



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1996

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On identifie un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ à la matrice colonne de ses composantes $x_1, \dots, x_n$ dans la base canonique et l'on pose $N(X) = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. De même, on identifie tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ à sa matrice dans la base canonique.

Pour tout réel $\theta \in [0, \pi]$, on considère la matrice réelle $A(\theta)$ d'ordre n définie par

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 \cos \theta & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 \cos \theta & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La diagonale est composée d'éléments égaux à $2 \cos \theta$, la sous-diagonale et la sur-diagonale de -1 , et tous les autres éléments sont nuls. Cette description définit aussi la matrice pour $n = 2$.

On note $A = A(0)$ et I_n la matrice identité d'ordre n .

Partie I

I.1. Étude de suites récurrentes linéaires

On note $E(\theta)$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_k)_{k \geq 0}$ vérifiant, pour tout $k \geq 1$,

$$u_{k+1} - 2 \cos \theta u_k + u_{k-1} = 0.$$

On désigne par $F(\theta)$ le sous-ensemble des suites de $E(\theta)$ telles que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0$.

I.1.a. Expliciter une base de $E(\theta)$ dans les trois cas $0 < \theta < \pi$, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Déterminer la suite $(s_k(\theta))$ de $E(\theta)$ telle que $s_0(\theta) = 0$ et $s_1(\theta) = \sin \theta$ lorsque $0 < \theta < \pi$.

I.1.b. Montrer que $F(\theta)$ est un sous-espace vectoriel de $E(\theta)$, puis déterminer $F(\theta)$ pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$.

I.1.c. On suppose $0 < \theta < \pi$. Montrer que $F(\theta)$ se réduit à la suite nulle si θ n'appartient pas à l'ensemble des réels $p\pi/(n+1)$, avec $p \in \{1, \dots, n\}$.

I.1.d. On suppose $\theta = p\pi/(n+1)$, avec $p \in \{1, \dots, n\}$. Vérifier que $(s_k(\theta))$ appartient à $F(\theta)$ et en déduire la dimension de $F(\theta)$.

I.2. Noyau de la matrice $A(\theta)$

I.2.a. Soit X un vecteur de composantes $x_1, \dots, x_n$.

À quelle condition sur ces composantes appartient-il au noyau de $A(\theta)$?

En déduire que X appartient au noyau de $A(\theta)$ si et seulement s'il existe une suite $(u_k) \in F(\theta)$ telle que $u_1 = x_1, \dots, u_n = x_n$.

I.2.b. En déduire le noyau de $A(\theta)$ selon $\theta \in [0, \pi]$. Pour quelles valeurs de θ la matrice $A(\theta)$ est-elle inversible ?

I.3. Valeurs propres de la matrice A

I.3.a. Expliciter $A = A(0)$ et montrer que ses valeurs propres sont réelles. On citera précisément le théorème utilisé.

I.3.b. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre non nul associé. Expliciter le système $(A - \lambda I_n)X = 0$, puis, en considérant sa ligne d'indice i , où $|x_i| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$, montrer que $|\lambda - 2| \leq 2$.

En déduire que, pour toute valeur propre λ , il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$.

I.3.c. En déduire que A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, que l'on explicitera sous la forme $\lambda_p = 2(1 - \cos \theta_p)$, avec $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$.

I.4. Vecteurs propres de la matrice A

I.4.a. Expliciter le vecteur propre X_p associé à λ_p dont la première composante est $\sin(p\pi/(n+1))$.

I.4.b. Soient p, q tels que $1 \leq p < q \leq n$. Montrer que ${}^t(X_p)AX_q = {}^t(X_q)AX_p$, puis, en évaluant les deux membres, prouver que ${}^t(X_p)X_q = 0$.

La notation tX désigne la transposée de la matrice colonne X .

I.4.c. Calculer, pour $0 < \theta < \pi$, la somme réelle

$$C_n(\theta) = 1 + \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \dots + \cos(2n\theta).$$

On pourra établir à partir des formules d'addition l'identité

$$2 \sin \theta \cos(2k\theta) = \sin((2k+1)\theta) - \sin((2k-1)\theta).$$

En déduire que, pour $p \in \{1, \dots, n\}$, la somme des carrés des composantes de X_p est $(n+1)/2$.

I.4.d. On note P la matrice d'ordre n dont les colonnes sont $X_1, \dots, X_n$. Montrer que P est symétrique et, à l'aide des résultats précédents, calculer P^2 , puis en déduire l'expression de P^{-1} en fonction de P . Que vaut $P^{-1}AP$?

I.5. Étude de l'équation $AX = B$

On donne un vecteur B de composantes $b_1, \dots, b_n$.

I.5.a. Établir que $AX = B$ admet une solution et une seule.

I.5.b. Soient V le vecteur de composantes $1, \dots, 1$ et W le vecteur vérifiant $AW = V$. Montrer que

$$w_k = \frac{k(n+1-k)}{2}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

En déterminant le maximum sur $[0, a]$ de $x \mapsto x(a-x)$, où $a > 0$, établir que $N(W) \leq (n+1)^2/8$.

I.5.c. Dans cette question seulement, on suppose $b_1, \dots, b_n$ positifs ou nuls. On note X la solution unique de $AX = B$.

Soit i le plus grand indice tel que $x_i = \min(x_1, \dots, x_n)$. En raisonnant par l'absurde et en considérant la ligne d'indice i du système $AX = B$, montrer que $i = 1$ ou $i = n$.

Montrer que les composantes de X sont toutes positives ou nulles.

I.5.d. On pose $Y = N(B)V - B$ et $Z = N(B)V + B$. Déterminer le signe de leurs composantes, puis en déduire que, si $AX = B$,

$$|x_k| \leq N(B)w_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

En déduire une majoration de $N(X)$ en fonction de $N(B)$ et de n .

Partie II

Étant donnés deux réels a, b et une fonction réelle g continue sur $[0, 1]$, on considère une fonction f de classe C^2 sur $[0, 1]$ vérifiant

$$f(0) = a, \quad f(1) = b, \quad f''(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

On se propose de déterminer des valeurs numériques approchées de $f(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

II.1. Existence et unicité de la solution f

II.1.a. Expliciter la dérivée seconde de la fonction L définie sur $[0, 1]$ par

$$L(x) = x \int_x^1 (t-1)g(t) dt + (x-1) \int_0^x tg(t) dt.$$

II.1.b. En déduire l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in C^2([0, 1])$ telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$ et $f''(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Exprimer f en fonction de L .

II.2. Approximation de f'' par différences finies

Dans toute la suite, on suppose g de classe C^2 sur $[0, 1]$.

II.2.a. Établir que f est de classe C^4 sur $[0, 1]$.

II.2.b. Soient $x \in]0, 1[$ et $h > 0$ tels que $0 \leq x-h < x+h \leq 1$.

Établir, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à partir de x sur $[x, x+h]$ et $[x-h, x]$,

$$\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{M_2 h^2}{12},$$

où $M_2 = \max_{t \in [0, 1]} |g''(t)|$, dont on justifiera l'existence.

Dans la suite, on convient donc d'approcher $f''(x)$ par $(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))/h^2$.

II.3. Discrétisation de l'équation $f'' = g$, avec $f(0) = a$ et $f(1) = b$

On pose $h = 1/(n+1)$ et $x_k = kh$ pour $k \in \{0, \dots, n+1\}$.

On se propose de calculer des approximations $y_1, \dots, y_n$ de $f(x_1), \dots, f(x_n)$, en prenant $y_0 = f(x_0) = a$ et $y_{n+1} = f(x_{n+1}) = b$.

À cet effet, on remplace les n équations $f''(x_k) = g(x_k)$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, par

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = g(x_k).$$

II.3.a. Montrer que le vecteur Y de composantes $y_1, \dots, y_n$ est solution d'un système d'équations $AX = B$, où B est un vecteur dont on précisera les composantes.

II.3.b. Établir que le vecteur F de composantes $f(x_1), \dots, f(x_n)$ vérifie

$$N(A(F - Y)) \leq M_2 h^4 / 12.$$

II.3.c. À l'aide de la partie I, en déduire, en fonction de n et de M_2 , une majoration de $N(F - Y)$, erreur maximale commise en remplaçant $f(x_k)$ par y_k .

II.4. Applications

II.4.a. En déduire que, si $g'' = 0$, alors $y_k = f(x_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

II.4.b. Préciser f lorsque $g(x) = 1$ pour $x \in [0, 1]$ et $a = b = 0$. Retrouver ainsi le résultat de I.5.b.

II.4.c. Déterminer la solution de $AX = B$ lorsque B est le vecteur de composantes $1, 2, \dots, n$.