



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1998

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On considère dans ce problème une fonction f à valeurs réelles définie sur $[-2, -1]$ et l'on se propose de la prolonger en une fonction F à valeurs réelles de classe C^1 , vérifiant la relation $F'(x) = F(x - x^2)$ pour $x \geq -1$ sur les intervalles étudiés.

Dans la partie 1, on étudie une suite utilisée dans la partie 2. On prolonge alors f en une fonction F vérifiant la relation précédente sur $[-1, 0]$, puis sur $[-1, 2]$, ce qui fait respectivement l'objet des parties 2 et 3.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 1

1. Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère dans cette question la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = x - x^2$.

- (a) Étudier les variations et représenter graphiquement cette fonction ψ .
- (b) Établir, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que ψ induit une bijection de $] - \infty, 0]$ sur $] - \infty, 0]$.
- (c) Étudier les variations et représenter graphiquement, sur la figure précédente, la bijection réciproque.

2. Étude d'une suite définie par récurrence.

On considère la suite (x_n) de premier terme $x_0 = -2$ et définie pour $n \geq 1$ par :

$$x_n - x_n^2 = x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n < 0.$$

On donne ainsi un procédé permettant de définir x_n en fonction de x_{n-1} .

- (a) Déterminer x_1 et x_2 , puis montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, le nombre réel x_n est bien défini, de façon unique, à partir de x_{n-1} .
- (b) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite (x_n) , puis montrer que (x_n) converge vers 0.

(c) On pose pour tout entier naturel n :

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1 + u_n), \quad w_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \cdots (1 + u_n).$$

- Prouver la convergence de la série

$$\sum u_n$$

et déterminer sa somme.

- Prouver la convergence de la série

$$\sum v_n$$

et donner un majorant de sa somme.

- Prouver la convergence de la suite (w_n) et montrer que $2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \leq 9$.

Dans la suite, on considère une fonction f à valeurs réelles positives, c'est-à-dire positives ou nulles, de classe C^1 sur le segment $[-2, -1]$ et vérifiant la relation $f'(-1) = f(-2)$.

Partie 2

On étudie dans cette partie le problème P_0 suivant : étudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois hypothèses :

H_1 : F est de classe C^1 sur $[-2, 0]$.

H_2 : $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-2, -1]$; f est prolongée par F .

H_3 : $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout $x \in [-1, 0]$.

1. Unicité d'une solution F .

On suppose qu'il existe une fonction F vérifiant les trois hypothèses précédentes.

(a) Pour $n \geq 1$, si $t \in [x_n, x_{n+1}]$, établir que $t - t^2 \in [x_{n-1}, x_n]$.

(b) Établir que, si $x \in [x_1, x_2]$:

$$F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^x f(t - t^2) dt.$$

(c) Établir, pour $n \geq 2$, que, si $x \in [x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t - t^2) dt.$$

En déduire que la connaissance de F sur $[x_{n-1}, x_n]$ détermine F sur $[x_n, x_{n+1}]$.

(d) Quelle est la réunion I des intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ pour $n \geq 0$? En déduire que, s'il existe une solution F au problème P_0 , celle-ci est unique.

2. Existence d'une solution F .

On construit sur I une fonction F de la façon suivante : la fonction F est égale à f sur $[-2, -1]$ puis, la supposant connue sur $[x_{n-1}, x_n]$ pour $n \geq 1$, on pose, pour tout $x \in [x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t - t^2) dt.$$

(a) Montrer, pour tout entier naturel $n \geq 0$, que F est de classe C^1 sur $[x_n, x_{n+1}]$. Pour $n \geq 1$, préciser $F'(x)$ en fonction de F et de x . Préciser les dérivées à droite et à gauche de F en x_1 , puis en x_n pour $n \geq 1$.

En déduire que F est de classe C^1 sur I .

(b) Étudier le sens de variation de F sur $[x_1, x_2]$, puis montrer que F est croissante sur $[-1, 0[$.

(c) On note M le maximum de la fonction positive f sur $[-2, -1]$.

Établir que, pour tout entier naturel n et tout $x \in [-2, x_{n+1}]$, $0 \leq F(x) \leq M \frac{w_n}{2}$.

En déduire que F est majorée sur $[-2, 0[$.

(d) Établir que $F(x)$ admet une limite L quand x tend vers 0 par valeurs inférieures. On pose alors $F(0) = L$.

Prouver, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que F est de classe C^1 sur $[-2, 0]$, en précisant $F'(0)$, puis que F est solution du problème P_0 .

3. Étude du signe de L .

(a) Déterminer le signe de $L = F(0)$.

(b) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f le nombre L est-il nul ?

Partie 3

On étudie dans cette partie le problème P_1 suivant : étudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois hypothèses :

$H_1 : F$ est de classe C^1 sur $[-2, 1]$.

$H_2 : F(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-2, -1]$; f est prolongée par F .

$H_3 : F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

On introduit à cet effet les notations suivantes :

- E désigne l'ensemble des fonctions réelles g de classe C^1 sur $[0, 1]$ telles que, pour tout $x \in [0, 1]$, $g'(x) = g(x - x^2)$.
- Φ désigne l'application associant à tout élément g de E le nombre réel $g(0)$.

1. Propriétés de l'application Φ .

(a) Prouver que E est un espace vectoriel et que Φ est linéaire sur E .

(b) Soit $g \in \text{Ker } \Phi$ et M le maximum de $|g|$ sur $[0, \frac{1}{4}]$.

- Établir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que, pour tout $x \in [0, 1]$,
 $|g(x)| \leq Mx$.
- En déduire que $M = 0$, puis que g est la fonction nulle sur $[0, 1]$. Conclure.

2. Étude d'une suite de fonctions (g_n) .

On définit une suite de fonctions (g_n) de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $g_0(x) = 1$, puis, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$g_n(x) = 1 + \int_0^x g_{n-1}(t - t^2) dt.$$

(a) Calculer $g_1(x)$ et $g_2(x)$.

(b) Établir que g_n est une fonction polynôme. Notant d_n son degré, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n , puis en déduire d_n en fonction de n .

(c) Étant donné $x \in [0, 1]$, établir par récurrence sur n la double inégalité :

$$0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(d) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(g_n(x))$ est croissante, majorée par e^x , donc convergente vers une limite que l'on notera $g(x)$. Ainsi g réalise une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

3. Étude de la fonction g définie par $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

(a) Établir, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

(b) Établir, pour tous réels x, h tels que x et $x + h$ appartiennent à $[0, 1]$:

$$|g(x+h) - g(x)| \leq 2 \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + |g_n(x+h) - g_n(x)|.$$

En déduire, par un choix convenable de n puis de h , que $|g(x+h) - g(x)|$ peut être rendu inférieur à tout nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

En déduire enfin que g est continue en tout $x \in [0, 1]$, donc sur $[0, 1]$.

(c) Prouver que, pour $0 \leq x \leq 1$, la limite, lorsque $n \rightarrow +\infty$, de l'expression suivante est nulle :

$$\int_0^x g(t - t^2) dt - \int_0^x g_n(t - t^2) dt.$$

En revenant à la définition de (g_n) , en déduire que :

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t - t^2) dt.$$

(d) Prouver enfin que g est un élément de E tel que $\Phi(g) = 1$.

4. Résolution du problème P_1 .

- (a) Dédire des questions précédentes que Φ est bijective et donner la dimension de E .
- (b) Dédire des résultats des parties 2 et 3 qu'il existe une et une seule fonction F solution du problème P_1 .

5. Résolution du problème P_2 .

On étudie enfin le problème P_2 suivant : étudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois hypothèses :

$H_1 : F$ est de classe C^1 sur $[-2, 2]$.

$H_2 : F(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-2, -1]$; f est prolongée par F .

$H_3 : F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout $x \in [-1, 2]$.

- (a) Prouver que, si F est solution du problème P_2 , l'application $x \mapsto F(x) + F(1 - x)$ est constante sur $[-1, 2]$.

- (b) En déduire que le problème P_2 admet une solution F et une seule.