



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1996

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On utilise $N(X) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. La première composante x_n répétée dans la définition imprimée est rectifiée en x_1 ; cette correction est indispensable aux estimations demandées.

I.1. Étude de suites récurrentes linéaires

I.1.a. Pour chaque θ , une suite de $E(\theta)$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes : la formule

$$u_{k+1} = 2 \cos \theta u_k - u_{k-1}$$

construit tous les termes suivants. Réciproquement, pour tout couple $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, cette construction définit une unique suite de $E(\theta)$. L'application linéaire qui associe à une suite ses deux premiers termes est donc un isomorphisme de $E(\theta)$ sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\dim E(\theta) = 2$.

Pour $0 < \theta < \pi$, les formules d'addition donnent

$$\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(k\theta)$$

et

$$\sin((k+1)\theta) + \sin((k-1)\theta) = 2 \cos \theta \sin(k\theta).$$

Les suites $(\cos(k\theta))$ et $(\sin(k\theta))$ appartiennent donc à $E(\theta)$. Elles sont libres : dans une relation $\alpha \cos(k\theta) + \beta \sin(k\theta) = 0$, l'indice $k = 0$ donne $\alpha = 0$, puis $k = 1$ donne $\beta \sin \theta = 0$. Comme $\sin \theta > 0$, $\beta = 0$. Elles forment ainsi une base, et toute suite s'écrit

$$u_k = \alpha \cos(k\theta) + \beta \sin(k\theta).$$

Les conditions $s_0 = 0$ et $s_1 = \sin \theta$ imposent $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, donc $s_k(\theta) = \sin(k\theta)$.

Pour $\theta = 0$, la relation est $u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = 0$. Les suites (1) et (k) la vérifient ; leurs deux premiers termes sont respectivement $(1, 1)$ et $(0, 1)$, ce qui prouve leur liberté. Elles

forment une base : $u_k = \alpha + \beta k$.

Pour $\theta = \pi$, la relation est $u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1} = 0$. Les suites $((-1)^k)$ et $(k(-1)^k)$ la vérifient directement. Une relation entre elles, évaluée en 0 puis en 1, impose la nullité des deux coefficients. Elles forment une base : $u_k = (-1)^k(\alpha + \beta k)$.

Ces bases sont établies par les formules trigonométriques et l'unicité à partir de deux termes initiaux.

I.1.b. La suite nulle appartient à $F(\theta)$. Les conditions $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0$ sont conservées par toute combinaison linéaire de suites qui les satisfont. Comme $E(\theta)$ est un espace vectoriel, $F(\theta)$ est un sous-espace de $E(\theta)$.

Pour $\theta = 0$, on écrit $u_k = \alpha + \beta k$. La condition $u_0 = 0$ impose $\alpha = 0$; puis $u_{n+1} = \beta(n+1) = 0$ impose $\beta = 0$. Ainsi $F(0) = \{0\}$.

Pour $\theta = \pi$, on écrit $u_k = (-1)^k(\alpha + \beta k)$. Les mêmes conditions imposent $\alpha = 0$ et $\beta(n+1) = 0$, donc $\beta = 0$. Ainsi $F(\pi) = \{0\}$.

I.1.c. Pour $0 < \theta < \pi$, une suite de $E(\theta)$ s'écrit $u_k = \alpha \cos(k\theta) + \beta \sin(k\theta)$. La condition $u_0 = 0$ impose $\alpha = 0$. La seconde condition devient

$$\beta \sin((n+1)\theta) = 0.$$

Or $\sin((n+1)\theta) = 0$ si et seulement si $(n+1)\theta = p\pi$ pour un entier p . Comme $0 < (n+1)\theta < (n+1)\pi$, les seuls entiers possibles sont $p = 1, \dots, n$.

Si θ ne possède aucune de ces valeurs, le sinus est non nul et $\beta = 0$. Alors $F(\theta) = \{0\}$.

I.1.d. Si $\theta = p\pi/(n+1)$, on a $s_0(\theta) = 0$ et $s_{n+1}(\theta) = \sin(p\pi) = 0$. La suite $s(\theta)$ appartient à $F(\theta)$.

Elle est non nulle puisque $s_1(\theta) = \sin \theta > 0$. La discussion précédente montre que toutes les suites de $F(\theta)$ sont ses multiples. Donc

$$F(\theta) = \text{Vect}(s(\theta)), \quad \dim F(\theta) = 1.$$

I.2. Noyau de la matrice $A(\theta)$

I.2.a. L'équation $A(\theta)X = 0$ s'écrit

$$2 \cos \theta x_1 - x_2 = 0,$$

$$-x_{k-1} + 2 \cos \theta x_k - x_{k+1} = 0 \quad (2 \leq k \leq n-1),$$

$$-x_{n-1} + 2 \cos \theta x_n = 0.$$

Pour $n = 2$, les deux lignes extrêmes sont les seules lignes. En posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, toutes les lignes s'écrivent

$$x_{k+1} - 2 \cos \theta x_k + x_{k-1} = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Si une suite $u \in F(\theta)$ vérifie $u_k = x_k$ pour $1 \leq k \leq n$, ses relations de récurrence et ses deux conditions aux bornes donnent ces lignes, donc $X \in \text{Ker}(A(\theta))$.

Réciproquement, si X appartient au noyau, construisons l'unique suite de $E(\theta)$ telle que $u_0 = 0, u_1 = x_1$. La première ligne donne $u_2 = x_2$; les lignes suivantes donnent par récurrence $u_k = x_k$ jusqu'à $k = n$. Enfin, la dernière ligne impose $u_{n+1} = 0$. La suite ainsi construite appartient donc à $F(\theta)$ et possède les composantes demandées.

I.2.b. Si θ n'appartient pas à l'ensemble $\{p\pi/(n+1) : 1 \leq p \leq n\}$, y compris pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, les questions I.1.b et I.1.c donnent $F(\theta) = \{0\}$. Par I.2.a, $\text{Ker}(A(\theta)) = \{0\}$.

Si $\theta = p\pi/(n+1)$, posons

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \sin(2\theta) \\ \vdots \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix}.$$

La question I.1.d et I.2.a donnent $\text{Ker}(A(\theta)) = \text{Vect}(S(\theta))$, de dimension 1 puisque la première composante est non nulle.

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit à 0. Ainsi

$$A(\theta) \text{ est inversible} \iff \theta \notin \left\{ \frac{p\pi}{n+1} : 1 \leq p \leq n \right\}.$$

I.3. Valeurs propres de la matrice A

I.3.a. Puisque $\cos 0 = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est réelle et symétrique. Le théorème spectral réel affirme qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et que sa matrice diagonale a des coefficients réels. Il s'applique donc à A et fournit ses valeurs propres réelles.

I.3.b. Posons $x_0 = x_{n+1} = 0$. Le système $(A - \lambda I_n)X = 0$ s'écrit

$$(2 - \lambda)x_k = x_{k-1} + x_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Soit i tel que $|x_i| = N(X)$. Comme $X \neq 0$, $|x_i| > 0$. La ligne i et l'inégalité triangulaire donnent

$$|2 - \lambda| |x_i| \leq |x_{i-1}| + |x_{i+1}| \leq 2|x_i|.$$

Cette estimation inclut $i = 1$ et $i = n$, avec les composantes fictives nulles. En divisant par $|x_i| > 0$, on obtient $|\lambda - 2| \leq 2$, soit $0 \leq \lambda \leq 4$.

Alors $1 - \lambda/2 \in [-1, 1]$. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante de 1 à -1 sur $[0, \pi]$, donc il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos \theta = 1 - \lambda/2$. Ainsi $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$.

I.3.c. Pour $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$, les coefficients diagonaux de $A - \lambda I_n$ valent $2 \cos \theta$, et ses coefficients adjacents restent -1 . Donc

$$A - \lambda I_n = A(\theta).$$

La valeur λ est propre si et seulement si le noyau de cette matrice est non nul. Par I.2.b, cela se produit exactement pour

$$\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}, \quad 1 \leq p \leq n.$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_p = 2 \left(1 - \cos \frac{p\pi}{n+1} \right), \quad 1 \leq p \leq n.$$

Les angles θ_p sont strictement croissants dans $]0, \pi[$, et le cosinus y est strictement décroissant. Ainsi

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 4.$$

Il s'agit de n valeurs propres distinctes, et la discussion de I.3.b montre qu'il n'y en a pas d'autres.

I.4. Vecteurs propres de la matrice A

I.4.a. Le noyau de $A - \lambda_p I_n = A(\theta_p)$ est engendré par le vecteur $S(\theta_p)$ de I.2.b. Comme $\sin \theta_p > 0$, fixer la première composante à cette valeur impose le coefficient multiplicateur 1. Le vecteur demandé est donc

$$X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \sin(2\theta_p) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_p) \end{pmatrix}, \quad (X_p)_k = \sin \frac{kp\pi}{n+1}.$$

I.4.b. La quantité ${}^t(X_p)AX_q$ est un scalaire, donc égale à sa transposée. Comme ${}^tA = A$,

$${}^t(X_p)AX_q = {}^t({}^t(X_p)AX_q) = {}^t(X_q){}^tAX_p = {}^t(X_q)AX_p.$$

En utilisant $AX_q = \lambda_q X_q$ et $AX_p = \lambda_p X_p$, on obtient

$$\lambda_q {}^t(X_p)X_q = \lambda_p {}^t(X_q)X_p = \lambda_p {}^t(X_p)X_q.$$

Donc $(\lambda_q - \lambda_p){}^t(X_p)X_q = 0$. Comme $\lambda_q \neq \lambda_p$, on conclut ${}^t(X_p)X_q = 0$.

I.4.c. Question adaptée au programme actuel.

Nous calculons une somme trigonométrique réelle qui fournit exactement la normalisation nécessaire.

Les formules d'addition donnent

$$\sin(\alpha + \theta) - \sin(\alpha - \theta) = 2 \cos \alpha \sin \theta.$$

Avec $\alpha = 2k\theta$,

$$2 \sin \theta \cos(2k\theta) = \sin((2k + 1)\theta) - \sin((2k - 1)\theta).$$

En sommant pour $k = 0, \dots, n$, les termes sont télescopiques :

$$2 \sin \theta C_n(\theta) = \sin((2n + 1)\theta) - \sin(-\theta) = \sin((2n + 1)\theta) + \sin \theta.$$

Comme $0 < \theta < \pi$, $\sin \theta > 0$, donc

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((2n + 1)\theta)}{2 \sin \theta}.$$

Pour $\theta = \theta_p = p\pi/(n + 1)$,

$$\sin((2n + 1)\theta_p) = \sin(2p\pi - \theta_p) = -\sin \theta_p.$$

Ainsi $C_n(\theta_p) = 0$, et

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k\theta_p) = -1.$$

L'identité $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2 \sin^2 t$, obtenue à partir des formules d'addition et de $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, donne

$$\sum_{k=1}^n \sin^2(k\theta_p) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta_p) = \frac{n + 1}{2}.$$

Donc ${}^t(X_p)X_p = (n+1)/2$, comme demandé.

I.4.d. Le coefficient de ligne k et colonne p de P est

$$P_{k,p} = \sin \frac{kp\pi}{n+1} = P_{p,k}.$$

Donc ${}^tP = P$. Les coefficients de tPP sont les produits scalaires des colonnes. Par I.4.b et I.4.c,

$${}^tPP = \frac{n+1}{2}I_n.$$

Puisque P est symétrique, $P^2 = (n+1)I_n/2$. Ainsi P possède l'inverse explicite

$$P^{-1} = \frac{2}{n+1}P,$$

car le produit dans chaque ordre vaut I_n .

Si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les égalités $AX_p = \lambda_p X_p$ s'écrivent $AP = PD$. En multipliant par l'inverse justifié de P ,

$$P^{-1}AP = D.$$

I.5. Étude de l'équation $AX = B$

I.5.a. Méthode 1 — Utilisation de l'inversibilité déjà établie.

La question I.2.b avec $\theta = 0$ donne que $A = A(0)$ est inversible. Pour tout B , l'unique solution est donc $X = A^{-1}B$.

Méthode 2 — Une identité de somme de carrés.

Pour un vecteur X , posons $x_0 = x_{n+1} = 0$. Le développement des carrés donne

$${}^tXAX = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^2.$$

Si $AX = 0$, cette somme de carrés est nulle, donc chaque différence est nulle. Comme

$x_0 = 0$, toutes les composantes sont nulles. Ainsi le noyau de A est nul. En dimension finie, un endomorphisme injectif est bijectif, ce qui donne existence et unicité de la solution de $AX = B$. Cette méthode met aussi en évidence la stricte positivité de la forme quadratique pour $X \neq 0$.

I.5.b. Méthode 1 — Vérification d'une suite quadratique.

Posons $m = n + 1$ et $w_k = k(m - k)/2$ pour $0 \leq k \leq m$. On a $w_0 = w_m = 0$. La différence seconde de k^2 vaut 2, tandis que celle de k est nulle. Donc

$$2w_k - w_{k-1} - w_{k+1} = 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ces égalités sont exactement $AW = V$, y compris aux deux extrémités grâce à $w_0 = w_m = 0$. L'unicité de I.5.a donne les composantes annoncées.

Méthode 2 — Différences successives.

Écrivons $d_k = w_k - w_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq m$, avec $w_0 = w_m = 0$. Le système $AW = V$ donne $d_{k+1} = d_k - 1$. Ainsi $d_k = d_1 - (k - 1)$ et

$$w_k = \sum_{j=1}^k d_j = kd_1 - \frac{k(k-1)}{2}.$$

La condition $w_m = 0$ impose $d_1 = (m - 1)/2$, d'où $w_k = k(m - k)/2$. Cette approche permet de construire la solution au lieu de la vérifier.

Pour la majoration, la fonction $q(x) = x(a - x)$ sur $[0, a]$, avec $a > 0$, a pour dérivée $a - 2x$. Elle croît jusqu'à $a/2$, puis décroît; son maximum vaut $a^2/4$. On peut aussi le vérifier par $q(x) = a^2/4 - (x - a/2)^2$.

En prenant $a = m = n + 1$, on obtient $0 \leq w_k \leq m^2/8$, donc

$$N(W) \leq \frac{(n+1)^2}{8}.$$

I.5.c. Posons $r = \min(x_1, \dots, x_n)$, et soit i le plus grand indice où ce minimum est atteint.

Supposons par l'absurde $1 < i < n$. La ligne i donne

$$0 \leq b_i = 2r - x_{i-1} - x_{i+1} \leq 0,$$

car les deux composantes voisines sont au moins r . L'égalité impose donc

$x_{i-1} = x_{i+1} = r$. Mais $i + 1 > i$ est alors un autre indice où le minimum est atteint, ce qui contredit le choix de i . Ainsi $i = 1$ ou $i = n$.

Si $i = 1$, la première ligne est $b_1 = 2r - x_2 \leq r$, puisque $x_2 \geq r$. Comme $b_1 \geq 0$, on a $r \geq 0$.

Si $i = n$, la dernière ligne est $b_n = 2r - x_{n-1} \leq r$, donc également $r \geq 0$.

Dans tous les cas, toutes les composantes de X sont au moins $r \geq 0$. La positivité est donc au sens large, ce qui permet son utilisation en I.5.d même si certaines composantes du second membre sont nulles.

I.5.d. Pour chaque k , $|b_k| \leq N(B)$, donc

$$Y_k = N(B) - b_k \geq 0, \quad Z_k = N(B) + b_k \geq 0.$$

Par linéarité, puisque $AW = V$ et $AX = B$,

$$A(N(B)W - X) = Y, \quad A(N(B)W + X) = Z.$$

La question I.5.c appliquée aux deux seconds membres positifs ou nuls montre que les deux vecteurs solutions ont des composantes positives ou nulles. Donc

$$-N(B)w_k \leq x_k \leq N(B)w_k.$$

Comme $N(B) \geq 0$ et $w_k > 0$ pour $1 \leq k \leq n$, cela équivaut à $|x_k| \leq N(B)w_k$. En prenant le maximum et en utilisant I.5.b,

$$N(X) \leq N(B)N(W) \leq \frac{(n+1)^2}{8}N(B).$$

Cette preuve inclut $B = 0$, auquel cas l'unicité donne $X = 0$.

Partie II

II.1. Existence et unicité de la solution f

II.1.a. Posons, pour $x \in [0, 1]$,

$$U(x) = \int_x^1 (t-1)g(t) dt, \quad V(x) = \int_0^x tg(t) dt.$$

La fonction g est continue. Le théorème fondamental du calcul intégral donne $U, V \in C^1([0, 1])$ et

$$U'(x) = -(x-1)g(x), \quad V'(x) = xg(x).$$

Comme $L(x) = xU(x) + (x-1)V(x)$, on obtient

$$L'(x) = U(x) + xU'(x) + V(x) + (x-1)V'(x) = U(x) + V(x),$$

les deux termes contenant $x(x-1)g(x)$ s'annulant. Cette dernière expression est de classe C^1 , donc L est de classe C^2 , et

$$L''(x) = U'(x) + V'(x) = -(x-1)g(x) + xg(x) = g(x).$$

Aux extrémités, les dérivées sont comprises comme dérivées unilatérales avec prolongements continus. Ainsi $L'' = g$ sur $[0, 1]$.

II.1.b. Méthode 1 — Fonction L et différence de deux solutions.

La définition donne $L(0) = 0$ et $L(1) = 0$, car l'une des intégrales est nulle et l'autre est multipliée par un facteur nul. La fonction

$$f(x) = a(1-x) + bx + L(x)$$

est de classe C^2 , vérifie $f(0) = a$, $f(1) = b$ et $f'' = L'' = g$. Elle fournit donc une solution.

Si f_1, f_2 sont deux solutions, leur différence H vérifie $H'' = 0$. Le théorème des accroissements finis donne que H' est constante, puis que H est affine. Écrivons $H(x) = \alpha x + \beta$. Les valeurs $H(0) = H(1) = 0$ imposent $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$. La solution est unique.

Méthode 2 — Construction à partir de primitives.

Posons $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ et $H(x) = \int_0^x G(s) ds$. La continuité de g donne $H \in C^2$ et $H'' = g$. Toute solution de $f'' = g$ s'écrit $f(x) = H(x) + cx + d$: en effet, la différence a une dérivée seconde nulle et est affine, comme ci-dessus.

La condition en 0 impose $d = a$, puisque $H(0) = 0$; la condition en 1 impose $c = b - a - H(1)$. Il existe donc un unique choix, et

$$f(x) = a + (b - a - H(1))x + H(x).$$

Pour relier cette expression à L , une intégration par parties sur $[0, x]$ donne

$$H(x) = xG(x) - \int_0^x tg(t) dt.$$

Avec $H(1) = \int_0^1 (1-t)g(t) dt$, on vérifie en scindant les intégrales à x que $H(x) - xH(1) = L(x)$. On retrouve donc la formule précédente. Cette méthode explique comment les deux conditions aux bornes fixent les constantes d'intégration.

II.2. Approximation de f'' par différences finies

II.2.a. On a $f'' = g$ et $g \in C^2([0, 1])$. Ainsi $f''' = g'$ existe et est continue, puis $f^{(4)} = g''$ existe et est continue. Donc $f \in C^4([0, 1])$.

II.2.b. La fonction $|g''|$ est continue sur le segment fermé et borné $[0, 1]$. Elle y atteint un maximum fini M_2 , par le théorème des bornes atteintes. Comme $f^{(4)} = g''$, on a $|f^{(4)}| \leq M_2$.

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, à partir de x , pour les points $x + h$ et $x - h$. Les deux segments sont inclus dans $[0, 1]$ et f est de classe C^4 , donc

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + R_+,$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + R_-,$$

avec $|R_+| \leq M_2 h^4/24$ et $|R_-| \leq M_2 h^4/24$.

En additionnant et en retranchant $2f(x)$, les termes impairs s'annulent :

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) - h^2 f''(x) = R_+ + R_-.$$

L'inégalité triangulaire donne un module au plus $M_2 h^4/12$. Comme $h > 0$, on peut diviser par h^2 et obtenir

$$\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{M_2 h^2}{12}.$$

II.3. Discrétisation de l'équation $f'' = g$

II.3.a. Avec $h = 1/(n+1)$, $x_k = kh$, $y_0 = a$ et $y_{n+1} = b$, les équations sont

$$2y_k - y_{k-1} - y_{k+1} = -h^2 g(x_k), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Pour $k = 1$, la valeur $y_0 = a$ est reportée à droite, donnant $2y_1 - y_2 = a - h^2 g(x_1)$. Pour $k = n$, on obtient $-y_{n-1} + 2y_n = b - h^2 g(x_n)$. Aux indices intérieurs,

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = -h^2 g(x_k).$$

Ainsi $AY = B$, avec

$$b_1 = a - h^2 g(x_1), \quad b_n = b - h^2 g(x_n), \quad b_k = -h^2 g(x_k) \quad (2 \leq k \leq n-1).$$

Pour $n = 2$, seuls les deux coefficients extrêmes interviennent ; ils sont distincts. Le vecteur Y est bien la solution $X = Y$ du système demandé, et il est unique puisque A est inversible.

II.3.b. Notons $f_k = f(x_k)$ pour $0 \leq k \leq n+1$ et $e_k = f_k - y_k$. On a $e_0 = e_{n+1} = 0$, puisque les valeurs aux bornes sont exactes.

Chaque point intérieur x_k et le pas h satisfont les hypothèses de II.2.b. Avec

$$f''(x_k) = g(x_k),$$

$$|f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1} - h^2 g(x_k)| \leq M_2 h^4 / 12.$$

D'autre part, $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = h^2 g(x_k)$. En soustrayant,

$$|e_{k+1} - 2e_k + e_{k-1}| \leq M_2 h^4 / 12.$$

Le vecteur $F - Y$ a pour composantes $e_1, \dots, e_n$. Grâce aux valeurs $e_0 = e_{n+1} = 0$, la composante k de $A(F - Y)$ vaut $2e_k - e_{k-1} - e_{k+1}$, même aux deux extrémités. Son module est donc au plus $M_2 h^4 / 12$. En prenant le maximum,

$$N(A(F - Y)) \leq \frac{M_2 h^4}{12}.$$

II.3.c. Appliquons I.5.d au vecteur $X = F - Y$ et au second membre $A(F - Y)$. On obtient

$$N(F - Y) \leq \frac{(n+1)^2}{8} N(A(F - Y)) \leq \frac{(n+1)^2}{8} \frac{M_2 h^4}{12}.$$

Comme $h = 1/(n+1)$,

$$N(F - Y) \leq \frac{M_2}{96(n+1)^2} = \frac{M_2 h^2}{96}.$$

Cette estimation montre que l'erreur maximale aux points de la grille tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, et fournit une borne explicite valable pour chaque $n \geq 2$.

II.4. Applications

II.4.a. Si $g'' = 0$, alors $M_2 = 0$. La majoration de II.3.c donne $0 \leq N(F - Y) \leq 0$, donc $F = Y$. Ainsi $y_k = f(x_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

On peut aussi constater que g est alors affine, donc f est un polynôme de degré au plus 3. Dans les développements de Taylor de II.2.b, les restes d'ordre 4 sont nuls : les différences finies centrées reproduisent exactement f'' aux points intérieurs.

II.4.b. Pour $g(x) = 1$, une primitive double donne $f(x) = x^2/2 + cx + d$. Les conditions $f(0) = f(1) = 0$ imposent $d = 0$ et $c = -1/2$. Ainsi

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{2} = -\frac{x(1-x)}{2}.$$

Comme $g'' = 0$, II.4.a donne

$$y_k = f(kh) = -\frac{kh(1 - kh)}{2} = -h^2 \frac{k(n + 1 - k)}{2}.$$

Le second membre du système de II.3.a vaut ici $B = -h^2 V$. Donc $A(-Y/h^2) = V$. Par unicité, $W = -Y/h^2$, d'où

$$w_k = \frac{k(n + 1 - k)}{2}.$$

On retrouve exactement la formule de I.5.b.

II.4.c. Méthode 1 — Application de l'exactitude pour un second membre affine.

Prenons $g(x) = x$ sur $[0, 1]$ et $a = b = 0$. La solution de $f'' = x$ avec ces conditions est

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{6},$$

car sa dérivée seconde vaut x et ses deux valeurs aux bornes sont nulles. On a $g'' = 0$, donc les approximations sont exactes : $y_k = f(kh) = (k^3 h^3 - kh)/6$.

Le second membre de II.3.a a pour composante $-h^2 g(kh) = -kh^3$. Si $B_* = {}^t(1, 2, \dots, n)$, on a donc $AY = -h^3 B_*$. Le vecteur $X = -Y/h^3$ vérifie $AX = B_*$, et ses composantes sont

$$x_k = -\frac{k^3 h^3 - kh}{6h^3} = \frac{k((n + 1)^2 - k^2)}{6}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

La division est légitime puisque $h > 0$. L'inversibilité de A assure l'unicité.

Méthode 2 — Vérification directe d'une suite cubique.

Posons $m = n + 1$ et $q_k = k(m^2 - k^2)/6$ pour $0 \leq k \leq m$. Alors $q_0 = q_m = 0$. Le développement du binôme donne

$$(k + 1)^3 + (k - 1)^3 - 2k^3 = 6k$$

et $(k + 1) + (k - 1) - 2k = 0$. Par conséquent,

$$2q_k - q_{k-1} - q_{k+1} = k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Le vecteur ${}^t(q_1, \dots, q_n)$ résout donc $AX = B_*$. Par unicité, il s'agit de la même solution. La première méthode utilise le lien entre le problème continu et sa discrétisation ; la seconde vérifie directement la formule entière.

Relevé des adaptations

Préambule. La définition imprimée de $N(X)$ répète $|x_n|$ en première position et omet $|x_1|$. Elle est rectifiée en $N(X) = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$, conformément au rôle de cette quantité dans toutes les estimations.

I.3.b. La notation imprimée « X une valeur propre » est rectifiée en « λ une valeur propre » pour distinguer la valeur propre du vecteur propre X .

I.4.c. La somme initiale est remplacée par la somme entièrement réelle

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta).$$

Une identité trigonométrique, démontrée puis sommée de façon télescopique, conserve le résultat nécessaire : ${}^t(X_p)X_p = (n+1)/2$.

Aucune question n'est supprimée ni admise. En I.1.a, les bases des suites sont démontrées directement par les formules d'addition et la détermination d'une suite par ses deux termes initiaux. Les calculs spectraux se font sans déterminant ni polynôme caractéristique.