



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1997

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, on considère un nombre entier $p \geq 1$ et, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 2p$, on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à k . Dans la partie 1, on munit $\mathbb{R}_{2p}[X]$ d'un produit scalaire permettant d'obtenir un ajustement affine d'une famille de points du plan à l'aide de la méthode des moindres carrés, puis, dans les parties 2 et 3, on utilise ce produit scalaire pour étudier un ajustement polynomial de cette famille de points.

Les parties 2 et 3 du problème sont indépendantes de la partie 1, sous réserve d'utiliser le produit scalaire et les notations définis ci-dessous.

Partie 1

1. Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

On pose, pour tout couple (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}_{2p}[X]$:

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p A(i)B(i).$$

Dans cette formule, l'indice i prend les valeurs $-p, -(p-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, p-1, p$.

Prouver que l'application $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

Dans toute la suite du problème, $\mathbb{R}_{2p}[X]$ est muni de ce produit scalaire et l'on pose, pour tout polynôme A de $\mathbb{R}_{2p}[X]$:

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}, \quad m(A) = \langle A, 1 \rangle, \quad V(A) = \|A - m(A)\|^2, \quad \sigma(A) = \sqrt{V(A)}.$$

Pour tout couple (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, on définit de plus :

$$\text{Cov}(A, B) = \langle A - m(A), B - m(B) \rangle.$$

Dans les expressions polynomiales, un réel désigne aussi le polynôme constant de cette valeur.

2. Propriétés du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.(a) Que vaut $\|1\|$, norme du polynôme constant égal à 1 ?

2.(b) Établir, pour tout couple (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, les quatre propriétés :

$$(1) \quad V(A) = \|A\|^2 - [m(A)]^2.$$

$$(2) \quad \text{Cov}(A, B) = \langle A, B \rangle - m(A)m(B).$$

$$(3) \quad \langle A, B \rangle = 0 \text{ lorsque } A \text{ est pair et } B \text{ impair.}$$

$$(4) \quad \langle XA, B \rangle = \langle A, XB \rangle \text{ lorsque } A \text{ et } B \text{ sont de degré au plus } 2p - 1.$$

XA et XB désignent ici les fonctions polynômes $x \mapsto xA(x)$ et $x \mapsto xB(x)$.

3. Détermination des normes des polynômes X et X^2 .

3.(a) Développer $(i+1)^3$ par la formule du binôme et, en sommant les égalités obtenues pour les entiers i tels que $-p \leq i \leq p$, déterminer $\|X\|^2$.

3.(b) Développer $(i+1)^5$ par la formule du binôme et, en procédant de même, montrer que :

$$\|X^2\|^2 = \frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}.$$

4. Meilleure approximation d'un polynôme A par une constante.

4.(a) Prouver, pour tout polynôme A de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, que $m(A)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$.

4.(b) En déduire, pour toute constante b , l'égalité $\|A - b\|^2 = V(A) + (m(A) - b)^2$, et montrer que le minimum de $\|A - b\|^2$ lorsque b décrit $\mathbb{R}$ est atteint si et seulement si $b = m(A)$, et qu'il est égal à $V(A)$.

4.(c) À quelle condition nécessaire et suffisante sur le degré du polynôme A a-t-on $V(A) \neq 0$? Montrer qu'alors $\left(1, \frac{A - m(A)}{\sigma(A)}\right)$ est une base orthonormale du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(1, A)$.

5. Meilleure approximation d'un polynôme B par un polynôme de $\text{Vect}(1, A)$.

On donne des polynômes A, B de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, A étant de degré supérieur ou égal à 1, et on cherche des nombres réels a et b minimisant l'expression $\|B - aA - b\|^2$.

5.(a) On fixe dans cette question le nombre réel a . Montrer que le nombre réel b minimisant l'expression $\|B - aA - b\|^2$ est $b = m(B) - a m(A)$.

5.(b) Pour tout nombre réel a , on note alors $f(a) = \|(B - m(B)) - a(A - m(A))\|^2$.

Exprimer $f(a)$ en fonction de a , de $V(A)$, $V(B)$ et $\text{Cov}(A, B)$ et, en étudiant les variations de f , déterminer en fonction de ces quantités le minimum μ de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que la valeur a_0 de a qui le réalise.

Prouver que μ est le minimum de l'expression $\|B - aA - b\|^2$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

5.(c) Dédurre de ces résultats l'inégalité $|\text{Cov}(A, B)| \leq \sigma(A)\sigma(B)$. Dans quel cas y a-t-il égalité dans cette inégalité?

5.(d) Application : exprimer explicitement, en fonction de l'entier p et des valeurs $A(i), B(i)$ pour $-p \leq i \leq p$, le minimum de $\|B - aA - b\|^2$ ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

Partie 2

On donne une famille de $2p + 1$ points (i, y_i) du plan, où l'entier i prend les valeurs $-p, -(p-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, p-1, p$.

On désigne par k un entier tel que $0 \leq k \leq 2p$ et, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_k[X]$, on associe l'expression :

$$\Delta_k(P) = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p (y_i - P(i))^2.$$

On se propose d'établir que cette expression admet un minimum, noté δ_k , atteint pour un unique polynôme P_k de $\mathbb{R}_k[X]$.

1. Calcul du minimum δ_{2p} .

1.(a) Établir que l'application F définie de $\mathbb{R}_{2p}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2p+1}$ par :

$$F(P) = (P(-p), P(-(p-1)), \dots, P(-1), P(0), P(1), \dots, P(p-1), P(p))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En déduire qu'il existe un et un seul polynôme de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, noté Y dans la suite du problème, tel que $Y(i) = y_i$ pour tout entier i tel que $-p \leq i \leq p$.

1.(b) En déduire la valeur de δ_{2p} .

2. Existence et unicité de P_k et δ_k .

2.(a) Établir, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_k[X]$, que $\Delta_k(P) = \|P - Y\|^2$.

2.(b) En déduire l'existence et l'unicité du polynôme P_k de $\mathbb{R}_k[X]$ minimisant l'expression $\Delta_k(P)$ lorsque P décrit $\mathbb{R}_k[X]$, autrement dit tel que $\delta_k = \|P_k - Y\|^2$, et interpréter géométriquement P_k à l'aide de Y et du sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ de $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

2.(c) Déterminer P_0 et δ_0 , puis P_1 et δ_1 , en fonction de p , $m(Y)$, $V(Y)$ et $\text{Cov}(X, Y)$.

3. Détermination de P_k et δ_k à l'aide d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

On pose $B_0 = 1$ et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 2p$, on note B_k le projeté orthogonal de X^k sur la droite de $\mathbb{R}_k[X]$ orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

3.(a) Déterminer le polynôme B_1 .

3.(b) Prouver, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 2p$, que B_k est de degré k et unitaire, autrement dit que le coefficient de X^k dans B_k est 1. Établir ensuite que la famille $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.

En particulier, $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

3.(c) En exprimant Y dans cette base et en formant les produits scalaires $\langle B_i, Y \rangle$, établir

que :

$$Y = \sum_{i=0}^{2p} \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i.$$

3.(d) En déduire, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 2p$:

$$P_k = \sum_{i=0}^k \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i.$$

3.(e) En déduire, pour $1 \leq k \leq 2p$, l'expression de P_k en fonction de P_{k-1} , B_k et Y , puis celle de δ_k en fonction de δ_{k-1} , B_k et Y .

Partie 3

Dans cette partie, on se propose de déterminer par récurrence la suite des polynômes B_k définis dans la partie 2.

1. Parité de B_k .

On pose, pour $1 \leq k \leq 2p$, $A_k(X) = (-1)^k B_k(-X)$.

1.(a) Vérifier que A_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

1.(b) En déduire que $A_k = B_k$ et que B_k est de même parité que l'entier k .

2. Expression de XB_k dans la base $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$.

2.(a) Établir à l'aide de la propriété (3) de la partie 1 que $\langle XB_k, B_k \rangle = 0$ pour $0 \leq k < 2p$.

2.(b) Établir à l'aide de la propriété (4) de la partie 1 que $\langle XB_k, B_i \rangle = 0$ pour $2 \leq k \leq 2p-1$ et $0 \leq i \leq k-2$.

2.(c) En déduire qu'il existe, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 2p-1$, deux réels α_k, β_k tels que $XB_k = \alpha_k B_{k+1} + \beta_k B_{k-1}$. Que vaut α_k ?

2.(d) En remarquant que $XB_{k-1} - B_k$ appartient à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, montrer que :

$$\langle XB_{k-1}, B_k \rangle = \langle XB_k, B_{k-1} \rangle = \|B_k\|^2.$$

En déduire que $\beta_k = \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}$, donc que :

$$B_{k+1} = XB_k - \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}.$$

2.(e) À l'aide de ce résultat, expliciter en fonction de l'entier p , supposé supérieur ou égal à 2, les polynômes B_2 et B_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.