (f, g) d'endomorphismes appartenant à $S(E)$ le nombre réel $[f, g] = \text{Tr}(f \circ g)$ est un produit scalaire sur $S(E)$.

On notera N la norme associée à ce produit scalaire, définie par $N(f) = \sqrt{[f, f]}$.

(b) On désigne par f un élément de $S(E)$ et par u_x un élément de $T(E)$. Dédurre des résultats obtenus dans la partie I que :

$$N^2(f - u_x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4.$$

Dans la suite, on suppose que l'endomorphisme symétrique f est donné dans $S(E)$ et l'on pose, pour tout vecteur x appartenant à E :

$$F(x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4.$$

L'objectif est de déterminer les vecteurs x de E , c'est-à-dire les endomorphismes u_x de $T(E)$, qui réalisent le minimum $m(f) = \inf\{F(x) \mid x \in E\}$, dans la mesure où celui-ci existe.

2. Condition nécessaire de minimum pour F .

Pour tout vecteur x et pour tout vecteur unitaire y , vérifiant donc $\|y\| = 1$, appartenant à E , on considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = F(x + ty).$$

- (a) Montrer que h est une fonction polynôme de degré 4 dont on précisera les coefficients.
- (b) Prouver, si F présente un minimum en x , que, pour tout vecteur unitaire y , $h'(0) = 0$.
- (c) En déduire que $f(x) = \|x\|^2 x$.
- (d) Prouver, si F présente un minimum en x , que :

$$F(x + ty) - F(x) = t^2 [(t + 2\langle y, x \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)] .$$

3. Condition nécessaire et suffisante de minimum pour F .

Prouver que $F(x) = m(f)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

$$(i) \quad f(x) = \|x\|^2 x; \quad (ii) \quad \forall y \in E, \quad \|y\| = 1 \implies \langle y, f(y) \rangle \leq \|x\|^2.$$

4. Étude du maximum de $\langle y, f(y) \rangle$ pour $\|y\| = 1$.

(a) Justifier, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, l'existence d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ formée de vecteurs propres pour f .

On notera $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f associées à ces vecteurs propres $e_1, e_2, \dots, e_p$, en supposant celles-ci classées dans l'ordre croissant.

(b) Exprimer $N(f)$ en fonction des valeurs propres de f .

(c) En décomposant un vecteur unitaire y dans la base précédente, montrer que :

$$\sup\{\langle y, f(y) \rangle \mid \|y\| = 1\} = \lambda_p.$$

On précisera de plus quels sont les vecteurs unitaires y tels que $\langle y, f(y) \rangle = \lambda_p$.

5. Conclusion et valeur de $m(f)$.

- (a) Montrer que, si $\lambda_p \leq 0$, alors $F(x) = m(f)$ si et seulement si x est nul.
- (b) Déterminer, si $\lambda_p > 0$, la valeur de $m(f)$ et l'ensemble des vecteurs x tels que $F(x) = m(f)$.

6. Application à l'étude d'un exemple.

Dans cette question, l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^p$ est rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique. On suppose que, dans cette base canonique, la matrice symétrique $M = (m_{i,j})$ de f vérifie les deux propriétés suivantes :

- $m_{i,j} > 0$ pour tout couple (i, j) de nombres entiers compris entre 1 et p ;

-

$$\sum_{j=1}^p m_{i,j} = 1$$

pour tout nombre entier i compris entre 1 et p .

- (a) Montrer que 1 est valeur propre de M et donner un vecteur propre associé.
- (b) On désigne par λ une valeur propre de M , par X un vecteur propre associé de composantes $x_1, x_2, \dots, x_p$, et par i un nombre entier tel que $|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\}$.

En considérant la i -ième ligne du système $MX = \lambda X$, montrer que $|\lambda| \leq 1$, puis que l'égalité $|\lambda| = 1$ implique $\lambda = 1$ et $x_1 = x_2 = \dots = x_p$.

On rappelle à cet effet que, dans l'inégalité triangulaire de $\mathbb{R}$, il y a égalité si et seulement si tous les nombres réels qui interviennent sont de même signe.

Préciser la dimension du sous-espace propre associé à 1.

- (c) Déterminer enfin les vecteurs x appartenant à $\mathbb{R}^p$ tels que $F(x) = m(f)$, puis démontrer qu'il existe un unique endomorphisme u appartenant à $T(E)$, dont on donnera la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, tel que $m(f) = N^2(f - u)$.

Que représente cette dernière matrice ?