



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1995

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, pour tout polynôme P à coefficients réels, on note $M(P)$ le maximum de la fonction $x \mapsto |P(x)|$ sur le segment $[-1, 1]$.

On se propose de majorer, pour tout entier naturel k , le maximum $M(P^{(k)})$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P , en fonction de $M(P)$.

Partie I

On étudie la suite de fonctions définies, pour tout réel x , par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, puis, pour $n \geq 1$, par

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (1)$$

I.1. Étude des polynômes T_n

I.1.a. Calculer $T_n(x)$ pour $n \leq 4$.

I.1.b. Établir que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme à coefficients entiers de degré n tel que, pour tout réel x ,

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

I.1.c. Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.

I.1.d. Dans la base canonique $(X^n, \dots, X, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n , on écrit

$$T_n(X) = \lambda_n[X^n + b_n X^{n-2} + c_n X^{n-4} + \dots],$$

les termes d'exposant négatif étant absents. Calculer le coefficient dominant λ_n . À l'aide de (1), exprimer b_{n+1} en fonction de b_n pour $n \geq 2$, puis calculer b_n en fonction de n pour $n \geq 2$.

I.2. Étude de T_n sur $]1, +\infty[$ pour $n \geq 1$

I.2.a. On considère la fonction définie pour $u \in]1, +\infty[$ par

$$x = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right).$$

Établir qu'elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$, puis montrer que

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right).$$

I.2.b. En déduire que, pour $x > 1$, $T_n(x) > 1$, puis montrer par récurrence que, pour $x \geq 1$,

$$T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n.$$

I.3. Étude de T_n sur $[-1, 1]$ pour $n \geq 1$

I.3.a. À l'aide de (1), établir, pour tout réel θ ,

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta). \quad (2)$$

En déduire le maximum $M(T_n)$.

I.3.b. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$\alpha_k = \cos \left(\frac{(n-k)\pi}{n} \right).$$

On remarquera que $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = 1$.

Calculer $T_n(\alpha_k)$ pour $0 \leq k \leq n$, puis prouver que, pour tout réel x , l'égalité $|T_n(x)| = M(T_n)$ a lieu si et seulement si $x \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$.

I.4. Équation différentielle vérifiée par T_n pour $n \geq 1$

I.4.a. En dérivant (2), exprimer $T'_n(\cos \theta)$ en fonction de θ , pour $0 < \theta < \pi$.

En déduire, pour $n \geq 2$, la valeur de $T'_n(\alpha_k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Était-ce prévisible?

À l'aide d'un passage à la limite, déterminer enfin $T'_n(1)$ et $T'_n(-1)$.

I.4.b. En dérivant deux fois (2), établir, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$(x^2 - 1)T''_n(x) + xT'_n(x) - n^2T_n(x) = 0. \quad (3)$$

Prouver que cette relation reste valable pour tout réel x .

I.4.c. Soit j un entier tel que $0 \leq j \leq n-1$. En dérivant j fois (3), établir que

$$T_n^{(j+1)}(1) = \frac{n^2 - j^2}{2j+1} T_n^{(j)}(1).$$

I.4.d. En déduire, en fonction de n , le réel μ_n tel que, pour $1 \leq j \leq n$,

$$T_n^{(j)}(1) = \mu_n 2^{j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!}.$$

Partie II

On désigne par n un entier naturel non nul ; les nombres $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont ceux définis dans la partie I. Pour $0 \leq k \leq n$, on pose

$$L_k(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{x - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j}.$$

II.1. Étude d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$

II.1.a. Calculer $L_k(\alpha_k)$ et $L_k(\alpha_j)$ pour $0 \leq k, j \leq n$ et $j \neq k$.

II.1.b. Établir que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.1.c. Déterminer, dans cette base, les composantes d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et, à l'aide des résultats de la partie I, donner les composantes de T_n .

II.2. Majoration de $|P(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $\deg P \leq n$

II.2.a. Établir que, pour $x \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, $(-1)^{n-k} L_k(x) \geq 0$. En déduire, pour $x \geq 1$,

$$T_n(x) = |L_0(x)| + \dots + |L_n(x)|.$$

II.2.b. Établir, pour $x \geq 1$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$|P(x)| \leq M(P) T_n(x). \quad (4)$$

II.2.c. On se propose de minorer $M(P)$ lorsque P est un polynôme unitaire de degré n , c'est-à-dire dont le coefficient de x^n est égal à 1.

À l'aide de (4), établir successivement, pour $x \geq 1$ et tout tel P ,

$$M(P) \geq \frac{|P(x)|}{2^{n-1}x^n}, \quad M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donner, en fonction de T_n , un polynôme unitaire de degré n tel que $M(P) = 1/2^{n-1}$.

II.3. Majoration de $|P'(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $\deg P \leq n$

II.3.a. Montrer à l'aide du théorème de Rolle, dont on rappellera précisément l'énoncé, que, pour $0 \leq k \leq n$, L'_k possède $n - 1$ racines réelles distinctes dans $] - 1, 1[$.

Déterminer le coefficient dominant de L'_k et en déduire, pour $x \geq 1$,

$$(-1)^{n-k} L'_k(x) \geq 0.$$

II.3.b. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer P' comme combinaison linéaire de $L'_0, \dots, L'_n$. En déduire, pour $x \geq 1$,

$$T'_n(x) = |L'_0(x)| + \dots + |L'_n(x)|.$$

II.3.c. Établir, pour $x \geq 1$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$|P'(x)| \leq M(P)T'_n(x). \quad (5)$$

II.4. Majoration de $|P^{(j)}(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $0 \leq j \leq \deg P \leq n$

II.4.a. Montrer que, pour $0 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $L_k^{(j)}$ possède $n - j$ racines réelles distinctes dans $] - 1, 1[$. Pour $j = 0$, préciser ses n racines dans $[-1, 1]$.

En déduire, pour $0 \leq j \leq n$ et $x \geq 1$,

$$(-1)^{n-k} L_k^{(j)}(x) \geq 0.$$

II.4.b. En raisonnant comme précédemment, établir, pour $x \geq 1$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$|P^{(j)}(x)| \leq M(P)T_n^{(j)}(x). \quad (6)$$

Partie III

Dans cette partie, $\lambda \in [0, 1]$.

III.1. Déterminer l'image du segment $[-1, 1]$ par l'application

$$x \mapsto \frac{\lambda + 1}{2}x + \frac{\lambda - 1}{2}.$$

Pour tout polynôme réel P de degré $n \geq 1$, on pose

$$P_\lambda(x) = P\left(\frac{\lambda + 1}{2}x + \frac{\lambda - 1}{2}\right).$$

Établir que $M(P_\lambda) \leq M(P)$.

III.2. Majoration de $M(P')$ en fonction de $M(P)$

III.2.a. Déterminer $P'_\lambda(1)$ et déduire de (5) que

$$|P'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1 + \lambda} M(P).$$

III.2.b. En déduire que

$$M(P') \leq 2n^2 M(P). \quad (7)$$

On pourra aussi introduire le polynôme $Q(x) = P(-x)$.

III.3. Majoration de $M(P^{(j)})$ en fonction de $M(P)$

III.3.a. Déduire de (7) que, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$,

$$M(P^{(j)}) \leq 2^j \left(\frac{n!}{(n-j)!} \right)^2 M(P). \quad (8)$$

III.3.b. On se propose d'améliorer (8). Établir que

$$|P^{(j)}(\lambda)| \leq \left(\frac{2}{1+\lambda} \right)^j T_n^{(j)}(1) M(P).$$

En déduire, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$,

$$M(P^{(j)}) \leq n 2^{2j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!} M(P),$$

et prouver que cette majoration est meilleure que celle obtenue en (8).