



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**ESSEC**

**Mathématiques 1**

**1997**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## Corrigé

### Partie 1

#### 1. Définition du produit scalaire.

Il faut vérifier la bilinéarité, la symétrie et le caractère défini positif. Toutes les sommes considérées sont finies.

Pour  $A, B, C \in \mathbb{R}_{2p}[X]$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , la distributivité donne :

$$\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle.$$

De plus,  $A(i)B(i) = B(i)A(i)$  pour chaque indice, donc  $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$ . La linéarité dans la seconde variable découle de ces deux propriétés.

Enfin,

$$\langle A, A \rangle = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p A(i)^2 \geq 0.$$

Si cette quantité est nulle, tous les termes, positifs ou nuls, sont nuls :  $A(i) = 0$  pour chacun des  $2p+1$  entiers distincts de  $-p$  à  $p$ . Un polynôme non nul de degré au plus  $2p$  ne peut avoir plus de  $2p$  racines distinctes. Ainsi,  $A = 0$ . Réciproquement,  $\langle 0, 0 \rangle = 0$ .

L'application donnée est donc un produit scalaire réel sur  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ .

Rectification de l'énoncé : la définition correcte est  $V(A) = \|A - m(A)\|^2$ . Le PDF omet le carré, ce qui est incompatible avec la propriété 2.(b)(1), la question 4.(b) et la normalisation de 4.(c). On utilise cette définition corrigée dans tout le problème.

#### 2.(a) Norme de la constante.

Les  $2p+1$  valeurs du polynôme 1 sont toutes égales à 1, d'où :

$$\|1\|^2 = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p 1 = 1.$$

Par définition, une norme est positive ou nulle. Ainsi,  $\|1\| = 1$ .

2.(b) Propriétés du produit scalaire.

Pour la propriété (1), on développe le carré de la norme, en identifiant  $m(A)$  au polynôme  $m(A)1$  :

$$V(A) = \langle A - m(A)1, A - m(A)1 \rangle = \|A\|^2 - 2m(A)\langle A, 1 \rangle + m(A)^2\|1\|^2.$$

Comme  $\langle A, 1 \rangle = m(A)$  et  $\|1\|^2 = 1$ , on obtient :

$$V(A) = \|A\|^2 - m(A)^2.$$

Pour la propriété (2), la bilinéarité donne :

$$\text{Cov}(A, B) = \langle A, B \rangle - m(B)\langle A, 1 \rangle - m(A)\langle 1, B \rangle + m(A)m(B)\langle 1, 1 \rangle.$$

Par symétrie,  $\langle 1, B \rangle = m(B)$ . Par conséquent :

$$\text{Cov}(A, B) = \langle A, B \rangle - m(A)m(B).$$

Pour la propriété (3), si  $A$  est pair et  $B$  impair, alors  $B(0) = 0$  et, pour  $1 \leq i \leq p$  :

$$A(-i)B(-i) + A(i)B(i) = A(i)(-B(i)) + A(i)B(i) = 0.$$

En regroupant les termes de la somme par paires d'indices opposés, on obtient  $\langle A, B \rangle = 0$ .

Pour la propriété (4), les hypothèses de degré assurent que  $XA$  et  $XB$  appartiennent à  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ . Alors :

$$\langle XA, B \rangle = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p iA(i)B(i) = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p A(i)iB(i) = \langle A, XB \rangle.$$

Les quatre propriétés sont établies.

3.(a) Calcul de  $\|X\|^2$ .

La méthode imposée utilise une somme télescopique. Posons

$$S_2 = \sum_{i=-p}^p i^2.$$

Le binôme donne :

$$(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1.$$

En sommant pour  $-p \leq i \leq p$ , le membre de gauche devient  $(p+1)^3 - (-p)^3 = (p+1)^3 + p^3$ . Par symétrie,

$$\sum_{i=-p}^p i = 0.$$

Ainsi :

$$(p+1)^3 + p^3 = 3S_2 + (2p+1).$$

Il en résulte :

$$3S_2 = 2p^3 + 3p^2 + p = p(p+1)(2p+1).$$

Puisque  $\|X\|^2 = S_2/(2p+1)$ , on conclut :

$$\|X\|^2 = \frac{p(p+1)}{3}.$$

Cette démonstration établit la somme des carrés nécessaire, sans la supposer connue.

3.(b) Calcul de  $\|X^2\|^2$ .

Posons

$$S_4 = \sum_{i=-p}^p i^4.$$

Le binôme donne :

$$(i+1)^5 - i^5 = 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1.$$

En sommant, les sommes des puissances impaires s'annulent par symétrie, tandis que le membre de gauche est  $(p+1)^5 + p^5$ . Par conséquent :

$$(p+1)^5 + p^5 = 5S_4 + 10S_2 + (2p+1).$$

La question précédente fournit  $S_2 = p(p+1)(2p+1)/3$ . En développant :

$$5S_4 = 2p^5 + 5p^4 + \frac{10}{3}p^3 - \frac{1}{3}p.$$

Pour contrôler la factorisation, on calcule :

$$p(p+1)(2p+1)(3p^2+3p-1) = 6p^5 + 15p^4 + 10p^3 - p.$$

Donc :

$$S_4 = \frac{p(p+1)(2p+1)(3p^2+3p-1)}{15}.$$

Enfin,  $\|X^2\|^2 = S_4/(2p+1)$ , d'où :

$$\|X^2\|^2 = \frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}.$$

4.(a) Projection sur les constantes.

Le sous-espace  $\mathbb{R}_0[X]$  est la droite engendrée par le vecteur unitaire 1. Le polynôme constant  $m(A)$  lui appartient et :

$$\langle A - m(A)1, 1 \rangle = m(A) - m(A)\|1\|^2 = 0.$$

Le résidu est donc orthogonal à toute constante. La caractérisation du projeté orthogonal donne :

$$\text{proj}_{\mathbb{R}_0[X]}(A) = m(A)1.$$

Ainsi, en identifiant une constante à sa valeur, le projeté est  $m(A)$ .

4.(b) Distance minimale aux constantes.

## Méthode 1 — Décomposition orthogonale.

---

Pour tout  $b \in \mathbb{R}$  :

$$A - b = (A - m(A)) + (m(A) - b)1.$$

Les deux termes sont orthogonaux par 4.(a). Le théorème de Pythagore donne :

$$\|A - b\|^2 = \|A - m(A)\|^2 + (m(A) - b)^2 \|1\|^2 = V(A) + (m(A) - b)^2.$$

Le second terme est positif ou nul et s'annule exactement lorsque  $b = m(A)$ . Le minimum est donc  $V(A)$ , atteint pour l'unique constante  $b = m(A)$ .

## Méthode 2 — Étude d'une fonction quadratique.

---

Par bilinéarité :

$$g(b) = \|A - b\|^2 = \|A\|^2 - 2bm(A) + b^2.$$

Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(b) = 2(b - m(A))$ . Elle est strictement décroissante avant  $m(A)$  et strictement croissante après. Son unique minimum vaut :

$$g(m(A)) = \|A\|^2 - m(A)^2 = V(A).$$

La première méthode explique géométriquement l'identité de distance ; la seconde retrouve la même approximation par une minimisation scalaire.

4.(c) Variance non nulle et base orthonormale.

Comme le produit scalaire est défini positif :

$$V(A) = 0 \iff A - m(A)1 = 0 \iff A \text{ est constant.}$$

Ainsi,  $V(A) \neq 0$  si et seulement si  $A$  est non constant, c'est-à-dire de degré au moins 1.

Cette formulation inclut correctement le polynôme nul, dont on n'a pas besoin de définir le degré ici.

Supposons désormais  $V(A) > 0$  et posons  $U = (A - m(A))/\sigma(A)$ . Le dénominateur est strictement positif. On a :

$$\langle 1, U \rangle = \frac{\langle 1, A - m(A) \rangle}{\sigma(A)} = 0, \quad \|U\|^2 = \frac{V(A)}{\sigma(A)^2} = 1.$$

Avec  $\|1\| = 1$ , la famille  $(1, U)$  est orthonormale, donc libre. De plus,  $U \in \text{Vect}(1, A)$  et  $A = m(A)1 + \sigma(A)U$ . Elle engendre donc ce sous-espace.

Par conséquent,  $\left(1, \frac{A - m(A)}{\sigma(A)}\right)$  est une base orthonormale de  $\text{Vect}(1, A)$ .

5.(a) Minimisation par rapport à la constante.

Question adaptée au programme actuel : rectification d'une erreur du PDF. La constante optimale n'est pas en général  $m(B)$  ; elle dépend de  $a$ .

À  $a$  fixé, on applique 4.(b) au polynôme  $B - aA$ . La linéarité de  $m$  donne :

$$m(B - aA) = m(B) - a m(A).$$

Ainsi :

$$\|B - aA - b\|^2 = V(B - aA) + (m(B) - a m(A) - b)^2.$$

Le premier terme est indépendant de  $b$ . Le second s'annule pour une unique valeur :

$$b = m(B) - a m(A).$$

La formule  $b = m(B)$  du PDF serait correcte seulement dans les cas où  $a m(A) = 0$ .

5.(b) Minimisation par rapport à  $a$ .

### Méthode 1 — Variations de la fonction demandée.

Posons  $A_c = A - m(A)$ ,  $B_c = B - m(B)$  et  $C = \text{Cov}(A, B)$ . Ces polynômes sont dans l'espace étudié et :

$$\|A_c\|^2 = V(A), \quad \|B_c\|^2 = V(B), \quad \langle A_c, B_c \rangle = C.$$

En développant :

$$f(a) = V(B) - 2aC + a^2V(A).$$

Puisque  $A$  est non constant, 4.(c) assure  $V(A) > 0$ . La fonction est dérivable et :

$$f'(a) = 2V(A) \left( a - \frac{C}{V(A)} \right).$$

Elle décroît strictement jusqu'à  $a_0 = C/V(A)$  puis croît strictement. Son unique minimum vaut :

$$\mu = f(a_0) = V(B) - \frac{C^2}{V(A)}.$$

Pour chaque couple  $(a, b)$ , 5.(a) fournit l'identité :

$$\|B - aA - b\|^2 = f(a) + (m(B) - am(A) - b)^2.$$

On obtient donc  $\|B - aA - b\|^2 \geq f(a) \geq \mu$ . L'égalité exige simultanément  $a = a_0$  et  $b = m(B) - a_0m(A)$ . Le minimum global est atteint pour l'unique couple :

$$a_0 = \frac{\text{Cov}(A, B)}{V(A)}, \quad b_0 = m(B) - \frac{\text{Cov}(A, B)}{V(A)}m(A).$$

## Méthode 2 — Projection sur une base orthonormale.

D'après 4.(c),  $(1, U)$ , où  $U = A_c/\sigma(A)$ , est une base orthonormale de  $\text{Vect}(1, A)$ . Le projeté orthogonal de  $B$  est donc :

$$Q = \langle B, 1 \rangle 1 + \langle B, U \rangle U.$$

Comme  $\langle B, A_c \rangle = \langle B_c, A_c \rangle = C$ , il vient :

$$Q = m(B)1 + \frac{C}{V(A)}(A - m(A)) = a_0A + b_0.$$

Par Pythagore, pour tout  $R \in \text{Vect}(1, A)$  :

$$\|B - R\|^2 = \|B - Q\|^2 + \|Q - R\|^2.$$

Le minimum est atteint uniquement pour  $R = Q$ . Comme 1 et  $A$  sont libres, ses coefficients  $(a_0, b_0)$  sont uniques. De plus :

$$\|B - Q\|^2 = \|B\|^2 - m(B)^2 - \frac{C^2}{V(A)} = V(B) - \frac{C^2}{V(A)} = \mu.$$

La première approche est celle des variations imposée par le sujet ; la seconde prépare l'ajustement polynomial de la partie 2.

5.(c) Inégalité de covariance et égalité.

### Méthode 1 — Positivité du minimum.

Le minimum  $\mu$  d'un carré de norme est positif ou nul. Comme  $V(A) > 0$  :

$$V(B) - \frac{\text{Cov}(A, B)^2}{V(A)} \geq 0.$$

En multipliant par  $V(A)$  et en prenant les racines carrées de quantités positives ou nulles :

$$|\text{Cov}(A, B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)} = \sigma(A)\sigma(B).$$

L'égalité équivaut à  $\mu = 0$ , donc à  $B - a_0A - b_0 = 0$  par le caractère défini positif. Elle a lieu exactement lorsque  $B \in \text{Vect}(1, A)$ , autrement dit lorsqu'il existe  $u, v \in \mathbb{R}$  tels que  $B = uA + v$ .

Ce cas inclut les polynômes  $B$  constants : leur variance et leur covariance avec  $A$  sont nulles.

### Méthode 2 — Cauchy-Schwarz.

On applique Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $A_c$  et  $B_c$  de l'espace euclidien :

$$|\langle A_c, B_c \rangle| \leq \|A_c\| \|B_c\|.$$

C'est exactement l'inégalité voulue. Comme  $A_c \neq 0$ , l'égalité a lieu si et seulement si  $B_c = uA_c$  pour un réel  $u$ . Cette relation équivaut à :

$$B = uA + (m(B) - um(A))1.$$

Ainsi, le cas d'égalité est encore  $B \in \text{Vect}(1, A)$ . L'approche par le minimum relie l'égalité à un ajustement exact ; Cauchy-Schwarz en explique l'origine euclidienne.

5.(d) Application aux valeurs sur les entiers.

Question adaptée au programme actuel : le PDF ne spécifie aucun choix particulier de  $A$  et  $B$  pour cette application. Le sujet corrigé demande donc la formule générale en fonction des données  $A(i), B(i)$ , sans leur attribuer arbitrairement de valeurs.

Posons  $n = 2p + 1$  et définissons les cinq sommes finies :

$$\begin{aligned} S_A &= \sum_{i=-p}^p A(i), \quad S_B = \sum_{i=-p}^p B(i), \quad S_{AA} = \sum_{i=-p}^p A(i)^2, \quad S_{BB} = \sum_{i=-p}^p B(i)^2, \quad S_{AB} \\ &= \sum_{i=-p}^p A(i)B(i). \end{aligned}$$

Les identités de 2.(b) donnent :

$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{S_A}{n}, \quad m(B) = \frac{S_B}{n}, \quad V(A) = \frac{nS_{AA} - S_A^2}{n^2}, \quad V(B) = \frac{nS_{BB} - S_B^2}{n^2}, \\ \text{Cov}(A, B) &= \frac{nS_{AB} - S_A S_B}{n^2}. \end{aligned}$$

Comme  $A$  est non constant,  $D = nS_{AA} - S_A^2 = n^2V(A) > 0$ . Toutes les divisions suivantes sont donc licites :

$$a_0 = \frac{nS_{AB} - S_A S_B}{D}.$$

$$b_0 = \frac{S_B - a_0 S_A}{n} = \frac{S_{AA} S_B - S_A S_{AB}}{D}.$$

$$\mu = \frac{n S_{BB} - S_B^2}{n^2} - \frac{(n S_{AB} - S_A S_B)^2}{n^2 D}.$$

Ces expressions, avec  $n = 2p + 1$ , déterminent complètement le minimum et l'unique couple réalisant ce minimum pour les polynômes donnés. Une valeur dépendant de  $p$  seul nécessiterait des données supplémentaires sur  $A$  et  $B$ , absentes du PDF.

## Partie 2

Le sujet rectifie la notation des points en  $(i, y_i)$  : l'expression  $\Delta_k(P)$  donnée dans le PDF porte sur  $P(i)$ , et non sur  $P(x_i)$ . Toutes les observations sont donc associées aux abscisses entières de  $-p$  à  $p$ .

1.(a) Isomorphisme d'évaluation et interpolation.

### Méthode 1 — Injectivité et dimension.

L'évaluation est linéaire : pour  $P, Q \in \mathbb{R}_{2p}[X]$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a  $F(\lambda P + \mu Q) = \lambda F(P) + \mu F(Q)$  coordonnée par coordonnée.

Si  $F(P) = 0$ , alors  $P$  s'annule sur  $2p + 1$  réels distincts. Le degré de  $P$  est au plus  $2p$  s'il est non nul, ce qui serait incompatible avec ce nombre de racines. Ainsi,  $\text{Ker } F = \{0\}$  et  $F$  est injective.

La base canonique  $(1, X, \dots, X^{2p})$  donne  $\dim \mathbb{R}_{2p}[X] = 2p + 1$ , égal à la dimension du but  $\mathbb{R}^{2p+1}$ . Le théorème du rang montre alors que  $F$  est surjective. C'est donc un isomorphisme.

Le vecteur  $(y_{-p}, \dots, y_p)$  possède ainsi un unique antécédent  $Y$ , caractérisé par  $Y(i) = y_i$  pour tous les indices.

## Méthode 2 — Construction explicite de l'interpolation.

Pour chaque  $i \in \{-p, \dots, p\}$ , définissons :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{-p \leq j \leq p \\ j \neq i}} \frac{X - j}{i - j}.$$

Les dénominateurs sont non nuls puisque les indices sont distincts. Chaque  $L_i$  est de degré  $2p$  et vérifie  $L_i(i) = 1$  et  $L_i(j) = 0$  pour  $j \neq i$  dans la grille.

Pour tout vecteur  $(z_{-p}, \dots, z_p)$ , le polynôme

$$P = \sum_{i=-p}^p z_i L_i$$

est dans  $\mathbb{R}_{2p}[X]$  et vérifie  $F(P) = (z_{-p}, \dots, z_p)$ . Cela démontre directement la surjectivité.

Si deux polynômes de cet espace ont les mêmes valeurs, leur différence a  $2p + 1$  racines et est donc nulle. L'application est aussi injective. En particulier :

$$Y = \sum_{i=-p}^p y_i L_i.$$

La méthode par les dimensions est courte ; la construction explicite fournit aussi un moyen de calculer l'interpolant, sans supposer connue une formule d'interpolation.

1.(b) Minimum pour le degré maximal.

Chaque  $\Delta_{2p}(P)$  est une moyenne de carrés, donc est positive ou nulle. Pour le polynôme  $Y$  de 1.(a), chaque différence  $y_i - Y(i)$  est nulle. Ainsi :

$$\Delta_{2p}(Y) = 0, \quad \delta_{2p} = 0, \quad P_{2p} = Y.$$

L'unicité de  $Y$  garantit l'unicité du polynôme réalisant ce minimum.

## 2.(a) Expression comme carré de distance.

Question adaptée au programme actuel : le symbole  $A_k(P)$  imprimé dans le PDF est rectifié en  $\Delta_k(P)$ , défini dans le préambule de cette partie.

Pour  $P \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_{2p}[X]$ , le polynôme  $P - Y$  appartient à l'espace muni du produit scalaire. Comme  $Y(i) = y_i$ , on a :

$$\|P - Y\|^2 = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p (P(i) - Y(i))^2 = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p (y_i - P(i))^2 = \Delta_k(P).$$

L'ajustement revient donc à minimiser la distance au polynôme  $Y$ .

## 2.(b) Existence, unicité et interprétation géométrique.

L'espace  $\mathbb{R}_{2p}[X]$  est euclidien de dimension finie, et  $\mathbb{R}_k[X]$  est un sous-espace. Le théorème de projection orthogonale s'applique : il existe un unique  $Q \in \mathbb{R}_k[X]$  tel que  $Y - Q$  soit orthogonal à ce sous-espace.

Pour tout  $P \in \mathbb{R}_k[X]$ , la décomposition :

$$Y - P = (Y - Q) + (Q - P)$$

est orthogonale. Par Pythagore et 2.(a) :

$$\Delta_k(P) = \|Y - Q\|^2 + \|Q - P\|^2.$$

Le minimum est atteint si et seulement si  $\|Q - P\|^2 = 0$ , c'est-à-dire  $P = Q$ . On conclut :

$$P_k = \text{proj}_{\mathbb{R}_k[X]}(Y), \quad \delta_k = \|Y - P_k\|^2.$$

Ainsi,  $\delta_k$  est le carré de la distance de  $Y$  au sous-espace des polynômes de degré au plus  $k$ . Le polynôme optimal est unique, donc la valeur du minimum est déterminée elle aussi.

## 2.(c) Ajustements constant et affine.

On note  $c = p(p+1)/3$ , qui est strictement positif pour  $p \geq 1$ .

### Méthode 1 — Formules d'ajustement de la partie 1.

Pour le degré zéro, 1.4.(a)-(b) donne directement :

$$P_0 = m(Y), \quad \delta_0 = V(Y).$$

Pour le degré un, on applique 1.5.(b) à  $A = X$  et  $B = Y$ . Par parité,  $m(X) = 0$ ; de plus,  $V(X) = \|X\|^2 = c$ . Il en résulte :

$$P_1 = m(Y) + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{c}X = m(Y) + \frac{3\text{Cov}(X, Y)}{p(p+1)}X.$$

$$\delta_1 = V(Y) - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{c} = V(Y) - \frac{3\text{Cov}(X, Y)^2}{p(p+1)}.$$

### Méthode 2 — Projection directement sur une base orthogonale.

La famille  $(1, X)$  est orthogonale, puisque  $\langle 1, X \rangle = 0$ , et ses carrés de normes sont 1 et  $c$ . La projection de  $Y$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$  est donc :

$$P_1 = \langle Y, 1 \rangle 1 + \frac{\langle Y, X \rangle}{c}X.$$

Comme  $m(X) = 0$ , la covariance vaut  $\langle X, Y \rangle$ . On retrouve la formule précédente. La projection sur la seule droite des constantes donne aussi  $P_0 = m(Y)$ .

Par Pythagore :

$$\delta_1 = \|Y\|^2 - \|P_1\|^2 = \|Y\|^2 - m(Y)^2 - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{c},$$

et  $\delta_0 = \|Y\|^2 - m(Y)^2$ . Les expressions annoncées suivent de  $V(Y) = \|Y\|^2 - m(Y)^2$ .

Cette seconde méthode établit les résultats à partir du produit scalaire, sans dépendre des questions d'ajustement de la partie 1.

### 3.(a) Premier polynôme orthogonal.

Dans  $\mathbb{R}_1[X]$ , le polynôme  $X$  est orthogonal aux constantes car  $\langle X, 1 \rangle = 0$ . Le complément orthogonal de  $\mathbb{R}_0[X]$  dans  $\mathbb{R}_1[X]$  est de dimension  $2 - 1 = 1$ , donc c'est exactement la droite engendrée par  $X$ .

La projection de  $X$  sur cette droite est  $X$  lui-même :

$$B_1 = X.$$

### 3.(b) Degré, coefficient dominant et base orthogonale.

Pour  $k \geq 1$ , notons  $D_k$  le complément orthogonal de  $\mathbb{R}_{k-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}_k[X]$ . Les dimensions valent  $k$  et  $k + 1$ , donc  $D_k$  est une droite et :

$$\mathbb{R}_k[X] = \mathbb{R}_{k-1}[X] \oplus D_k.$$

La décomposition orthogonale de  $X^k$  s'écrit :

$$X^k = Q_k + B_k, \quad Q_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \quad B_k \in D_k.$$

Le coefficient de  $X^k$  dans  $Q_k$  est nul. Ainsi,  $B_k = X^k - Q_k$  est de degré exactement  $k$  et son coefficient dominant est 1. Pour  $k = 0$ ,  $B_0 = 1$  est également de degré zéro et unitaire.

Si  $0 \leq i < j \leq k$ , alors  $B_i \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ , tandis que  $B_j$  lui est orthogonal. Donc  $\langle B_i, B_j \rangle = 0$ .

Tous les  $B_i$  sont non nuls. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre : si

$$\sum_{i=0}^k t_i B_i = 0,$$

le produit scalaire avec  $B_j$  donne  $t_j \|B_j\|^2 = 0$ , puis  $t_j = 0$ .

La famille  $(B_0, \dots, B_k)$  contient  $k + 1$  vecteurs libres dans l'espace  $\mathbb{R}_k[X]$  de dimension  $k + 1$ . C'est donc une base orthogonale. Le résultat vaut en particulier pour  $k = 2p$ .

3.(c) Coordonnées de  $Y$  dans la base orthogonale.

Puisque  $(B_0, \dots, B_{2p})$  est une base, il existe des réels uniques  $t_0, \dots, t_{2p}$  tels que

$$Y = \sum_{i=0}^{2p} t_i B_i.$$

Pour chaque  $j$ , la bilinéarité et l'orthogonalité donnent :

$$\langle B_j, Y \rangle = \sum_{i=0}^{2p} t_i \langle B_j, B_i \rangle = t_j \|B_j\|^2.$$

Comme  $B_j \neq 0$ , son carré de norme est strictement positif ; on peut donc diviser. On obtient :

$$t_j = \frac{\langle B_j, Y \rangle}{\|B_j\|^2}.$$

En remplaçant chaque coefficient :

$$Y = \sum_{i=0}^{2p} \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i.$$

3.(d) Expression de la projection  $P_k$ .

Question adaptée au programme actuel : le PDF omet les dénominateurs  $\|B_i\|^2$ . La base est orthogonale, mais elle n'est pas nécessairement orthonormale.

Posons :

$$Q = \sum_{i=0}^k \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i.$$

Les polynômes de cette somme appartiennent à  $\mathbb{R}_k[X]$ , donc  $Q$  aussi. D'après 3.(c) :

$$Y - Q = \sum_{i=k+1}^{2p} \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i.$$

Chacun des termes est orthogonal à  $B_0, \dots, B_k$ , donc à l'espace qu'ils engendrent,  $\mathbb{R}_k[X]$ .

Pour  $k = 2p$ , cette somme est vide, donc nulle.

Par la caractérisation de la projection de 2.(b),  $Q = P_k$ . Ainsi :

$$P_k = \sum_{i=0}^k \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i.$$

3.(e) Récurrences de  $P_k$  et de  $\delta_k$ .

Pour  $1 \leq k \leq 2p$ , la différence des deux sommes de 3.(d) donne :

$$P_k = P_{k-1} + \frac{\langle B_k, Y \rangle}{\|B_k\|^2} B_k.$$

Posons  $t_k = \langle B_k, Y \rangle / \|B_k\|^2$ . Alors :

$$Y - P_{k-1} = (Y - P_k) + t_k B_k.$$

Le premier terme est orthogonal à  $\mathbb{R}_k[X]$  et le second appartient à cet espace. Pythagore donne :

$$\delta_{k-1} = \delta_k + t_k^2 \|B_k\|^2 = \delta_k + \frac{\langle B_k, Y \rangle^2}{\|B_k\|^2}.$$

Donc :

$$\delta_k = \delta_{k-1} - \frac{\langle B_k, Y \rangle^2}{\|B_k\|^2}.$$

L'erreur minimale décroît avec  $k$ , et elle reste inchangée à cette étape exactement lorsque  $\langle B_k, Y \rangle = 0$ .

En outre, par orthogonalité de la somme de 3.(c) :

$$\delta_k = \sum_{i=k+1}^{2p} \frac{\langle B_i, Y \rangle^2}{\|B_i\|^2}.$$

Cette dernière formule confirme la positivité des erreurs et leur annulation finale pour  $k = 2p$ .

## Partie 3

1.(a) Orthogonalité de  $A_k$ .

Fixons  $k \in \{1, \dots, 2p\}$  et  $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ . Par définition :

$$\langle A_k, Q \rangle = \frac{(-1)^k}{2p+1} \sum_{i=-p}^p B_k(-i)Q(i).$$

On change l'indice de la somme finie en posant  $j = -i$ . L'ensemble des indices reste le même, donc :

$$\langle A_k, Q \rangle = \frac{(-1)^k}{2p+1} \sum_{j=-p}^p B_k(j)Q(-j) = (-1)^k \langle B_k, Q(-X) \rangle.$$

Le polynôme  $Q(-X)$  est encore de degré au plus  $k-1$ . Or  $B_k$  est orthogonal à  $\mathbb{R}_{k-1}[X]$  par sa définition. Le dernier produit scalaire est nul.

Puisque  $Q$  était quelconque,  $A_k$  est orthogonal à  $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ .

1.(b) Unicité et parité.

Comme  $B_k$  est unitaire de degré  $k$ ,  $B_k(-X)$  a pour coefficient dominant  $(-1)^k$ , puis  $A_k(X) = (-1)^k B_k(-X)$  est lui aussi unitaire de degré  $k$ .

La différence  $A_k - B_k$  est donc de degré au plus  $k - 1$ , ou nulle : elle appartient à  $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ . D'après 1.(a), les deux termes sont orthogonaux à cet espace. Leur différence l'est aussi, donc :

$$\|A_k - B_k\|^2 = 0.$$

Le caractère défini positif impose  $A_k = B_k$ , autrement dit :

$$B_k(-X) = (-1)^k B_k(X).$$

Si  $k$  est pair,  $B_k$  est pair ; si  $k$  est impair,  $B_k$  est impair. Pour  $k = 0$ ,  $B_0 = 1$  est pair, donc la même conclusion vaut.

2.(a) Annulation du coefficient diagonal.

Pour  $0 \leq k < 2p$ , le degré de  $XB_k$  est  $k + 1 \leq 2p$ , donc le produit scalaire demandé est bien défini dans l'espace étudié.

Le polynôme  $B_k$  a la parité de  $k$ , tandis que  $XB_k$  a la parité opposée. La propriété 1.2.(b)(3), avec la symétrie du produit scalaire lorsque l'ordre des deux polynômes est inversé, donne :

$$\langle XB_k, B_k \rangle = 0.$$

2.(b) Annulation des coefficients de bas degré.

Supposons  $2 \leq k \leq 2p - 1$  et  $0 \leq i \leq k - 2$ . Les degrés de  $B_k$  et  $B_i$  sont au plus  $2p - 1$ , donc la propriété 1.2.(b)(4) s'applique :

$$\langle XB_k, B_i \rangle = \langle B_k, XB_i \rangle.$$

Or  $XB_i$  est de degré  $i + 1 \leq k - 1$  et appartient à  $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ . Par définition,  $B_k$  est orthogonal à cet espace. Ainsi :

$$\langle XB_k, B_i \rangle = 0.$$

2.(c) Relation à trois termes et coefficient  $\alpha_k$ .

Fixons  $1 \leq k \leq 2p - 1$ . Comme  $XB_k$  est de degré  $k + 1$ , il s'exprime dans la base

$(B_0, \dots, B_{k+1}) :$

$$XB_k = \sum_{i=0}^{k+1} t_i B_i, \quad t_i = \frac{\langle XB_k, B_i \rangle}{\|B_i\|^2}.$$

Pour  $i = k, 2$ , (a) donne  $t_k = 0$ . Pour  $k \geq 2$  et  $0 \leq i \leq k-2$ , 2.(b) donne  $t_i = 0$ . Si  $k = 1$ , il n'y a aucun indice dans cette dernière plage ; l'argument reste valable.

Il ne reste que les termes d'indices  $k-1$  et  $k+1$  :

$$XB_k = \alpha_k B_{k+1} + \beta_k B_{k-1}.$$

Le membre de gauche est unitaire de degré  $k+1$ . À droite,  $B_{k+1}$  est unitaire de degré  $k+1$ , tandis que  $B_{k-1}$  a un degré strictement inférieur. L'égalité des coefficients de  $X^{k+1}$  impose :

$$\alpha_k = 1.$$

2.(d) Calcul du coefficient  $\beta_k$ .

Question adaptée au programme actuel : le PDF imprime  $\langle XB_{k-1}, B_k \rangle = \langle XB_k, B_k \rangle$ . Le dernier produit scalaire est nul par 2.(a), tandis que le premier vaut  $\|B_k\|^2 > 0$ . La formule doit être rectifiée.

Pour  $1 \leq k \leq 2p-1$ , les polynômes  $XB_{k-1}$  et  $B_k$  sont unitaires de degré  $k$ . Leurs termes dominants se compensent, donc :

$$R = XB_{k-1} - B_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X].$$

Comme  $B_k$  est orthogonal à cet espace :

$$0 = \langle R, B_k \rangle = \langle XB_{k-1}, B_k \rangle - \|B_k\|^2.$$

Ainsi,  $\langle XB_{k-1}, B_k \rangle = \|B_k\|^2$ . La propriété 1.2.(b)(4) s'applique à  $B_{k-1}$  et  $B_k$ , de degrés au plus  $2p-1$ , et donne :

$$\langle XB_{k-1}, B_k \rangle = \langle B_{k-1}, XB_k \rangle = \langle XB_k, B_{k-1} \rangle.$$

On a donc bien :

$$\langle XB_{k-1}, B_k \rangle = \langle XB_k, B_{k-1} \rangle = \|B_k\|^2.$$

D'autre part, le produit scalaire de la relation de 2.(c) avec  $B_{k-1}$  donne :

$$\langle XB_k, B_{k-1} \rangle = \langle B_{k+1}, B_{k-1} \rangle + \beta_k \|B_{k-1}\|^2 = \beta_k \|B_{k-1}\|^2.$$

Le carré de norme au dénominateur est strictement positif, donc :

$$\beta_k = \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} > 0.$$

Finalement, pour  $1 \leq k \leq 2p-1$  :

$$B_{k+1} = XB_k - \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}.$$

Cette plage permet de construire tous les polynômes jusqu'à  $B_{2p}$ , à partir de  $B_0 = 1$  et  $B_1 = X$ . Il n'est pas nécessaire de former  $XB_{2p}$ , qui sortirait de l'espace initial.

2.(e) Expressions de  $B_2$  et  $B_3$ .

On suppose  $p \geq 2$ . Les indices  $k = 1$  et  $k = 2$  sont alors dans la plage de validité de la récurrence. Pour simplifier les calculs, posons  $q = p(p+1)$  et  $c = q/3$ .

### Méthode 1 — Récurrence demandée.

Pour  $k = 1$ ,  $\|B_0\|^2 = 1$  et  $\|B_1\|^2 = \|X\|^2 = c$ . Par conséquent :

$$B_2 = XB_1 - cB_0 = X^2 - \frac{q}{3}.$$

Il reste à calculer  $\|B_2\|^2$ . Comme  $\langle X^2, 1 \rangle = \|X\|^2 = c$  :

$$\|B_2\|^2 = \|X^2 - c\|^2 = \|X^2\|^2 - 2c\langle X^2, 1 \rangle + c^2\|1\|^2 = \|X^2\|^2 - c^2.$$

D'après 1.3.(b),  $\|X^2\|^2 = q(3q-1)/15$ , d'où :

$$\|B_2\|^2 = \frac{q(3q-1)}{15} - \frac{q^2}{9} = \frac{q(4q-3)}{45}.$$

Pour  $p \geq 2$ ,  $q > 0$  et  $4q - 3 > 0$ , ce qui confirme que ce carré de norme est non nul. Le coefficient de récurrence suivant est :

$$\beta_2 = \frac{\|B_2\|^2}{\|B_1\|^2} = \frac{q(4q-3)/45}{q/3} = \frac{4q-3}{15}.$$

Ainsi :

$$B_3 = XB_2 - \beta_2 B_1 = X^3 - \left( \frac{q}{3} + \frac{4q-3}{15} \right) X = X^3 - \frac{3q-1}{5} X.$$

Les expressions demandées sont donc :

$$B_2 = X^2 - \frac{p(p+1)}{3}, \quad B_3 = X^3 - \frac{3p^2+3p-1}{5} X.$$

Dans la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ , leurs coordonnées sont respectivement :

$$\left( -\frac{p(p+1)}{3}, 0, 1, 0 \right), \quad \left( 0, -\frac{3p^2+3p-1}{5}, 0, 1 \right).$$

## Méthode 2 — Parité et conditions d'orthogonalité.

La question 1.(b) et le caractère unitaire imposent  $B_2 = X^2 + u$  pour un réel  $u$ .

L'orthogonalité aux constantes donne :

$$0 = \langle X^2 + u, 1 \rangle = c + u.$$

Donc  $u = -c$ , et l'orthogonalité à  $X$  est automatiquement satisfaite par parité. On retrouve  $B_2 = X^2 - q/3$ .

De même,  $B_3$  est impair et unitaire de degré 3, donc  $B_3 = X^3 + vX$ . L'orthogonalité à 1 et à  $X^2$  est automatique par parité. L'orthogonalité à  $X$  impose :

$$0 = \langle X^3 + vX, X \rangle = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p i^4 + v\|X\|^2 = \|X^2\|^2 + vc.$$

Comme  $c > 0$ , on en déduit :

$$v = -\frac{\|X^2\|^2}{c} = -\frac{q(3q-1)/15}{q/3} = -\frac{3q-1}{5}.$$

Le polynôme obtenu est unitaire de degré 3 et orthogonal à la base  $(1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Il est nécessairement  $B_3$  : la différence avec le polynôme défini dans la partie 2 est dans  $\mathbb{R}_2[X]$  et orthogonale à cet espace, donc nulle.

La récurrence construit systématiquement toute la famille ; la recherche directe par parité est particulièrement efficace pour les premiers degrés.

## Relevé des adaptations

---

- Préambule : définition de  $\mathbb{R}_k[X]$  étendue aux indices  $0 \leq k \leq 2p$ , nécessaires dès la partie 1 et dans toute la partie 2. Le PDF ne définit initialement cette notation que pour  $0 < k < 2p$ .
- Partie 1, question 1 : rectification en  $V(A) = \|A - m(A)\|^2$  du carré manquant dans la définition ; elle rend cohérentes toutes les identités de variance et la normalisation. La distinction entre réel et polynôme constant est explicitée.
- Partie 1, question 5.(a) : remplacement de  $b = m(B)$  par  $b = m(B) - a m(A)$ , valeur correcte de la constante optimale à  $a$  fixé.
- Partie 1, question 5.(d) : les polynômes d'une éventuelle application particulière ne sont pas précisés dans le PDF. La demande porte sur les formules générales en fonction de  $p$  et des valeurs de  $A$  et  $B$  sur la grille ; aucune donnée particulière n'est inventée.
- Partie 2, préambule : remplacement des points  $(x_i, y_i)$  par  $(i, y_i)$  pour correspondre à la définition effective de l'erreur, à l'évaluation et à l'interpolation utilisées dans toutes les questions. L'unicité est formulée pour le polynôme réalisant le minimum.

- Partie 2, question 2.(a) : remplacement de la notation non définie  $A_k(P)$  par  $\Delta_k(P)$ .
- Partie 2, question 3.(d) : rétablissement des facteurs  $1/\|B_i\|^2$  dans la formule de projection sur une base orthogonale.
- Partie 3, question 2.(d) : remplacement de  $\langle XB_k, B_k \rangle$  par  $\langle XB_k, B_{k-1} \rangle$  et explicitation de leur valeur commune avec  $\langle XB_{k-1}, B_k \rangle$ , égale à  $\|B_k\|^2$ .

Toutes les questions de la version rectifiée sont démontrées avec les outils du référentiel ; aucun résultat supplémentaire n'est admis.