



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1998

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 1

1. Étude d'une fonction auxiliaire.

(a) Variations et représentation de ψ .

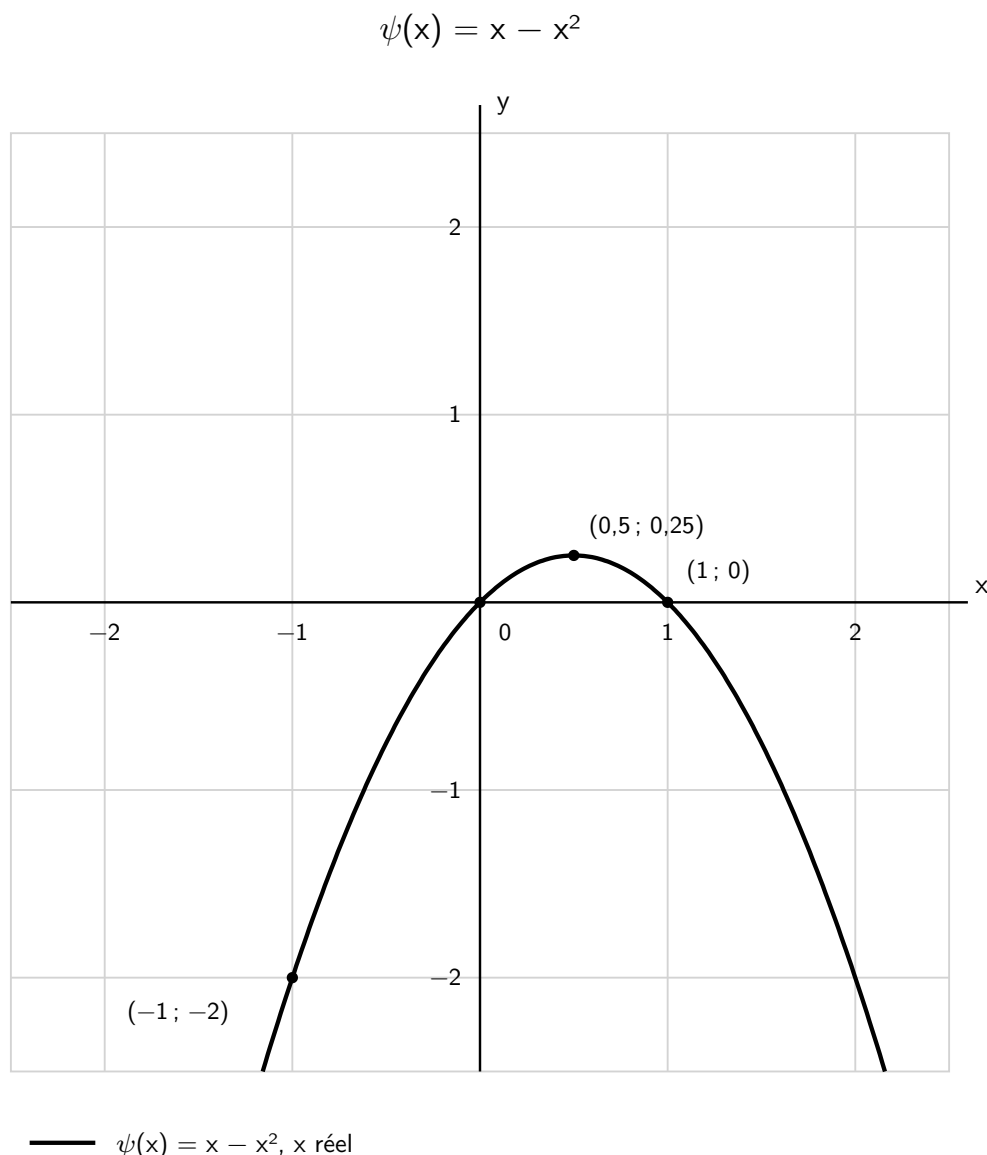
La fonction $\psi(x) = x - x^2$ est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\psi'(x) = 1 - 2x$. Sa dérivée est positive pour $x < 1/2$, nulle en $1/2$, et négative pour $x > 1/2$.

x	$] -\infty, 1/2[$	$1/2$	$]1/2, +\infty[$
$\psi'(x)$	+	0	—
ψ	strictement croissante	maximum $1/4$	strictement décroissante

Comme le terme $-x^2$ domine x , $\psi(x)$ tend vers $-\infty$ à chacune des deux extrémités de $\mathbb{R}$.

La forme canonique $\psi(x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ décrit une parabole de sommet $(1/2, 1/4)$ et d'axe vertical $x = 1/2$. Elle coupe l'axe horizontal aux points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ et passe aussi par $(-1, -2)$.

Le tracé ci-dessous est calculé à partir de cette formule ; il représente la portion de la courbe contenue dans le cadre.



(b) Bijection sur les réels négatifs ou nuls.

Théorème de la bijection : une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle réalise une bijection de cet intervalle sur son image. Son image est un intervalle, dont les bornes sont déterminées par ses limites aux extrémités ; une extrémité incluse dans le domaine donne une extrémité incluse dans l'image.

Sur $] -\infty, 0]$, ψ est continue et strictement croissante, puisque $\psi'(x) = 1 - 2x \geq 1 > 0$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = -\infty$ et $\psi(0) = 0$.

Son image est donc exactement $] -\infty, 0]$. Le théorème cité assure que la restriction de ψ réalise une bijection de $] -\infty, 0]$ sur $] -\infty, 0]$.

(c) Bijection réciproque.

Notons θ la réciproque de cette restriction. Pour $y \leq 0$, l'équation $x - x^2 = y$ équivaut à $x^2 - x + y = 0$. Comme $1 - 4y \geq 1$, ses deux racines réelles sont $(1 \pm \sqrt{1 - 4y})/2$.

La seule racine négative ou nulle est celle avec le signe moins. Ainsi :

$$\theta(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y}}{2} \quad (y \leq 0).$$

La réciproque d'une bijection strictement croissante est strictement croissante. On peut aussi le vérifier par dérivation :

$$\theta'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4y}} > 0.$$

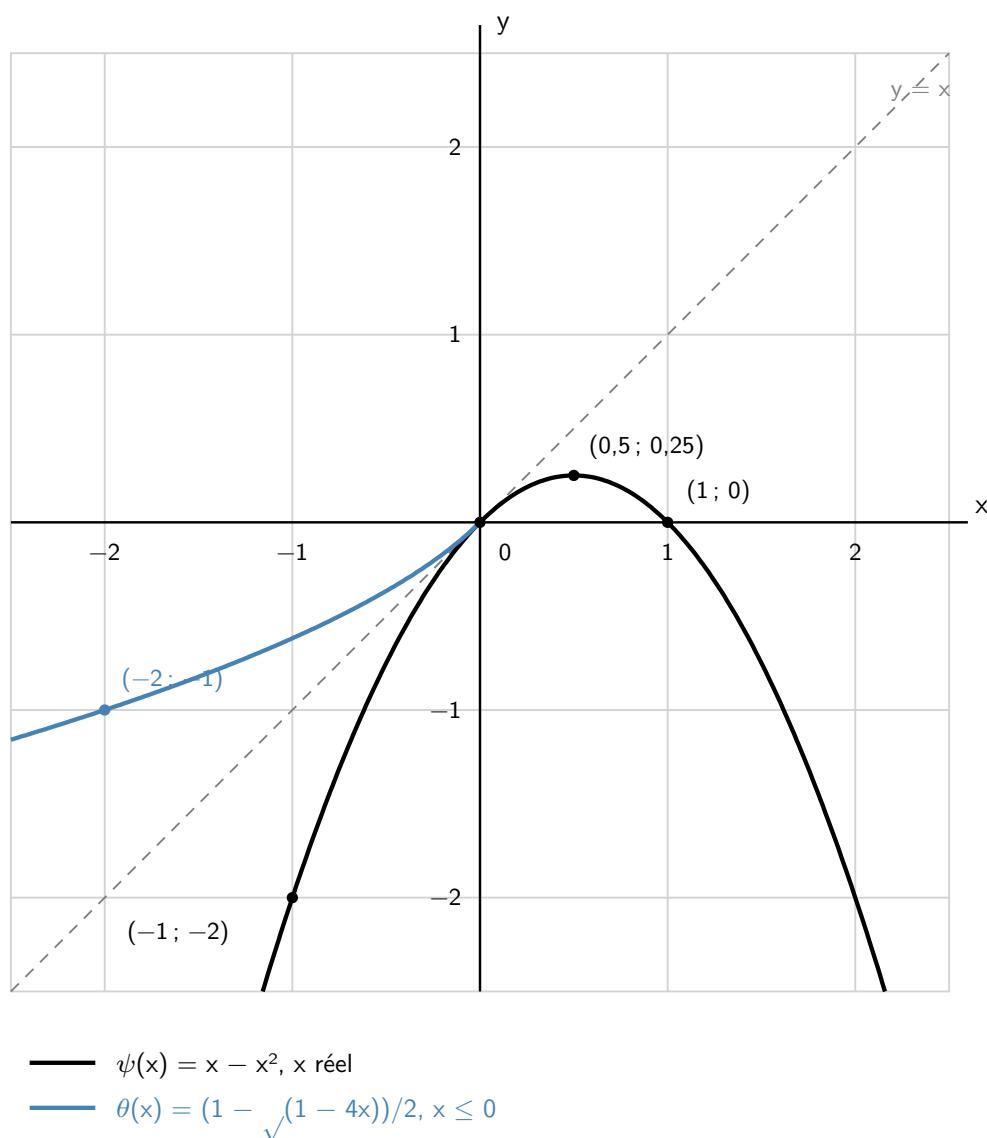
La formule est dérivable pour $y < 1/4$, donc elle donne également la dérivée à gauche en 0, égale à 1. On a $\theta(0) = 0$ et $\theta(y) \rightarrow -\infty$ lorsque $y \rightarrow -\infty$.

Pour tout $x \leq 0$, le point $(x, \psi(x))$ de la courbe de ψ donne le point $(\psi(x), x)$ de la courbe de θ . Les deux courbes restreintes sont donc symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Par exemple, $\psi(-1) = -2$ donne $\theta(-2) = -1$.

La courbe de θ , définie seulement pour les abscisses négatives ou nulles, est ajoutée à la figure précédente.

ψ et sa réciproque θ



2. Étude d'une suite définie par récurrence.

(a) Premiers termes et définition de la suite.

Question adaptée au programme actuel : le quantificateur de la dernière demande porte sur $n \geq 1$, car x_0 est donné et x_{-1} n'est pas défini.

Méthode 1 — Utilisation de la bijection réciproque.

On a $x_0 = -2 < 0$. Si $x_{n-1} < 0$, la bijection de 1.1(b) fournit un unique $x_n \leq 0$ tel que

$\psi(x_n) = x_{n-1}$. Ce x_n est strictement négatif, car $\psi(0) = 0 \neq x_{n-1}$.

Une récurrence construit donc tous les termes, de façon unique, dans $] -\infty, 0[$. Ils vérifient $x_n = \theta(x_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

En particulier :

$$x_1 = \theta(-2) = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1, \quad x_2 = \theta(-1) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Méthode 2 — Résolution de l'équation du second degré.

Si $x_{n-1} < 0$, l'équation $x_n^2 - x_n + x_{n-1} = 0$ a pour discriminant réel $1 - 4x_{n-1} > 1$. Ses racines sont $(1 + \sqrt{1 - 4x_{n-1}})/2 > 0$ et $(1 - \sqrt{1 - 4x_{n-1}})/2 < 0$.

La condition $x_n < 0$ sélectionne donc exactement une racine :

$$x_n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x_{n-1}}}{2}.$$

Partant de $x_0 < 0$, cette formule assure par récurrence l'existence, l'unicité et la négativité de tous les termes. Elle donne à nouveau $x_1 = -1$ et $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.

La première méthode utilise une propriété globale de la fonction auxiliaire ; la seconde fournit directement la formule du terme suivant.

(b) Monotonie et limite.

La relation de récurrence à l'indice $n + 1$ donne $x_{n+1} - x_{n+1}^2 = x_n$, donc :

$$x_{n+1} - x_n = x_{n+1}^2 > 0.$$

La suite est strictement croissante. Tous ses termes étant strictement négatifs, elle est majorée par 0. Le théorème de la limite monotone donne une limite réelle $\ell \leq 0$.

Les suites (x_{n+1}) et (x_n) tendent toutes deux vers ℓ . En passant à la limite dans l'identité polynomiale, dont tous les termes convergent, on obtient $\ell - \ell^2 = \ell$. Ainsi $\ell^2 = 0$ et $\ell = 0$.

$$x_n \longrightarrow 0 \quad \text{avec} \quad -2 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < 0.$$

(c) Séries et produit.

Convergence de

$$\sum u_n.$$

On a $u_n = x_{n+1} - x_n = x_{n+1}^2 > 0$. La somme partielle est télescopique :

$$\sum_{n=0}^N u_n = x_{N+1} - x_0 = x_{N+1} + 2.$$

Comme $x_{N+1} \rightarrow 0$, la série converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2.$$

Convergence de

$$\sum v_n.$$

Pour $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$. On peut établir la borne supérieure en étudiant $q(t) = t - \ln(1+t)$: $q(0) = 0$ et $q'(t) = t/(1+t) \geq 0$.

Comme $u_n > 0$, v_n est bien défini et $0 \leq v_n \leq u_n$. La comparaison des séries à termes positifs assure donc la convergence de

$$\sum v_n$$

et donne :

$$0 \leq S := \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq 2.$$

Comme $u_0 = x_1 - x_0 = 1$, on a aussi $S \geq v_0 = \ln 2$.

Méthode 1 — Convergence du produit par son logarithme.

Tous les facteurs de w_N sont strictement positifs. Pour chaque produit fini :

$$\ln w_N = \sum_{n=0}^N \ln(1 + u_n) = \sum_{n=0}^N v_n.$$

Par continuité de l'exponentielle, $w_N \rightarrow e^S$. Les bornes $\ln 2 \leq S \leq 2$ donnent $2 \leq e^S \leq e^2$.

Pour justifier la borne numérique demandée, la série exponentielle donne

$$e = 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} 1/k!.$$

Pour $k \geq 2$, $k! \geq 2^{k-1}$, avec inégalité stricte dès $k = 3$. Par comparaison avec une série géométrique :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1.$$

Donc $e < 3$ et $e^2 < 9$. En particulier :

$$2 \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} w_N \leq 9.$$

Méthode 2 — Produit croissant et majoration exponentielle.

Comme $u_{N+1} > 0$, $w_{N+1} = w_N(1 + u_{N+1}) > w_N$, et $w_0 = 2$. La suite est strictement croissante.

L'inégalité $\ln(1 + t) \leq t$ équivaut, pour $t \geq 0$, à $1 + t \leq e^t$. En multipliant un nombre fini d'inégalités positives :

$$w_N \leq \prod_{n=0}^N e^{u_n} = \exp\left(\sum_{n=0}^N u_n\right) \leq e^2 < 9.$$

La suite est donc croissante et majorée. Le théorème de la limite monotone assure sa convergence et, en passant aux limites dans $2 \leq w_N \leq e^2$, on retrouve les bornes demandées.

La première méthode identifie la limite comme e^S ; la seconde établit la convergence sans passer à la limite dans une somme de logarithmes.

Partie 2

Dans cette partie, f est de classe C^1 sur $[-2, -1]$, positive ou nulle et satisfait $f'(-1) = f(-2)$. Aux extrémités des segments, les dérivées sont prises du côté où la fonction est définie.

1. Unicité d'une solution F .

(a) Image des intervalles successifs.

Question adaptée au programme actuel : on précise $n \geq 1$, afin que x_{n-1} soit défini.

La fonction ψ est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$. Pour $n \geq 1$, si $x_n \leq t \leq x_{n+1}$, on a donc :

$$\psi(x_n) \leq \psi(t) \leq \psi(x_{n+1}).$$

Par définition de la suite, $\psi(x_n) = x_{n-1}$ et $\psi(x_{n+1}) = x_n$. Ainsi :

$$t - t^2 \in [x_{n-1}, x_n].$$

On a même $\psi([x_n, x_{n+1}]) = [x_{n-1}, x_n]$, par continuité et monotonie.

(b) Formule sur le premier intervalle ajouté.

On a $x_1 = -1$ et $x_0 = -2$. D'après 2.1(a), pour $t \in [x_1, x_2]$, $\psi(t) \in [x_0, x_1] = [-2, -1]$. Les hypothèses H_2 et H_3 donnent alors :

$$F'(t) = F(\psi(t)) = f(\psi(t)).$$

Comme F est de classe C^1 , le théorème fondamental du calcul intégral est applicable sur $[x_1, x]$:

$$F(x) - F(x_1) = \int_{x_1}^x f(t - t^2) dt.$$

Or $F(x_1) = f(x_1)$, puisque $x_1 = -1$ appartient au segment initial. On obtient la formule demandée :

$$F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^x f(t - t^2) dt.$$

(c) Formule sur les intervalles suivants.

Pour $n \geq 2$, $[x_n, x_{n+1}] \subset [-1, 0]$. Sur cet intervalle, H_3 assure $F'(t) = F(t - t^2)$, et le théorème fondamental du calcul intégral donne :

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t - t^2) dt.$$

Pour tout t dans l'intégrale, 2.1(a) assure que $t - t^2 \in [x_{n-1}, x_n]$. Si F est connue sur ce dernier intervalle, l'intégrande est donc connue, ainsi que la valeur $F(x_n)$ à son extrémité. La formule détermine entièrement F sur $[x_n, x_{n+1}]$.

(d) Réunion des intervalles et unicité.

Tous les intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ sont contenus dans $[-2, 0[$, puisque $x_0 = -2$ et tous les termes sont strictement négatifs.

Réciproquement, soit $t \in [-2, 0[$. Comme $x_n \rightarrow 0$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $x_k > t$. En prenant le plus petit de ces entiers, on a $x_{k-1} \leq t < x_k$. Ainsi $t \in [x_{k-1}, x_k]$.

$$I = \bigcup_{n \geq 0} [x_n, x_{n+1}] = [-2, 0[.$$

Soient deux solutions F_1, F_2 de P_0 . Elles coïncident sur $[x_0, x_1]$ car elles y valent f . La formule de 2.1(b) les rend égales sur $[x_1, x_2]$, puis celle de 2.1(c) propage cette égalité de proche en proche à tous les intervalles.

Elles coïncident donc sur I . Elles sont continues en 0 par H_1 , donc

$$F_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_2(x) = F_2(0).$$

Il existe ainsi au plus une solution de P_0 .

2. Existence d'une solution F .

(a) Construction et raccordement des dérivées.

Question adaptée au programme actuel : la relation donnant $F'(x)$ à partir de $F(x - x^2)$ et les raccordements en x_n sont demandés pour $n \geq 1$. Sur l'intervalle initial $[x_0, x_1]$, la dérivée est simplement f' ; l'argument $x - x^2$ peut y sortir du domaine déjà construit.

Au rang 0, on pose $F = f$ sur $[x_0, x_1]$, ce qui donne une fonction de classe C^1 sur cet intervalle.

Supposons la fonction construite et continue jusqu'à x_n . Pour $x \in [x_n, x_{n+1}]$, on utilise :

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(\psi(t)) dt.$$

Par 2.1(a), $\psi(t)$ appartient à l'intervalle précédent, où F est continue. La composée $t \mapsto F(\psi(t))$ est donc continue. Le théorème fondamental du calcul intégral assure que le nouveau morceau est de classe C^1 , avec :

$$F'(x) = F'(\psi(x)) = F'(x - x^2).$$

À l'extrémité gauche x_n , l'intégrale vaut 0 : le nouveau morceau a exactement la valeur

déjà attribuée à $F(x_n)$. Les valeurs se raccordent donc à chaque étape, et la fonction est bien définie sur I .

Au premier raccordement $x_1 = -1$, on a :

$$F'_-(x_1) = f'(-1) = f(-2), \quad F'_+(x_1) = F(\psi(x_1)) = F(x_0) = f(-2).$$

La condition imposée sur f donne l'égalité des deux dérivées. Chaque dérivée est continue jusqu'à l'extrémité de son morceau et a la même limite ; la dérivée de la fonction raccordée est donc continue en x_1 .

Pour $n \geq 2$, la relation différentielle vaut sur chacun des deux morceaux adjacents. Leurs dérivées unilatérales sont :

$$F'_-(x_n) = F(\psi(x_n)) = F(x_{n-1}), \quad F'_+(x_n) = F(\psi(x_n)) = F(x_{n-1}).$$

Les deux limites sont égales et, par continuité de $F \circ \psi$ sur chaque morceau, les dérivées se raccordent continûment en x_n .

Les points x_n ont pour seule limite 0, qui n'appartient pas à I . Tout point de I est donc soit intérieur à un morceau, soit un raccordement isolé, soit l'extrémité -2 . Les vérifications précédentes donnent :

$$F \in C^1([-2, 0[), \quad F'(x) = F(x - x^2) \quad (-1 \leq x < 0).$$

(b) Positivité et monotonie.

Sur l'intervalle initial, $F = f \geq 0$. Sur $[x_1, x_2]$, on a $F'(x) = f(\psi(x)) \geq 0$. La fonction est donc croissante au sens large, et $F(x) \geq F(x_1) = f(-1) \geq 0$.

Supposons que F soit positive ou nulle jusqu'à x_n . Pour $x \in [x_n, x_{n+1}]$, $\psi(x) \in [x_{n-1}, x_n]$ et donc $F'(x) = F(\psi(x)) \geq 0$. Le nouveau morceau est croissant et toutes ses valeurs sont au moins $F(x_n) \geq 0$.

Par récurrence, $F \geq 0$ sur I , et $F'(x) \geq 0$ pour $-1 \leq x < 0$. Comme F est de classe C^1 sur cet intervalle, on conclut que F est croissante sur $[-1, 0[$. Il n'est pas affirmé qu'elle

soit croissante sur $[-2, -1]$, où f est quelconque sous les hypothèses données.

(c) Majoration à l'aide de w_n .

La fonction f est continue sur le segment non vide $[-2, -1]$, donc elle y admet un maximum fini $M \geq 0$.

On démontre par récurrence sur $n \geq 0$ que, pour tout $x \in [-2, x_{n+1}]$:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{Mw_n}{2}.$$

Au rang 0, $w_0 = 2$ et $[-2, x_1] = [-2, -1]$. L'inégalité devient $0 \leq f(x) \leq M$, qui est satisfaite.

Supposons la propriété établie au rang $n - 1$, avec $n \geq 1$, et posons $K = Mw_{n-1}/2$. Pour $x \in [x_n, x_{n+1}]$, la valeur $F(x_n)$ est au plus K . De même, pour $t \in [x_n, x]$, l'argument $\psi(t)$ est dans $[x_{n-1}, x_n]$, donc $0 \leq F(\psi(t)) \leq K$.

La formule de construction donne :

$$0 \leq F(x) \leq K + K(x - x_n) \leq K(1 + x_{n+1} - x_n) = K(1 + u_n) = \frac{Mw_n}{2}.$$

Pour les points des intervalles précédents, l'hypothèse de récurrence donne $F(x) \leq K \leq Mw_n/2$, puisque $1 + u_n > 1$. La propriété vaut ainsi sur tout $[-2, x_{n+1}]$.

D'après la partie 1, $w_n \leq e^2 < 9$ pour tout n . Tout point de I appartient à l'un de ces segments, donc :

$$0 \leq F(x) \leq \frac{9M}{2} \quad (-2 \leq x < 0).$$

La fonction F est donc majorée sur I , y compris lorsque $M = 0$.

(d) Prolongement en 0 et solution de P_0 .

Sur $[-1, 0[$, la fonction F est croissante et majorée. Le théorème de la limite monotone pour les fonctions donne une limite finie :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x), \quad 0 \leq L \leq \frac{9M}{2}.$$

En posant $F(0) = L$, on rend F continue sur $[-2, 0]$.

Pour $-1 \leq x < 0$, $F'(x) = F'(\psi(x))$. Lorsque $x \rightarrow 0^-$, $\psi(x) = x - x^2 \rightarrow 0^-$, donc, par la définition de la limite de F :

$$F'(x) \rightarrow L.$$

Théorème du prolongement de la dérivée à une extrémité : si une fonction est continue sur un intervalle incluant son extrémité b , est de classe C^1 avant cette extrémité, et si sa dérivée admet une limite finie ℓ lorsque $x \rightarrow b^-$, alors la fonction est dérivable à gauche en b , de dérivée ℓ , et sa dérivée se prolonge continûment à cette extrémité.

Les hypothèses viennent d'être vérifiées, avec $b = 0$ et $\ell = L$. Ainsi :

$$F \in C^1([-2, 0]), \quad F'(0) = L = F(0).$$

On peut également vérifier directement la conclusion du théorème ici. Pour $x < 0$ assez proche de 0, le théorème des accroissements finis sur $[x, 0]$ donne un $c_x \in]x, 0[$ tel que $(F(0) - F(x))/(0 - x) = F'(c_x)$. Comme $c_x \rightarrow 0^-$ et $F'(c_x) \rightarrow L$, la dérivée à gauche en 0 vaut bien L .

La construction assure H_2 , et l'équation de H_3 est déjà satisfaite pour $-1 \leq x < 0$. En 0, elle devient $F'(0) = F'(0 - 0^2) = F'(0)$, qui vient d'être vérifiée. La fonction construite satisfait donc les trois hypothèses de P_0 .

Avec l'unicité de 2.1(d), le problème P_0 admet exactement une solution.

3. Étude du signe de L .

(a) Signe de la valeur en 0.

La construction donne $F(x) \geq 0$ pour $x < 0$. En passant à la limite en 0, on obtient $L \geq 0$. La monotonie sur $[-1, 0]$ donne plus précisément $L \geq f(-1) \geq 0$.

Le nombre L peut être nul, notamment si f est la fonction nulle. La condition exacte est déterminée à la question suivante.

(b) Condition nécessaire et suffisante pour $L = 0$.

Si f est nulle sur $[-2, -1]$, alors $M = 0$ et la majoration de 2.2(c) impose $F(x) = 0$ sur I . Son prolongement en 0 donne $L = 0$.

Réciproquement, supposons $L = 0$. La fonction F est positive ou nulle et croissante sur $[-1, 0]$. Ainsi, pour tout x de cet intervalle, $0 \leq F(x) \leq F(0) = 0$; donc F y est identiquement nulle.

Pour $x \in [-1, x_2]$, sa dérivée à l'intérieur de cet intervalle est nulle, tandis que l'équation donne $F'(x) = f(\psi(x))$. L'image de $] -1, x_2[$ par ψ est $] -2, -1[$. Par conséquent, f est nulle sur $] -2, -1[$ et, par continuité, également aux deux extrémités.

$$L = 0 \iff f \equiv 0 \text{ sur } [-2, -1].$$

Ainsi $L > 0$ si et seulement si la fonction positive ou nulle f n'est pas identiquement nulle.

Partie 3

On utilisera constamment la propriété $0 \leq \psi(t) = t - t^2 \leq 1/4$ pour $0 \leq t \leq 1$. Elle découle des variations de la partie 1, ou de la formule $\psi(t) = 1/4 - (t - 1/2)^2$. On a également $\psi(t) \leq t$ sur cet intervalle.

1. Propriétés de l'application Φ .

(a) Structure vectorielle et linéarité.

L'ensemble $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel. La fonction nulle appartient à E , puisqu'elle vérifie l'équation demandée.

Si $u, v \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $au + bv$ est de classe C^1 , et, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$(au + bv)'(x) = au'(x) + bv'(x) = au(\psi(x)) + bv(\psi(x)) = (au + bv)(\psi(x)).$$

Ainsi $au + bv \in E$. L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de $C^1([0, 1], \mathbb{R})$, et par conséquent un espace vectoriel réel.

Pour les mêmes fonctions et scalaires :

$$\Phi(au + bv) = (au + bv)(0) = au(0) + bv(0) = a\Phi(u) + b\Phi(v).$$

L'application $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est donc linéaire.

(b) Noyau de Φ .

Soit $g \in \text{Ker } \Phi$; ainsi $g(0) = 0$. La fonction $|g|$ est continue sur le segment $[0, 1/4]$, donc elle y atteint un maximum fini $M \geq 0$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, l'équation de E et l'inclusion $\psi(t) \in [0, 1/4]$ donnent :

$$|g'(t)| = |g(\psi(t))| \leq M.$$

L'inégalité des accroissements finis, appliquée entre 0 et $x \in [0, 1]$, est donc utilisable et donne :

$$|g(x)| = |g(x) - g(0)| \leq M|x - 0| = Mx.$$

Sur $[0, 1/4]$, cette inégalité fournit $|g(x)| \leq M/4$. En prenant le maximum sur ce segment, on obtient $M \leq M/4$. Comme $M \geq 0$, cela impose $M = 0$.

La borne $|g(x)| \leq Mx$ donne alors $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Ainsi $\text{Ker } \Phi = \{0\}$, et l'application linéaire Φ est injective.

2. Étude d'une suite de fonctions (g_n) .

(a) Premiers polynômes.

Comme $g_0(t) = 1$, la formule de récurrence donne :

$$g_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \, dt = 1 + x.$$

Ensuite $g_1(t - t^2) = 1 + t - t^2$, donc :

$$g_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t - t^2) \, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

(b) Caractère polynomial et degré.

Le polynôme g_0 est constant non nul, de degré $d_0 = 0$. Supposons g_n polynomial, de degré d_n , avec coefficient dominant $a_n \neq 0$.

La composée $g_n(t - t^2)$ est un polynôme. Son terme de plus haut degré est $a_n(-1)^{d_n}t^{2d_n}$: il provient uniquement du terme dominant de g_n , donc son coefficient est non nul.

En intégrant ce polynôme entre 0 et x et en ajoutant 1, on obtient encore un polynôme, dont le terme de plus haut degré est :

$$\frac{a_n(-1)^{d_n}}{2d_n + 1} x^{2d_n+1}.$$

Comme ce coefficient est non nul et $2d_n + 1 \geq 1$, l'ajout de la constante ne modifie pas le degré. Ainsi :

$$d_{n+1} = 2d_n + 1.$$

Posons $e_n = d_n + 1$. Alors $e_{n+1} = 2e_n$ et $e_0 = 1$, donc $e_n = 2^n$. On conclut :

$$d_n = 2^n - 1 \quad (n \geq 0).$$

La récurrence montre simultanément que tous les g_n sont des polynômes non nuls.

(c) Majoration des différences successives.

La récurrence doit porter sur une assertion valable pour tous les $x \in [0, 1]$, car on l'appliquera ensuite au point $\psi(t)$.

Au rang $n = 0$, on a $g_1(x) - g_0(x) = x$, donc $0 \leq g_1(x) - g_0(x) \leq x/1!$.

Supposons que, pour tout $s \in [0, 1]$, $0 \leq g_{n+1}(s) - g_n(s) \leq s^{n+1}/(n+1)!$. La différence des deux formules intégrales donne :

$$g_{n+2}(x) - g_{n+1}(x) = \int_0^x (g_{n+1}(\psi(t)) - g_n(\psi(t))) dt.$$

Pour $0 \leq t \leq x \leq 1$, on a $0 \leq \psi(t) \leq t \leq 1$. L'hypothèse de récurrence est donc applicable, et :

$$0 \leq g_{n+1}(\psi(t)) - g_n(\psi(t)) \leq \frac{\psi(t)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et x , on obtient :

$$0 \leq g_{n+2}(x) - g_{n+1}(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x t^{n+1} dt = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

La propriété est donc héréditaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(d) Convergence pour chaque point x .

Méthode 1 — Somme télescopique et série exponentielle.

Pour x fixé, 3.2(c) montre que $(g_n(x))$ est croissante. En sommant les différences jusqu'au rang $n-1$, on a :

$$g_n(x) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}.$$

La série exponentielle converge et a pour somme e^x . Comme $x \geq 0$, tous ses termes sont positifs ou nuls ; ses sommes partielles sont donc au plus e^x .

Ainsi $1 \leq g_n(x) \leq e^x$. La suite réelle est croissante et majorée ; elle converge vers un réel $g(x)$, avec :

$$1 \leq g(x) \leq e^x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Méthode 2 — Majoration par récurrence dans la formule intégrale.

On conserve la croissance établie en 3.2(c). Pour établir la majoration par une autre voie,

on part de $g_0(x) = 1 \leq e^x$ sur $[0, 1]$.

Si $g_n(s) \leq e^s$ pour tout $s \in [0, 1]$, alors, comme $0 \leq \psi(t) \leq t$ et l'exponentielle est croissante :

$$g_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x g_n(\psi(t)) dt \leq 1 + \int_0^x e^{\psi(t)} dt \leq 1 + \int_0^x e^t dt = e^x.$$

La récurrence donne la borne pour tous les n . Le théorème de la limite monotone fournit encore la convergence vers $g(x)$.

La première méthode relie la majoration aux sommes partielles de l'exponentielle ; la seconde utilise directement la récurrence intégrale.

3. Étude de la fonction limite g .

(a) Contrôle explicite de l'erreur.

Pour $p \geq 1$, une somme télescopique donne :

$$g_{n+p}(x) - g_n(x) = \sum_{j=n}^{n+p-1} (g_{j+1}(x) - g_j(x)).$$

En utilisant 3.2(c) terme à terme et en posant $k = j + 1$, on obtient :

$$0 \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}.$$

Pour $p = 0$, les deux membres sont nuls, avec la convention qu'une somme vide vaut 0.

La formule vaut donc pour tous $n, p \in \mathbb{N}$.

Fixons n et x . La suite $g_{n+p}(x)$ tend vers $g(x)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$. La série exponentielle assure également que la somme du membre de droite converge. Le passage à la limite

dans cette inégalité de nombres réels donne :

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

La dernière majoration utilise $0 \leq x \leq 1$. Notons :

$$R_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

On a $R_n \geq 0$, $R_n \rightarrow 0$ et, pour tous $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq R_n.$$

Ce contrôle est indépendant de x . On l'emploiera directement pour la continuité et les intégrales, sans supposer connu un théorème général sur les limites de fonctions.

(b) Continuité de g .

Méthode 1 — Décomposition de l'erreur et choix de n , puis de h .

Si $x, x + h \in [0, 1]$, l'inégalité triangulaire donne :

$$|g(x + h) - g(x)| \leq |g(x + h) - g_n(x + h)| + |g_n(x + h) - g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)|.$$

Les deux termes d'erreur sont au plus R_n , d'après 3.3(a). Ainsi :

$$|g(x + h) - g(x)| \leq 2R_n + |g_n(x + h) - g_n(x)|,$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Fixons maintenant $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Comme $R_n \rightarrow 0$, choisissons n tel que $2R_n < \varepsilon/2$. Le polynôme g_n est continu en x , donc il existe $\delta > 0$ tel que, pour $|h| < \delta$ et $x + h \in [0, 1]$, $|g_n(x + h) - g_n(x)| < \varepsilon/2$.

L'inégalité précédente donne alors $|g(x + h) - g(x)| < \varepsilon$. Ceci est la définition de la continuité de g en x , avec une continuité relative à $[0, 1]$ aux extrémités. Comme x est quelconque, g est continue sur $[0, 1]$.

Méthode 2 — Borne commune des dérivées et accroissements finis.

Pour $n \geq 1$, la formule intégrale et le caractère polynomial donnent $g'_n(t) = g_{n-1}(\psi(t))$. Les bornes de 3.2(d) fournissent :

$$0 \leq g'_n(t) \leq e^{\psi(t)} \leq e^{1/4} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Pour $n = 0$, la dérivée est nulle, donc la même borne reste vraie. L'inégalité des accroissements finis sur le segment reliant x à $x + h$ donne :

$$|g_n(x + h) - g_n(x)| \leq e^{1/4}|h|.$$

Les deux valeurs $g_n(x + h)$ et $g_n(x)$ convergent vers les valeurs correspondantes de g . Par les opérations sur les limites réelles et la continuité de la valeur absolue, on peut passer à la limite dans cette inégalité :

$$|g(x + h) - g(x)| \leq e^{1/4}|h|.$$

Pour $\varepsilon > 0$, le choix $|h| < \varepsilon e^{-1/4}$ rend le membre de droite strictement inférieur à ε . La continuité de g est donc établie. Cette méthode donne en plus une borne linéaire des accroissements de la fonction limite.

La première preuve suit le choix successif demandé par l'énoncé ; la seconde utilise une borne des dérivées valable pour tous les polynômes approximants.

(c) Passage à la limite dans les intégrales.

Fixons $x \in [0, 1]$. Les fonctions g et g_n sont continues sur $[0, 1]$, et $\psi(t) \in [0, 1/4]$ pour $t \in [0, x]$. Les deux intégrandes sont donc continues et leurs intégrales existent.

La majoration de 3.3(a), appliquée au point $\psi(t)$, donne :

$$0 \leq g(\psi(t)) - g_n(\psi(t)) \leq R_n.$$

La linéarité et la croissance de l'intégrale sur un segment entraînent :

$$0 \leq \int_0^x g(t - t^2) dt - \int_0^x g_n(t - t^2) dt \leq xR_n \leq R_n.$$

Comme $R_n \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement donne la limite nulle demandée. Ce passage à la limite est justifié par cette estimation explicite.

La définition des approximants s'écrit $g_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x g_n(t - t^2) dt$. À gauche, $g_{n+1}(x) \rightarrow g(x)$; à droite, l'estimation précédente donne la limite de l'intégrale. Ainsi :

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t - t^2) dt \quad (0 \leq x \leq 1).$$

(d) Appartenance à E et normalisation.

La fonction $t \mapsto g(t - t^2)$ est continue sur $[0, 1]$, comme composée de fonctions continues dont les domaines sont compatibles.

Le théorème fondamental du calcul intégral appliqué à l'identité de 3.3(c) assure que g est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que :

$$g'(x) = g(x - x^2).$$

La relation vaut aux extrémités avec les dérivées unilatérales. Donc $g \in E$. En prenant $x = 0$ dans la formule intégrale, on obtient $g(0) = 1$, soit $\Phi(g) = 1$.

4. Résolution du problème P_1 .

(a) Bijection et dimension.

La question 3.1(b) a établi que Φ est injective. Pour tout réel a , la fonction ag appartient à E par sa structure vectorielle, et $\Phi(ag) = ag(0) = a$. Ainsi Φ est aussi surjective sur $\mathbb{R}$, donc bijective.

Pour déterminer la dimension sans supposer au préalable que E est de dimension finie,

soit $u \in E$ et posons $a = u(0)$. Alors $u - ag \in E$ et $\Phi(u - ag) = 0$. L'injectivité impose $u = ag$.

Ainsi $E = \text{Vect}(g)$. Comme $g(0) = 1$, la fonction g n'est pas nulle : la famille (g) est une base de E .

$\dim E = 1$.

(b) Existence et unicité de P_1 .

Notons F_0 l'unique solution du problème P_0 sur $[-2, 0]$, établie dans la partie 2, et $L = F_0(0)$. On a $F'_0(0) = L$.

Sur $[0, 1]$, une extension recherchée doit appartenir à E et avoir pour valeur en 0 le nombre L . La bijectivité de Φ montre que la seule possibilité est la fonction Lg .

Définissons donc :

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0(x), & -2 \leq x \leq 0, \\ Lg(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les définitions coïncident en 0 puisque $Lg(0) = L = F_0(0)$, donc la fonction est continue en ce point. Les deux morceaux sont de classe C^1 , et leurs dérivées unilatérales en 0 satisfont :

$$(F_1)'_-(0) = F'_0(0) = L, \quad (F_1)'_+(0) = Lg'(0) = Lg(0) = L.$$

Les deux dérivées sont continues jusqu'en 0 et se raccordent avec la même valeur. Ainsi F_1 est de classe C^1 sur $[-2, 1]$.

Sur $[-2, -1]$, $F_1 = f$. Pour $x \in [-1, 0]$, on a $\psi(x) \in [-2, 0]$, et l'équation de P_0 donne $F'_1(x) = F_0(\psi(x)) = F_1(\psi(x))$.

Pour $x \in [0, 1]$, on a $\psi(x) \in [0, 1/4]$; comme $g \in E$, on obtient $F'_1(x) = Lg'(x) = Lg(\psi(x)) = F_1(\psi(x))$. En 0, cette égalité est compatible avec les deux dérivées déjà calculées.

La fonction F_1 satisfait donc les trois hypothèses de P_1 .

Pour l'unicité, toute solution de P_1 se restreint sur $[-2, 0]$ en une solution de P_0 , donc coïncide avec F_0 . Sa restriction à $[0, 1]$ appartient à E et a pour valeur initiale L ; la bijectivité de Φ impose qu'elle soit Lg .

Le problème P_1 admet donc exactement une solution, donnée par la formule précédente. Si f est nulle, $L = 0$ et cette formule donne également la solution nulle, sans division par L .

5. Résolution du problème P_2 .

(a) Identité de symétrie.

Soit F une solution de P_2 et posons $H(x) = F(x) + F(1-x)$ pour $x \in [-1, 2]$. Les arguments x et $1-x$ appartiennent tous deux à $[-1, 2]$, donc la fonction est bien définie et de classe C^1 .

On remarque que :

$$\psi(1-x) = (1-x) - (1-x)^2 = x - x^2 = \psi(x).$$

Sur $[-1, 2]$, les valeurs de ψ appartiennent à $[-2, 1/4]$, donc les expressions qui suivent sont également définies. L'équation de P_2 s'applique à x et à $1-x$, et donne :

$$H'(x) = F'(x) - F'(1-x) = F(\psi(x)) - F(\psi(1-x)) = 0.$$

Une fonction continue sur un segment et dérivable à l'intérieur, dont la dérivée est nulle, est constante, par le théorème des accroissements finis. Ainsi :

$$F(x) + F(1-x) = C \quad (-1 \leq x \leq 2),$$

où la constante peut s'évaluer en $x = 0$: $C = F(0) + F(1)$.

(b) Construction et unicité sur $[-2, 2]$.

Méthode 1 — Utilisation de la symétrie établie.

Notons F_1 l'unique solution de P_1 et posons $C = F_1(0) + F_1(1)$. Toute solution de P_2 se

restreint nécessairement en F_1 sur $[-2, 1]$, et l'identité de 3.5(a) impose alors, pour $x \in [1, 2]$:

$$F(x) = C - F_1(1 - x).$$

L'argument $1 - x$ appartient à $[-1, 0]$, où F_1 est déjà définie. Il existe donc au plus une solution, et la seule candidate est :

$$F_2(x) = \begin{cases} F_1(x), & -2 \leq x \leq 1, \\ C - F_1(1 - x), & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Vérifions qu'elle est effectivement une solution. En $x = 1$, la deuxième formule donne $C - F_1(0) = F_1(1)$: les valeurs se raccordent.

Sur le nouveau morceau, la dérivation d'une composée donne $F_2'(x) = F_1'(1 - x)$. À droite de 1, la dérivée tend donc vers $F_1'(0) = F_1'(1)$. À gauche, la dérivée vaut $F_1'(1) = F_1'(1 - 1^2) = F_1'(0)$. Elles ont la même limite, et chaque dérivée est continue sur son morceau.

La fonction F_2 est donc de classe C^1 sur $[-2, 2]$. Elle vaut f sur $[-2, -1]$.

Pour $x \in [-1, 1]$, la relation différentielle est déjà celle de F_1 , et $\psi(x) \in [-2, 1/4]$, intervalle sur lequel $F_2 = F_1$. Elle reste donc valable pour F_2 .

Pour $x \in [1, 2]$, on a $1 - x \in [-1, 0]$ et $\psi(x) \in [-2, 0]$. En utilisant l'équation de F_1 en $1 - x$ et l'identité de symétrie de ψ :

$$F_2'(x) = F_1'(1 - x) = F_1'(\psi(1 - x)) = F_1'(\psi(x)) = F_2'(\psi(x)).$$

Ces égalités sont également valables en 1 et en 2 avec les dérivées appropriées. Les trois hypothèses de P_2 sont satisfaites. Avec l'unicité déjà établie, le problème admet exactement une solution, la fonction F_2 .

Méthode 2 — Intégration sur le dernier intervalle.

Pour $t \in [1, 2]$, $\psi(t) \in [-2, 0]$, de sorte que le membre de droite de l'équation est entièrement connu à partir de F_1 . Toute solution doit donc vérifier, par le théorème fondamental du calcul intégral :

$$F(x) = F_1(1) + \int_1^x F_1(t - t^2) dt \quad (1 \leq x \leq 2).$$

Cette formule fournit une unique extension continue et de classe C^1 sur ce segment, puisque l'intégrande est continue. Sa dérivée à droite en 1 vaut $F_1(0)$, égale à la dérivée à gauche $F_1'(1)$. Le raccordement est donc de classe C^1 .

Sur $[1, 2]$, sa dérivée est $F_1(\psi(x)) = F(\psi(x))$ puisque $\psi(x) \in [-2, 0]$. Sur le reste du domaine, la relation de P_1 est conservée. La formule intégrale donne ainsi également une solution unique de P_2 .

Enfin, la fonction $t \mapsto -F_1(1 - t)$ a pour dérivée $F_1'(1 - t) = F_1(\psi(t))$ sur $[1, 2]$. En intégrant cette identité, on obtient :

$$\int_1^x F_1(t - t^2) dt = F_1(0) - F_1(1 - x).$$

L'extension intégrale est donc exactement $F_1(1) + F_1(0) - F_1(1 - x) = C - F_1(1 - x)$, comme dans la première méthode.

La première construction exploite la symétrie demandée ; la seconde utilise le fait que l'argument de la dérivée reste dans une partie du domaine où la fonction est déjà connue.

Relevé des adaptations

- 1.2(a) : la définition de x_n à partir de x_{n-1} est demandée pour $n \geq 1$, au lieu de tous les entiers naturels. Le terme x_0 est donné et aucun x_{-1} n'est défini.

- 2.1(a) : ajout de la condition $n \geq 1$, nécessaire pour que l'intervalle $[x_{n-1}, x_n]$ soit défini.
- 2.2(a) : distinction entre le morceau initial $n = 0$, où $F' = f'$, et les morceaux $n \geq 1$, où $F'(x) = F(x - x^2)$. Les dérivées aux raccordements x_n sont étudiées pour $n \geq 1$. Cette précision évite d'utiliser une valeur de F hors de son domaine sur le segment initial.