



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1994

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On désigne par a et b deux réels strictement positifs et l'on considère

$$I(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Le problème a pour objet d'exprimer cette intégrale à l'aide de la fonction Γ , définie pour $p > 0$ par

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

Partie I

On étudie l'intégrale impropre $\Gamma(p)$, avec $p > 0$.

1. Convergence de $\Gamma(p)$.

(a) Déterminer la limite, lorsque $t \rightarrow +\infty$, de $e^{-t} t^{p+1}$. En déduire la convergence de l'intégrale de $t \mapsto e^{-t} t^{p-1}$ sur $[1, +\infty[$.

(b) Pour tout $x \in]0, 1]$, établir $0 \leq \int_x^1 e^{-t} t^{p-1} dt \leq \frac{1}{p}$. En déduire la convergence de l'intégrale sur $]0, 1]$.

(c) En déduire la convergence de $\Gamma(p)$ pour tout $p > 0$.

2. Expression de $\Gamma(p+1)$ pour p entier naturel.

(a) À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, exprimer $\Gamma(p+1)$ en fonction de $\Gamma(p)$, pour $p > 0$.

(b) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(p+1)$ lorsque $p \in \mathbb{N}$.

Partie II

Pour $p > 0$ et $0 \leq x < 1$, on considère la série

$$g_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1} x^n.$$

1. Convergence de la série définissant g_p .

- (a) Déterminer la limite de $n^{p+1}x^n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, pour x fixé dans $[0, 1[$.
- (b) En déduire la convergence de la série définissant $g_p(x)$ pour $0 \leq x < 1$. Que vaut $g_p(0)$? Peut-on définir $g_p(x)$ pour $x = 1$?

2. Cas particuliers $p = 1$ et $p = 2$.

- (a) Donner les expressions sans signe de sommation de $g_1(x)$ et $g_2(x)$ pour $0 \leq x < 1$.
- (b) Donner leur sens de variation, leur limite et un équivalent lorsque $x \rightarrow 1^-$.

3. Variation de g_p sur $[0, 1[$.

- (a) Comparer $g_p(x)$ et $g_p(y)$ lorsque $0 \leq x \leq y < 1$. En déduire le sens de variation de g_p et l'existence d'une limite L , éventuellement égale à $+\infty$, lorsque $x \rightarrow 1^-$.
- (b) À l'aide des sommes partielles, établir, pour $x \in [0, 1[$ et $N \geq 1$,

$$g_p(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n}.$$

En déduire L .

On détermine maintenant un équivalent de $g_p(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

4. Cas $0 < p \leq 1$.

(a) Pour $x \in]0, 1[$ fixé, étudier le sens de variation sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto t^{p-1}x^t = t^{p-1}e^{t \ln x}$, lorsque $0 < p \leq 1$. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n+1)^{p-1}x^{n+1} \leq \int_n^{n+1} t^{p-1}x^t dt \leq n^{p-1}x^n.$$

(b) Sommer ces inégalités pour $n \geq 1$, puis effectuer le changement de variable $u = -t \ln x$. En déduire, pour $0 < x < 1$,

$$\int_{-\ln x}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u} du \leq |\ln x|^p g_p(x) \leq \int_{-\ln x}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u} du + x |\ln x|^p.$$

(c) En déduire la limite de $|\ln x|^p g_p(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. Montrer que $\ln x \sim x - 1$ lorsque $x \rightarrow 1$, puis établir

$$g_p(x) \sim \frac{\Gamma(p)}{(1-x)^p} \quad (x \rightarrow 1^-, 0 < p \leq 1).$$

5. Cas général.

(a) Pour $0 \leq x < 1$, établir

$$(1-x)g_{p+1}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^p - n^p)x^{n+1}.$$

(b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir, pour tout entier $n \geq 1$ et $0 < p \leq 1$,

$$p(n+1)^{p-1} \leq (n+1)^p - n^p \leq pn^{p-1}.$$

Comment cette inégalité doit-elle être modifiée lorsque $p > 1$?

(c) En déduire, pour $0 \leq x < 1$ et $0 < p \leq 1$,

$$pg_p(x) + (1-p)x \leq (1-x)g_{p+1}(x) \leq pxg_p(x) + x.$$

Comment cette inégalité doit-elle être modifiée lorsque $p > 1$?

(d) Pour tout réel $p > 0$, montrer que $g_p(x) \sim \frac{\Gamma(p)}{(1-x)^p}$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

Partie III

On applique les résultats précédents au calcul de $I(a, b)$.

1. Calcul pour $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

(a) Soit $h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\alpha < \beta$, et $M_1 = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |h'(x)|$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la primitive de h s'annulant en α , établir

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx - (\beta - \alpha)h(\alpha) \right| \leq \frac{M_1(\beta - \alpha)^2}{2}.$$

(b) Établir que $h(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Appliquer le résultat précédent sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$, avec $x_k = k/n$ et $0 \leq k < n$. En notant $M_1 = \max_{[0,1]} |h'|$, montrer, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|I(a, b) - u_n| \leq \frac{M_1}{2n}, \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{b-1}.$$

(c) On admet le résultat suivant : si

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

et

$$\sum_{n \geq 1} b_n$$

sont deux séries convergentes à termes réels positifs ou nuls, de sommes A et B , alors la

série de termes

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

pour $n \geq 2$ converge et a pour somme AB .

En déduire, pour $0 \leq x < 1$,

$$g_a(x)g_b(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n n^{a+b-1} x^n.$$

(d) À l'aide des résultats précédents, établir

$$|g_a(x)g_b(x) - I(a, b)g_{a+b}(x)| \leq \frac{M_1}{2} g_{a+b-1}(x).$$

(e) Multiplier cette inégalité par $(1-x)^{a+b}$ et faire tendre x vers 1^- . En utilisant l'équivalent obtenu en partie II, montrer

$$I(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

2. Calcul dans le cas général $a > 0, b > 0$.

On ne demande pas de vérifier la convergence de $I(a, b)$ dans ce cas.

(a) À l'aide d'un changement de variable simple, établir $I(a, b) = I(b, a)$.

(b) Prouver $I(a+1, b) + I(a, b+1) = I(a, b)$.

(c) Par intégration par parties, exprimer $I(a, b+1)$ en fonction de $I(a+1, b)$. En déduire $I(a+1, b)$ en fonction de $I(a, b)$.

(d) En déduire que la formule de III-1. (e) reste valable pour tous $a > 0$ et $b > 0$.