



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1995

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Le maximum $M(P)$ existe pour tout polynôme réel P , car la fonction $x \mapsto |P(x)|$ est continue sur le segment $[-1, 1]$. On utilisera $P^{(0)} = P$ et la convention qu'un produit vide vaut 1.

I.1.a. Premiers polynômes

Les deux premiers polynômes sont donnés : $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$. En appliquant la relation (1),

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Ce sont les cinq polynômes demandés, de T_0 à T_4 .

I.1.b. Coefficients, degré et parité

On raisonne par récurrence à deux rangs. Les polynômes $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ ont des coefficients entiers, les degrés annoncés et vérifient $T_0(-x) = T_0(x)$, $T_1(-x) = -T_1(x)$.

Supposons les propriétés établies aux rangs n et $n - 1$, avec $n \geq 1$. Dans

$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, les deux termes ont des coefficients entiers, donc leur différence aussi. Le premier terme a degré $n + 1$ et le second degré $n - 1$; le coefficient de degré $n + 1$ ne peut être annulé. Donc $\deg T_{n+1} = n + 1$.

Pour la parité, les hypothèses de récurrence donnent

$$T_{n+1}(-x) = -2x(-1)^n T_n(x) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(x) = (-1)^{n+1} (2xT_n(x) - T_{n-1}(x)).$$

On a donc $T_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x)$. Toutes les propriétés sont établies pour chaque entier $n \geq 0$.

La parité entraîne que seuls les exposants de même parité que n peuvent apparaître dans T_n .

I.1.c. Valeurs aux extrémités

Les valeurs initiales sont $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Si $T_n(1) = T_{n-1}(1) = 1$, la relation (1) donne $T_{n+1}(1) = 2 - 1 = 1$. Ainsi $T_n(1) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

En utilisant la parité de I.1.b,

$$T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n.$$

Donc $T_n(1) = 1$ et $T_n(-1) = (-1)^n$.

I.1.d. Coefficients dominants et coefficient suivant

On a $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_1 = 1$. Pour $n \geq 1$, la relation (1) et la différence des degrés donnent $\lambda_{n+1} = 2\lambda_n$. Par récurrence,

$$\lambda_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 1),$$

avec $\lambda_0 = 1$ traité séparément.

Pour $n \geq 2$, le coefficient b_n est bien défini. Le coefficient de X^{n-1} dans $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est $2\lambda_n b_n - \lambda_{n-1}$. Il est également $\lambda_{n+1} b_{n+1}$. Donc

$$b_{n+1} = b_n - \frac{\lambda_{n-1}}{2\lambda_n}.$$

Pour $n \geq 2$, $\lambda_n = 2^{n-1}$ et $\lambda_{n-1} = 2^{n-2}$, y compris lorsque $n = 2$. Ainsi

$$b_{n+1} = b_n - \frac{1}{4}.$$

Comme $T_2 = 2(X^2 - 1/2)$, $b_2 = -1/2$. La suite $(b_n)_{n \geq 2}$ est arithmétique de raison $-1/4$, donc

$$b_n = -\frac{1}{2} - \frac{n-2}{4} = -\frac{n}{4} \quad (n \geq 2).$$

Les coefficients b_n et c_n ne sont utilisés que lorsque les exposants correspondants sont non négatifs.

I.2.a. Changement de variable sur $]1, +\infty[$

Définissons $h(u) = (u + u^{-1})/2$ pour $u > 1$. Cette fonction est continue, dérivable, et

$$h'(u) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) > 0.$$

Elle est donc strictement croissante. Ses limites sont $\lim_{u \rightarrow 1^+} h(u) = 1$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = +\infty$. Le théorème de la bijection donne une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.

Pour un réel $x > 1$, l'unique antécédent est $u = x + \sqrt{x^2 - 1} > 1$: l'équation $u + u^{-1} = 2x$ équivaut à $u^2 - 2xu + 1 = 0$, et l'autre solution $x - \sqrt{x^2 - 1} = 1/u$ appartient à $]0, 1[$.

Fixons $u > 1$ et $x = h(u)$. Posons $F_n = (u^n + u^{-n})/2$. On a $F_0 = 1$ et $F_1 = x$. Puisque $2x = u + u^{-1}$,

$$2xF_n - F_{n-1} = \frac{(u + u^{-1})(u^n + u^{-n}) - (u^{n-1} + u^{-(n-1)})}{2} = \frac{u^{n+1} + u^{-(n+1)}}{2} = F_{n+1}.$$

Les mêmes valeurs initiales et la même récurrence caractérisent $T_n(x)$. Une récurrence donne donc

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(u^n + u^{-n}).$$

Cette formule est entièrement réelle.

I.2.b. Positivité et majoration

Pour $x > 1$, l'antécédent $u > 1$ de I.2.a vérifie, pour $n \geq 1$,

$$T_n(x) - 1 = \frac{1}{2}(u^n + u^{-n} - 2) = \frac{1}{2}(u^{n/2} - u^{-n/2})^2 > 0.$$

Donc $T_n(x) > 1$. Pour $x = 1$, I.1.c donne $T_n(1) = 1$. En particulier, tous les $T_n(x)$ sont positifs pour $x \geq 1$, y compris $T_0(x) = 1$.

Pour la majoration imposée, on raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Au rang 1,

$T_1(x) = x = 2^0 x$. Si $T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n$, la positivité de $T_{n-1}(x)$ donne

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \leq 2xT_n(x) \leq 2^n x^{n+1},$$

car $x \geq 1$ est positif. Ainsi $T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 1$.

I.3.a. Formule trigonométrique et maximum

Les formules d'addition du cosinus donnent

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta),$$

car les deux termes contenant les sinus se compensent. Les valeurs initiales sont $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos 0$ et $T_1(\cos \theta) = \cos \theta$. La relation (1) et l'identité précédente permettent une récurrence à deux rangs :

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

pour tout réel θ et tout entier $n \geq 0$.

Le cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Ainsi chaque $x \in [-1, 1]$ s'écrit $x = \cos \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$, et $|T_n(x)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$. Comme $T_n(1) = 1$, on conclut $M(T_n) = 1$.

I.3.b. Points où la valeur absolue vaut un

Pour $0 \leq k \leq n$, la formule (2) donne

$$T_n(\alpha_k) = \cos((n-k)\pi) = (-1)^{n-k}.$$

Les angles $(n-k)\pi/n$ décroissent de π à 0 ; le cosinus est strictement décroissant en son argument sur $[0, \pi]$. Les α_k sont donc strictement croissants, de -1 à 1 , comme annoncé.

Si $x \in [-1, 1]$, écrivons $x = \cos \theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$. On a

$$|T_n(x)| = 1 \iff |\cos(n\theta)| = 1 \iff n\theta = \ell\pi,$$

pour un entier $\ell \in \{0, \dots, n\}$. Ainsi $x = \cos(\ell\pi/n) = \alpha_{n-\ell}$. Réciproquement, la valeur absolue en chacun des α_k vaut 1.

Il faut aussi traiter les réels extérieurs au segment, puisque la question porte sur tout réel x . Si $x > 1$, I.2.b donne $T_n(x) > 1$. Si $x < -1$, la parité entraîne $|T_n(x)| = |T_n(-x)| > 1$. Ces réels ne peuvent donc vérifier l'égalité.

Finalement, $|T_n(x)| = M(T_n)$ si et seulement si $x \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$.

I.4.a. Dérivée et valeurs aux extrémités

La fonction T_n est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant (2) par rapport à θ ,

$$-\sin \theta T'_n(\cos \theta) = -n \sin(n\theta).$$

Pour $0 < \theta < \pi$, $\sin \theta > 0$; on peut diviser et obtenir

$$T'_n(\cos \theta) = n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}.$$

Si $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, l'angle $\theta = (n-k)\pi/n$ appartient à $]0, \pi[$ et $\sin(n\theta) = \sin((n-k)\pi) = 0$. Donc $T'_n(\alpha_k) = 0$.

C'était prévisible : à chaque point intérieur α_k , T_n vaut 1 ou -1 et reste entre ces bornes sur le segment. Ce point est donc un extremum local d'une fonction dérivable sur un ouvert, ce qui impose une dérivée nulle.

Pour calculer $T'_n(1)$ par la méthode demandée, faisons tendre θ vers 0^+ . La continuité de la dérivée polynomiale donne $T'_n(\cos \theta) \rightarrow T'_n(1)$. En utilisant $\sin t \sim t$ en zéro,

$$n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \rightarrow n^2.$$

Ainsi $T'_n(1) = n^2$.

Pour l'autre extrémité, posons $h = \pi - \theta \rightarrow 0^+$. Les formules d'addition donnent $\sin \theta = \sin h$ et $\sin(n\theta) = \sin(n\pi - nh) = (-1)^{n+1} \sin(nh)$. Donc

$$n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} = (-1)^{n+1} n \frac{\sin(nh)}{\sin h} \rightarrow (-1)^{n+1} n^2.$$

La continuité donne $T'_n(-1) = (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n-1} n^2$. Les résultats valent aussi pour $n = 1$, où la dérivée est constamment égale à 1.

I.4.b. Identité différentielle polynomiale

En dérivant deux fois la fonction $\theta \mapsto T_n(\cos \theta)$, on obtient

$$\frac{d^2}{d\theta^2} T_n(\cos \theta) = -\cos \theta T'_n(\cos \theta) + \sin^2 \theta T''_n(\cos \theta).$$

La dérivée seconde de $\cos(n\theta)$ est $-n^2 \cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos \theta)$. Pour $0 < \theta < \pi$, en posant $x = \cos \theta$ et en utilisant $\sin^2 \theta = 1 - x^2$,

$$(1 - x^2) T''_n(x) - x T'_n(x) = -n^2 T_n(x).$$

Cela équivaut à $(x^2 - 1)T_n''(x) + xT_n'(x) - n^2T_n(x) = 0$ sur $] -1, 1[$. Le membre de gauche est polynomial, donc continu ; l'égalité s'étend à $x = \pm 1$ par passage à la limite.

Pour l'étendre à tout réel, considérons ce membre comme un polynôme $R(x)$. Il s'annule sur un intervalle et possède donc une infinité de racines distinctes. Un polynôme non nul ne pouvant avoir plus de racines que son degré, R est le polynôme nul. Ainsi (3) est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On n'a pas utilisé de théorie générale des équations différentielles : il s'agit d'une identité de polynômes obtenue par dérivation.

I.4.c. Récurrence sur les dérivées en un

Pour $0 \leq j \leq n - 1$, appliquons la formule de Leibniz à la dérivée d'ordre j de (3). Le polynôme $x^2 - 1$ a pour dérivées $2x$, 2 , puis zéro. On obtient

$$((x^2 - 1)T_n'')^{(j)} = (x^2 - 1)T_n^{(j+2)} + 2jxT_n^{(j+1)} + j(j-1)T_n^{(j)},$$

les termes comportant un facteur j ou $j(j-1)$ étant absents lorsqu'ils correspondent à un ordre impossible. De même,

$$(xT_n')^{(j)} = xT_n^{(j+1)} + jT_n^{(j)}.$$

En additionnant les termes, la dérivée d'ordre j de (3) s'écrit

$$(x^2 - 1)T_n^{(j+2)}(x) + (2j + 1)xT_n^{(j+1)}(x) + (j^2 - n^2)T_n^{(j)}(x) = 0.$$

En évaluant en $x = 1$, le premier terme est nul. Comme $2j + 1 > 0$, on peut diviser et conclure

$$T_n^{(j+1)}(1) = \frac{n^2 - j^2}{2j + 1} T_n^{(j)}(1).$$

I.4.d. Formule factorielle

Notons $d_j = T_n^{(j)}(1)$. On a $d_0 = T_n(1) = 1$. En itérant la relation de I.4.c, pour $1 \leq j \leq n$,

$$d_j = \prod_{\ell=0}^{j-1} \frac{n^2 - \ell^2}{2\ell + 1}.$$

Les facteurs du numérateur sont tous strictement positifs, puisque $\ell \leq n - 1$.

Décomposons-les en $(n - \ell)(n + \ell)$:

$$\prod_{\ell=0}^{j-1} (n - \ell) = \frac{n!}{(n - j)!}, \quad \prod_{\ell=0}^{j-1} (n + \ell) = \frac{(n + j - 1)!}{(n - 1)!}.$$

Pour le dénominateur, séparons les facteurs pairs et impairs dans $(2j)!$:

$$\prod_{\ell=0}^{j-1} (2\ell + 1) = \frac{(2j)!}{2^j j!} = \frac{(2j - 1)!}{2^{j-1} (j - 1)!}.$$

Par conséquent,

$$d_j = \frac{n!(n + j - 1)!}{(n - j)!(n - 1)!} \frac{2^{j-1} (j - 1)!}{(2j - 1)!} = n 2^{j-1} \frac{(j - 1)!(n + j - 1)!}{(2j - 1)!(n - j)!}.$$

Le réel demandé est donc $\mu_n = n$. Toutes les factorielles ont des arguments entiers positifs ou nuls, y compris pour $j = n$, où $(n - j)! = 0! = 1$.

On relève pour la suite que $T_n^{(j)}(1) > 0$ pour $0 \leq j \leq n$.

Partie II

Les nœuds $\alpha_0 < \dots < \alpha_n$ sont distincts. Les dénominateurs qui définissent les L_k sont donc tous non nuls, et chaque L_k est un polynôme de degré exactement n .

II.1.a. Valeurs aux nœuds

En $x = \alpha_k$, chaque facteur vaut 1, donc $L_k(\alpha_k) = 1$.

Si $j \neq k$, le produit définissant $L_k(\alpha_j)$ contient le facteur $\alpha_j - \alpha_j = 0$ au numérateur. Donc $L_k(\alpha_j) = 0$.

On a ainsi $L_k(\alpha_j) = 1$ si $j = k$ et 0 sinon.

II.1.b. Base d'interpolation

Méthode 1 — Liberté et dimension

Supposons

$$\sum_{k=0}^n a_k L_k = 0.$$

En évaluant en α_j et en utilisant II.1.a, on obtient $a_j = 0$ pour chaque j . La famille est donc libre.

Elle possède $n + 1$ éléments dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension $n + 1$. C'est donc une base.

Méthode 2 — Reconstruction des polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons

$$R = P - \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k.$$

Ce polynôme a degré au plus n et, par II.1.a, s'annule aux $n + 1$ nœuds distincts α_j .

Un polynôme non nul de degré au plus n ne peut posséder $n + 1$ racines distinctes ; ainsi $R = 0$. Chaque P est donc combinaison linéaire des L_k , qui forment une famille

génératrice. Comme elle compte $n + 1$ éléments dans un espace de dimension $n + 1$, c'est une base.

La première méthode utilise les évaluations pour prouver la liberté ; la seconde établit directement la formule d'interpolation par le nombre de racines.

II.1.c. Composantes de P et de T_n

Si

$$P = \sum_{k=0}^n a_k L_k,$$

l'évaluation en α_j donne $a_j = P(\alpha_j)$. Les coordonnées dans cette base sont donc

$$(P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)),$$

et la formule d'interpolation est

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k(x).$$

Pour $P = T_n$, I.3.b donne $T_n(\alpha_k) = (-1)^{n-k}$; les coordonnées sont $((-1)^n, (-1)^{n-1}, \dots, 1)$, et

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L_k(x).$$

II.2.a. Signe des polynômes de base à droite du segment

Le dénominateur

$$D_k = \prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)$$

possède exactement $n - k$ facteurs négatifs, ceux pour lesquels $j > k$. Ainsi son signe est $(-1)^{n-k}$.

Pour $x \geq 1$, tous les facteurs $x - \alpha_j$ sont positifs ou nuls. Donc $(-1)^{n-k} L_k(x) \geq 0$, ce qui implique $(-1)^{n-k} L_k(x) = |L_k(x)|$.

En utilisant la formule de II.1.c,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L_k(x) = \sum_{k=0}^n |L_k(x)|.$$

Pour $x > 1$, aucun facteur du numérateur n'est nul ; à $x = 1$, certains $L_k(1)$ sont nuls, d'où l'importance de conserver une inégalité large.

II.2.b. Majoration d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, chaque nœud appartient à $[-1, 1]$, donc $|P(\alpha_k)| \leq M(P)$. À partir de l'interpolation et de l'inégalité triangulaire,

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^n |P(\alpha_k)| |L_k(x)| \leq M(P) \sum_{k=0}^n |L_k(x)|.$$

Pour $x \geq 1$, la dernière somme vaut $T_n(x)$ par II.2.a. Ainsi

$$|P(x)| \leq M(P) T_n(x).$$

Cette conclusion inclut le polynôme nul, pour lequel les deux membres sont nuls.

II.2.c. Minimum pour les polynômes unitaires

Méthode 1 — Majoration extérieure et coefficient dominant

Soit P unitaire de degré n . Pour $x \geq 1$, les questions II.2.b et I.2.b donnent

$$|P(x)| \leq M(P) T_n(x) \leq M(P) 2^{n-1} x^n.$$

Comme $2^{n-1}x^n > 0$, on peut diviser et obtenir $M(P) \geq |P(x)|/(2^{n-1}x^n)$.

Écrivons $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{P(x)}{x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \rightarrow 1,$$

donc $|P(x)|/x^n \rightarrow 1$. En passant à la limite dans la minoration, $M(P) \geq 2^{1-n}$.

Le polynôme $Q = 2^{1-n}T_n$ est unitaire, puisque le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} , et $M(Q) = 2^{1-n}M(T_n) = 2^{1-n}$. Il atteint donc la borne.

Méthode 2 — Alternance et degré du polynôme différence

Posons encore $Q = 2^{1-n}T_n$ et $c = 2^{1-n} > 0$. Supposons qu'un polynôme unitaire P de degré n vérifie $M(P) < c$.

Les coefficients dominants de Q et de P sont tous deux égaux à 1. Le polynôme $D = Q - P$ a donc degré au plus $n - 1$. Aux nœuds,

$$Q(\alpha_k) = c(-1)^{n-k}, \quad |P(\alpha_k)| < c.$$

Ainsi $D(\alpha_k)$ est non nul et a le signe de $Q(\alpha_k)$. Ces signes alternent. Par continuité et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine de D dans chacun des n intervalles disjoints $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$.

Le polynôme D est non nul, car ses valeurs aux nœuds ne sont pas nulles; il aurait donc au moins n racines distinctes et un degré au plus $n - 1$, ce qui est impossible. Ainsi $M(P) \geq c$. Le même Q atteint la borne.

La première méthode suit l'instruction du sujet et lit le coefficient dominant à l'infini; la seconde montre le rôle de l'alternance des valeurs sur le segment.

II.3.a. Racines de L'_k et signe à droite

Rappelons le théorème de Rolle : si une fonction est continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le polynôme L_k possède les n racines distinctes α_j pour $j \neq k$. Rangeons-les en ordre croissant $r_1 < \dots < r_n$ dans $[-1, 1]$. Si $n \geq 2$, on applique Rolle sur chaque segment $[r_\ell, r_{\ell+1}]$: le polynôme est continu et dérivable, et vaut zéro aux deux extrémités. On obtient une racine de L'_k dans chacun des $n - 1$ intervalles ouverts, qui sont disjoints et contenus dans $] - 1, 1[$.

Le coefficient dominant de L_k est

$$d_k = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)} \neq 0.$$

Celui de L'_k est nd_k , donc L'_k a degré exactement $n - 1$. Les $n - 1$ racines précédentes sont donc toutes ses racines et sont simples. Si $n = 1$, L'_k est une constante non nulle : il possède bien zéro racine, conformément à $n - 1 = 0$.

En notant $r'_1, \dots, r'_{n-1}$ ces racines et en utilisant la factorisation réelle,

$$L'_k(x) = nd_k \prod_{\ell=1}^{n-1} (x - r'_\ell).$$

Pour $x \geq 1$, chaque facteur est strictement positif puisque $r'_\ell < 1$. Le signe est donc celui de d_k , soit $(-1)^{n-k}$ par II.2.a. Ainsi $(-1)^{n-k} L'_k(x) > 0$, ce qui entraîne l'inégalité large demandée.

II.3.b. Combinaisons linéaires des dérivées

La formule d'interpolation est une somme finie de polynômes. On peut donc la dériver terme à terme sans aucune question de convergence :

$$P'(x) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L'_k(x).$$

Pour $P = T_n$, les coefficients sont $(-1)^{n-k}$. Par le signe établi en II.3.a, pour $x \geq 1$,

$$T'_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L'_k(x) = \sum_{k=0}^n |L'_k(x)|.$$

II.3.c. Majoration de la première dérivée

En utilisant la formule de II.3.b puis $|P(\alpha_k)| \leq M(P)$,

$$|P'(x)| \leq \sum_{k=0}^n |P(\alpha_k)| |L'_k(x)| \leq M(P) \sum_{k=0}^n |L'_k(x)|.$$

Pour $x \geq 1$, la dernière somme est $T'_n(x)$. Ainsi

$$|P'(x)| \leq M(P) T'_n(x).$$

En particulier, cette inégalité est valable en $x = 1$, ce qui sera utilisé dans la partie III.

II.4.a. Racines des dérivées successives

Rectification de l'énoncé original : celui-ci place les racines de $L_k^{(j)}$ dans l'intervalle ouvert même lorsque $j = 0$. Or L_k peut s'annuler en -1 ou en 1 . On distingue donc l'ordre zéro des ordres strictement positifs.

Pour $j = 0$, le polynôme L_k a exactement les n racines α_ℓ avec $\ell \neq k$, toutes dans $[-1, 1]$. Lorsqu'un nœud extrême est présent, cette racine n'est pas dans l'intervalle ouvert.

Pour $j = 1$, II.3.a donne $n - 1$ racines distinctes dans $] - 1, 1[$. Si, pour un entier j avec $1 \leq j < n$, $L_k^{(j)}$ possède $n - j$ racines distinctes dans cet intervalle, Rolle entre deux racines successives donne $n - j - 1$ racines distinctes de $L_k^{(j+1)}$, encore dans $] - 1, 1[$.

La dérivée d'ordre j d'un polynôme de degré n et de coefficient dominant d_k a degré $n - j$ et coefficient dominant

$$\frac{n!}{(n-j)!} d_k,$$

qui est non nul. Les nombres de racines obtenus par Rolle sont donc maximaux. Pour $j = n$, la dérivée est une constante non nulle et possède zéro racine. Par récurrence,

l'affirmation est établie pour tout $1 \leq j \leq n$.

Pour ces ordres, la factorisation par les racines donne

$$L_k^{(j)}(x) = \frac{n!}{(n-j)!} d_k \prod_{\ell=1}^{n-j} (x - r_{k,j,\ell}),$$

avec $r_{k,j,\ell} \in]-1, 1[$. Pour $x \geq 1$, les facteurs et le coefficient $n!/(n-j)!$ sont positifs ; le signe est celui de d_k , soit $(-1)^{n-k}$. On a donc $(-1)^{n-k} L_k^{(j)}(x) > 0$ pour $j \geq 1$.

Pour $j = 0$, le signe large a déjà été établi en II.2.a. Ainsi, pour tout $0 \leq j \leq n$ et tout $x \geq 1$,

$$(-1)^{n-k} L_k^{(j)}(x) \geq 0.$$

II.4.b. Majoration d'une dérivée quelconque

Pour $0 \leq j \leq n$, la dérivation d'ordre j de la somme finie d'interpolation donne

$$P^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k^{(j)}(x),$$

et, pour $P = T_n$,

$$T_n^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L_k^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^n |L_k^{(j)}(x)| \quad (x \geq 1),$$

par II.4.a. Ainsi

$$|P^{(j)}(x)| \leq \sum_{k=0}^n |P(\alpha_k)| |L_k^{(j)}(x)| \leq M(P) T_n^{(j)}(x).$$

On a établi (6). Le raisonnement couvre aussi $j = 0$, où il redonne (4), et $j = 1$, où il redonne (5). Si $j > \deg P$ mais $j \leq n$, le membre de gauche est nul et l'inégalité reste

vraie. Elle est donc valable pour tous les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, y compris le polynôme nul.

Partie III

Dans cette partie, P est un polynôme réel de degré $n \geq 1$, et $\lambda \in [0, 1]$.

III.1. Image par l'application affine

Posons $h_\lambda(x) = ((\lambda + 1)/2)x + (\lambda - 1)/2$. Son coefficient directeur $(\lambda + 1)/2$ est strictement positif. L'application est donc strictement croissante, avec

$$h_\lambda(-1) = -1, \quad h_\lambda(1) = \lambda.$$

Ainsi $h_\lambda([-1, 1]) = [-1, \lambda] \subset [-1, 1]$. Comme $P_\lambda = P \circ h_\lambda$,

$$M(P_\lambda) = \max_{t \in [-1, \lambda]} |P(t)| \leq \max_{t \in [-1, 1]} |P(t)| = M(P).$$

Le coefficient directeur est non nul ; la composition avec cette application affine conserve le degré n de P .

III.2.a. Borne de la première dérivée en λ

Par dérivation d'une composée,

$$P'_\lambda(x) = \frac{\lambda + 1}{2} P' \left(\frac{\lambda + 1}{2} x + \frac{\lambda - 1}{2} \right).$$

En $x = 1$, l'argument vaut λ , donc $P'_\lambda(1) = ((\lambda + 1)/2) P'(\lambda)$.

Appliquons (5) à P_λ , de degré n , en $x = 1$. Par I.4.a et III.1,

$$|P'_\lambda(1)| \leq M(P_\lambda) T'_n(1) \leq n^2 M(P).$$

Comme $(\lambda + 1)/2 > 0$, on peut diviser et obtenir

$$|P'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1 + \lambda} M(P).$$

III.2.b. Borne uniforme sur tout le segment

Méthode 1 — Réflexion du polynôme

Pour $x \in [0, 1]$, la question III.2.a, appliquée avec $\lambda = x$, donne

$$|P'(x)| \leq \frac{2n^2}{1+x} M(P) \leq 2n^2 M(P).$$

Pour $x \in [-1, 0]$, posons $Q(t) = P(-t)$ et $\lambda = -x \in [0, 1]$. On a $\deg Q = n$, $M(Q) = M(P)$ puisque $t \mapsto -t$ est une bijection du segment sur lui-même, et $Q'(\lambda) = -P'(-\lambda) = -P'(x)$.

La même question appliquée à Q donne

$$|P'(x)| = |Q'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1+\lambda} M(Q) \leq 2n^2 M(P).$$

La majoration vaut donc en tout point de $[-1, 1]$. En prenant le maximum, $M(P') \leq 2n^2 M(P)$.

On obtient même la borne ponctuelle $|P'(x)| \leq 2n^2 M(P)/(1+|x|)$ sur tout le segment.

Méthode 2 — Choisir une application affine adaptée au point

On peut traiter un point $x \in [-1, 1]$ directement en le plaçant à l'extrémité correspondant à 1 d'un sous-segment.

Si $x \geq 0$, définissons $R(t) = P(((1+x)/2)t + (x-1)/2)$. L'argument parcourt $[-1, x]$ pour $t \in [-1, 1]$, donc $M(R) \leq M(P)$, et $R'(1) = ((1+x)/2)P'(x)$.

Si $x \leq 0$, définissons $R(t) = P(-((1-x)/2)t + (1+x)/2)$. L'argument parcourt $[x, 1]$, avec sa valeur x en $t = 1$. Donc $M(R) \leq M(P)$ et $R'(1) = -((1-x)/2)P'(x)$.

Dans les deux cas, le coefficient affine est non nul, R a degré n , et

$$|R'(1)| = ((1+|x|)/2)|P'(x)|. \text{ En appliquant (5) à } R \text{ en } 1, |R'(1)| \leq n^2 M(R) \leq n^2 M(P).$$

On retrouve

$$|P'(x)| \leq \frac{2n^2}{1+|x|} M(P) \leq 2n^2 M(P).$$

Le maximum donne encore (7). La première méthode suit l'indication du sujet ; la seconde montre comment transporter directement une borne à l'extrémité vers un point quelconque du segment.

III.3.a. Itération de la première majoration

Pour $0 \leq r \leq n-1$, le polynôme $P^{(r)}$ a degré $n-r \geq 1$. La borne (7), appliquée à ce polynôme avec ce degré, donne

$$M(P^{(r+1)}) \leq 2(n-r)^2 M(P^{(r)}).$$

En répétant ces inégalités jusqu'à l'ordre j , pour $1 \leq j \leq n$,

$$M(P^{(j)}) \leq \left(\prod_{r=0}^{j-1} 2(n-r)^2 \right) M(P) = 2^j \left(\frac{n!}{(n-j)!} \right)^2 M(P).$$

Pour $j=0$, la formule donne $M(P) \leq M(P)$, donc une égalité. Pour $j=n$, la dernière application concerne un polynôme de degré 1, et le résultat obtenu est constant ; les hypothèses sont donc satisfaites à chaque étape.

III.3.b. Borne améliorée et comparaison des constantes

La dérivation répétée d'une composée avec une application affine donne, par récurrence sur j ,

$$P_\lambda^{(j)}(x) = \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^j P^{(j)} \left(\frac{1+\lambda}{2}x + \frac{\lambda-1}{2} \right).$$

La propriété est vraie pour $j=0$, et une nouvelle dérivation multiplie à chaque étape par le coefficient directeur constant. En $x=1$, on obtient

$$P_\lambda^{(j)}(1) = \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^j P^{(j)}(\lambda).$$

Appliquons (6) à P_λ en 1, puis III.1 :

$$|P_\lambda^{(j)}(1)| \leq T_n^{(j)}(1) M(P_\lambda) \leq T_n^{(j)}(1) M(P).$$

Le facteur $(1+\lambda)/2$ est strictement positif, donc

$$|P^{(j)}(\lambda)| \leq \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^j T_n^{(j)}(1)M(P).$$

Cette formule vaut pour $0 \leq j \leq n$. Pour traiter les points négatifs, reprenons

$Q(t) = P(-t)$: par dérivations successives, $Q^{(j)}(t) = (-1)^j P^{(j)}(-t)$ et $M(Q) = M(P)$. La même borne, avec $\lambda = |x|$, donne sur tout $[-1, 1]$

$$|P^{(j)}(x)| \leq \left(\frac{2}{1+|x|}\right)^j T_n^{(j)}(1)M(P) \leq 2^j T_n^{(j)}(1)M(P).$$

La dernière étape utilise $1 + |x| \geq 1$ et $T_n^{(j)}(1) > 0$ pour $j \leq n$, établi en I.4.d. En prenant le maximum, puis en remplaçant la dérivée par sa formule pour $1 \leq j \leq n$,

$$M(P^{(j)}) \leq 2^j T_n^{(j)}(1)M(P) = n 2^{2j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!} M(P).$$

Comparons maintenant les deux constantes, sans diviser par $M(P)$. Notons

$$A_{n,j} = 2^j \left(\frac{n!}{(n-j)!}\right)^2, \quad B_{n,j} = 2^j T_n^{(j)}(1).$$

Ces constantes sont strictement positives pour $1 \leq j \leq n$. La formule produit de I.4.d donne

$$\frac{B_{n,j}}{A_{n,j}} = \prod_{\ell=0}^{j-1} \frac{n^2 - \ell^2}{(2\ell+1)(n-\ell)^2} = \prod_{\ell=0}^{j-1} \frac{n+\ell}{(2\ell+1)(n-\ell)}.$$

Pour chaque $0 \leq \ell \leq n-1$, le dénominateur est positif et

$$(2\ell+1)(n-\ell) - (n+\ell) = 2\ell(n-\ell-1) \geq 0.$$

Ainsi chaque facteur du produit est au plus 1, donc $B_{n,j} \leq A_{n,j}$. La nouvelle borne est toujours au moins aussi précise que (8).

Pour $j = 1$, il n'y a que le facteur $\ell = 0$, égal à 1 ; les deux constantes sont égales à $2n^2$.

Pour $n = 2$ et $j = 2$, les facteurs $\ell = 0$ et $\ell = 1 = n-1$ valent également 1, donc il y a

encore égalité.

Si $n \geq 3$ et $2 \leq j \leq n$, le produit contient le facteur $\ell = 1$, strictement inférieur à 1 puisque $n - 2 > 0$. Alors $B_{n,j} < A_{n,j}$: l'amélioration est stricte. Pour $n = 1$, seul $j = 1$ est possible et les bornes coïncident.

Enfin, si l'ordre de dérivation dépasse n , $P^{(j)} = 0$ et $M(P^{(j)}) = 0$. Pour un polynôme constant, toutes les dérivées d'ordre strictement positif sont également nulles ; pour l'ordre zéro, le maximum reste $M(P)$. Ces observations complètent l'objectif annoncé pour tous les ordres naturels.

Relevé des adaptations

II.4.a : pour $j = 0$, les n racines de L_k sont placées dans $[-1, 1]$, et non nécessairement dans $] - 1, 1[$. Pour $j \geq 1$, les $n - j$ racines des dérivées sont bien dans l'intervalle ouvert, par Rolle. Cette rectification conserve la conclusion de signe sur $[1, +\infty[$ et toutes les questions suivantes.