



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1994

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Convergence de $\Gamma(p)$.

(a) Pour $p > 0$ fixé, la croissance de l'exponentielle par rapport aux puissances donne $t^{p+1}e^{-t} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

On peut écrire $e^{-t}t^{p-1} = t^{-2}(t^{p+1}e^{-t})$. Ainsi $e^{-t}t^{p-1} = o(t^{-2})$ à l'infini. Pour t assez grand, cette fonction positive est donc majorée par $1/t^2$. Comme l'intégrale de $1/t^2$ converge à l'infini et que l'intégrande est continue sur tout segment de $[1, +\infty[$, la comparaison montre la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{p-1} dt$.

(b) Pour $0 < x \leq 1$, la fonction intégrée est positive. Comme $e^{-t} \leq 1$, la croissance de l'intégrale donne

$$0 \leq \int_x^1 e^{-t}t^{p-1} dt \leq \int_x^1 t^{p-1} dt = \frac{1-x^p}{p} \leq \frac{1}{p}.$$

Quand x diminue vers 0, l'intégrale de x à 1 augmente, puisque l'intégrande est positive. Elle est majorée par $1/p$, donc elle possède une limite finie. Par définition de l'intégrale impropre, $\int_0^1 e^{-t}t^{p-1} dt$ converge.

(c) L'intégrale converge séparément en 0 par (b) et à l'infini par (a). Ainsi $\Gamma(p)$ existe et est finie pour tout $p > 0$.

De plus, l'intégrande est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Son intégrale sur le segment $[1, 2]$ est strictement positive, donc $\Gamma(p) > 0$. Cette propriété permettra les divisions par $\Gamma(p)$ à la fin du problème.

2. Expression de $\Gamma(p+1)$.

(a) La relation est établie pour tout réel $p > 0$, ce qui sera utile en partie III. On effectue d'abord l'intégration par parties sur $[\varepsilon, R]$, avec $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_{\varepsilon}^R e^{-t}t^p dt = [-e^{-t}t^p]_{\varepsilon}^R + p \int_{\varepsilon}^R e^{-t}t^{p-1} dt.$$

À l'infini, $R^p e^{-R} \rightarrow 0$ par croissance comparée. En 0, $\varepsilon^p e^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ puisque $p > 0$. Les deux intégrales impropres convergent par I-1., appliquée à $p + 1$ et à p .

En faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$ pour tout $p > 0$.

(b) Une primitive de e^{-t} est $-e^{-t}$, donc $\Gamma(1) = \lim_{R \rightarrow +\infty} (1 - e^{-R}) = 1$.

Pour tout entier $p \geq 1$, la relation précédente, appliquée successivement aux entiers positifs, donne $\Gamma(p + 1) = p(p - 1) \cdots 1 \Gamma(1) = p!$. Pour $p = 0$, l'égalité est directement $\Gamma(1) = 1 = 0!$; on n'utilise pas la relation de récurrence en $p = 0$, car $\Gamma(0)$ n'est pas définie ici.

Ainsi $\Gamma(p + 1) = p!$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Partie II

1. Convergence de la série.

(a) Si $x = 0$, les termes $n^{p+1}x^n$ sont tous nuls, puisque $n \geq 1$.

Si $0 < x < 1$, posons $c = -\ln x > 0$. Alors $n^{p+1}x^n = n^{p+1}e^{-cn}$. La croissance de l'exponentielle par rapport aux puissances donne une limite nulle.

Ainsi $n^{p+1}x^n \rightarrow 0$ pour tout $x \in [0, 1[$ fixé.

(b) Méthode 1 — Comparaison avec une série de Riemann.

Pour $0 \leq x < 1$, les termes sont positifs ou nuls. La question (a) donne

$$n^{p-1}x^n = \frac{1}{n^2}(n^{p+1}x^n) = o(1/n^2).$$

À partir d'un certain rang, ils sont donc majorés par $1/n^2$. Cette série de Riemann converge; la comparaison prouve la convergence de

$$\sum n^{p-1}x^n.$$

Méthode 2 — Comparaison avec une série géométrique.

Si $0 < x < 1$, choisissons q tel que $x < q < 1$, par exemple $q = (x + 1)/2$. On a

$$\frac{n^{p-1}x^n}{q^n} = n^{p-1}(x/q)^n \rightarrow 0,$$

par croissance comparée, puisque $0 < x/q < 1$. Pour les grands indices, $n^{p-1}x^n \leq q^n$. La série géométrique de raison q converge, donc la série étudiée aussi. Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls et la convergence est immédiate.

Ces deux preuves utilisent des majorations de termes positifs : la première se rattache à la limite demandée en (a), la seconde fournit une majoration géométrique.

On a $g_p(0) = 0$. Pour $x = 1$, la série devient

$$\sum n^{p-1} = \sum 1/n^{1-p}.$$

Si $0 < p < 1$, c'est une série de Riemann d'exposant $1 - p < 1$, qui diverge. Si $p \geq 1$, son terme général ne tend pas vers 0, donc elle diverge également. La somme ne définit donc pas une valeur réelle finie $g_p(1)$ pour aucun $p > 0$.

2. Cas $p = 1$ et $p = 2$.

(a) La somme géométrique donne

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x/(1-x).$$

Méthode 1 — Formule usuelle d'une série géométrique dérivée.

La formule du cours

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1/(1-x)^2,$$

valable pour $|x| < 1$, donne, après multiplication par x , $g_2(x) = x/(1-x)^2$. En $x = 0$, les deux expressions donnent bien 0.

Méthode 2 — Décalage d'une série convergente.

Les séries de termes nx^n convergent par II-1. Pour $0 \leq x < 1$, on peut donc soustraire leurs sommes et décaler les indices :

$$(1-x)g_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = g_1(x).$$

Comme $1-x > 0$, cela redonne $g_2(x) = g_1(x)/(1-x) = x/(1-x)^2$. La première méthode utilise une formule du cours ; la seconde la retrouve sans différencier une somme infinie.

(b) Les expressions précédentes sont dérivables sur $[0, 1[$, et

$$g_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0, \quad g_2'(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} > 0.$$

Les deux fonctions sont strictement croissantes. Quand $x \rightarrow 1^-$, elles tendent vers $+\infty$. Comme $x \rightarrow 1$, les quotients avec les fonctions proposées ci-dessous tendent vers 1, donc

$$g_1(x) \sim \frac{1}{1-x}, \quad g_2(x) \sim \frac{1}{(1-x)^2}.$$

3. Variation de g_p .

(a) Pour $0 \leq x \leq y < 1$ et chaque $n \geq 1$, $n^{p-1}x^n \leq n^{p-1}y^n$. La comparaison des sommes partielles, puis leur passage à la limite, donne $g_p(x) \leq g_p(y)$.

Si $x < y$, le premier terme donne même une différence au moins égale à $y - x > 0$. Plus précisément, les différences des sommes partielles sont toutes au moins $y - x$; leurs limites donnent $g_p(y) - g_p(x) \geq y - x$. Ainsi g_p est strictement croissante.

Une fonction croissante sur $[0, 1[$ possède une limite à gauche en 1, finie ou égale à $+\infty$. Comme $g_p \geq 0$, cette limite appartient à $[0, +\infty]$.

(b) Puisque $p > 0$, pour tout $n \geq 1$, $n^p \geq 1$, donc $n^{p-1} \geq 1/n$. La positivité des termes donne, pour tout $N \geq 1$,

$$g_p(x) \geq \sum_{n=1}^N n^{p-1}x^n \geq \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n}.$$

Si la limite L en 1 était finie, le passage à la limite dans cette somme finie donnerait

$$L \geq \sum_{n=1}^N 1/n$$

pour tout N . Or les sommes partielles de la série harmonique ne sont pas majorées. C'est une contradiction.

Ainsi $L = +\infty$. Aucun passage à la limite dans une somme infinie n'a été utilisé : on fixe d'abord N , puis on exploite l'absence de majorant lorsque N varie.

4. Cas $0 < p \leq 1$.

(a) Question adaptée au programme actuel : on traite également $p = 1$, pour assurer le cas limite annoncé dans cette partie.

Pour $x \in]0, 1[$ fixé, posons $h(t) = t^{p-1}e^{t \ln x}$ pour $t > 0$. La fonction est dérivable et

$$h'(t) = t^{p-2}e^{t \ln x}(p - 1 + t \ln x).$$

Les deux premiers facteurs sont strictement positifs. Pour $0 < p \leq 1$, $p - 1 \leq 0$ et $t \ln x < 0$, donc le dernier facteur est strictement négatif. La fonction h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Sur $[n, n+1]$, $h(n+1) \leq h(t) \leq h(n)$. L'intervalle ayant longueur 1, la croissance de l'intégrale donne

$$(n+1)^{p-1}x^{n+1} \leq \int_n^{n+1} t^{p-1}x^t dt \leq n^{p-1}x^n.$$

(b) Pour un entier $N \geq 1$, sommons les inégalités précédentes :

$$\sum_{n=1}^N (n+1)^{p-1}x^{n+1} \leq \int_1^{N+1} t^{p-1}x^t dt \leq \sum_{n=1}^N n^{p-1}x^n.$$

L'intégrale du milieu augmente avec N et est majorée par la somme convergente $g_p(x)$.

L'intégrale impropre $J = \int_1^{+\infty} t^{p-1}x^t dt$ converge donc. En passant à la limite dans les deux séries convergentes, on obtient $g_p(x) - x \leq J \leq g_p(x)$, soit $J \leq g_p(x) \leq J + x$.

Posons $\lambda = -\ln x = |\ln x| > 0$. Sur un segment $[1, R]$, le changement de variable affine $u = \lambda t$ donne

$$\int_1^R t^{p-1}x^t dt = \lambda^{-p} \int_\lambda^{\lambda R} u^{p-1}e^{-u} du.$$

Les intégrales convergent, comme établi ci-dessus et en partie I; on peut faire tendre R vers $+\infty$. En multipliant l'encadrement par λ^p , on obtient

$$\int_\lambda^{+\infty} u^{p-1}e^{-u} du \leq \lambda^p g_p(x) \leq \int_\lambda^{+\infty} u^{p-1}e^{-u} du + x\lambda^p.$$

C'est exactement l'encadrement demandé.

(c) Lorsque $x \rightarrow 1^-$, $\lambda = -\ln x \rightarrow 0^+$. Par définition de l'intégrale convergente $\Gamma(p)$,

$\int_{\lambda}^{+\infty} u^{p-1} e^{-u} du \rightarrow \Gamma(p)$. On peut aussi contrôler explicitement le morceau omis :

$$0 \leq \Gamma(p) - \int_{\lambda}^{+\infty} u^{p-1} e^{-u} du = \int_0^{\lambda} u^{p-1} e^{-u} du \leq \frac{\lambda^p}{p} \rightarrow 0.$$

De plus, $x\lambda^p \rightarrow 0$ puisque $0 < x < 1$ et $p > 0$. L'encadrement de (b) donne donc $|\ln x|^p g_p(x) \rightarrow \Gamma(p) > 0$.

Méthode 1 — Dérivabilité du logarithme pour son équivalent.

La fonction logarithme est dérivable en 1, avec $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = 1$. La définition de la dérivée donne $\ln x / (x - 1) \rightarrow 1$, soit $\ln x \sim x - 1$.

Méthode 2 — Encadrement par une intégrale.

Pour $0 < x < 1$, $-\ln x = \int_x^1 dt/t$. Sur $[x, 1]$, $1 \leq 1/t \leq 1/x$, donc $1 - x \leq -\ln x \leq (1 - x)/x$. En divisant par $1 - x > 0$, on obtient $1 \leq |\ln x|/(1 - x) \leq 1/x$. Par encadrement, le rapport tend vers 1, ce qui donne le même équivalent à gauche en 1.

La première approche vaut des deux côtés de 1 ; la seconde donne des bornes explicites du côté utilisé dans le problème.

Enfin, $((1 - x)/|\ln x|)^p \rightarrow 1$ par continuité de la puissance sur les réels strictement positifs. Ainsi

$$(1 - x)^p g_p(x) = \left(\frac{1 - x}{|\ln x|} \right)^p |\ln x|^p g_p(x) \rightarrow \Gamma(p).$$

La positivité de $\Gamma(p)$ permet de conclure $g_p(x) \sim \Gamma(p)/(1 - x)^p$.

5. Cas général.

(a) Pour $p > 0$ et $0 \leq x < 1$, les séries définissant $g_{p+1}(x)$ et $xg_{p+1}(x)$ convergent par II-1. En séparant le premier terme et en décalant l'indice dans la première série, on a

$$g_{p+1}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^p x^{n+1}, \quad xg_{p+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^{n+1}.$$

La linéarité des séries convergentes permet de soustraire ces deux égalités. On obtient

$$(1-x)g_{p+1}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^p - n^p)x^{n+1}.$$

La série des différences converge aussi absolument, car la valeur absolue de chaque différence est majorée par la somme des deux termes des séries convergentes précédentes. L'identité vaut également pour $x = 0$, où tous les termes sont nuls.

(b) Rectification locale : la condition imprimée $n \leq 1$ est remplacée par $n \geq 1$, condition nécessaire à la sommation de la question suivante.

La fonction $f(t) = t^p$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$, pour tout entier $n \geq 1$. Sa dérivée est $f'(t) = pt^{p-1}$.

Si $0 < p \leq 1$, cette dérivée est décroissante au sens large, donc $p(n+1)^{p-1} \leq f'(t) \leq pn^{p-1}$ sur l'intervalle. L'inégalité des accroissements finis donne, puisque la longueur de l'intervalle est 1,

$$p(n+1)^{p-1} \leq (n+1)^p - n^p \leq pn^{p-1}.$$

Pour $p = 1$, les trois quantités valent 1. Si $p > 1$, la dérivée est croissante et l'encadrement devient

$$pn^{p-1} \leq (n+1)^p - n^p \leq p(n+1)^{p-1}.$$

(c) On multiplie les inégalités de (b) par $x^{n+1} \geq 0$, on les somme pour $1 \leq n \leq N$, puis on fait tendre N vers $+\infty$. Toutes les séries concernées convergent par II-1. et (a).

Les deux sommes qui encadrent la série de différences se calculent par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^{p-1} x^{n+1} = g_p(x) - x, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1} x^{n+1} = x g_p(x).$$

Pour $0 < p \leq 1$, on obtient donc

$$p(g_p(x) - x) \leq (1-x)g_{p+1}(x) - x \leq p x g_p(x).$$

En ajoutant x , cela donne l'encadrement demandé :

$$p g_p(x) + (1-p)x \leq (1-x)g_{p+1}(x) \leq p x g_p(x) + x.$$

Pour $p > 1$, les bornes sont interverties et l'on obtient

$$p x g_p(x) + x \leq (1-x)g_{p+1}(x) \leq p g_p(x) + (1-p)x.$$

Ces égalités ou inégalités restent valables en $x = 0$. Pour $p = 1$, les deux bornes coïncident et l'on retrouve $(1-x)g_2(x) = g_1(x)$.

(d) On montre d'abord que l'équivalent au paramètre p entraîne celui au paramètre $p + 1$. Supposons donc $(1-x)^p g_p(x) \rightarrow \Gamma(p)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

On multiplie l'encadrement de (c) par $(1-x)^p > 0$. Quelle que soit la valeur de $p > 0$, les deux bornes ainsi obtenues sont

$$p(1-x)^p g_p(x) + (1-p)x(1-x)^p$$

et

$$p x (1-x)^p g_p(x) + x(1-x)^p,$$

éventuellement dans l'ordre inverse. Chacune tend vers $p\Gamma(p)$, puisque $x \rightarrow 1$ et $(1-x)^p \rightarrow 0$. Par encadrement,

$$(1-x)^{p+1} g_{p+1}(x) \rightarrow p\Gamma(p) = \Gamma(p+1),$$

la dernière égalité provenant de I-2. (a). La limite est strictement positive, ce qui fournit l'équivalent au paramètre $p + 1$.

Pour un réel $r > 0$ quelconque, il existe un entier $m \geq 0$ et un réel $q \in]0, 1]$ tels que $r = q + m$: si r est entier, on prend $q = 1$ et $m = r - 1$; sinon on prend m égal à sa partie entière et $q = r - m$. Le résultat est connu pour q par II-4. (c). En appliquant m fois l'implication précédente, on obtient le résultat pour r . Il s'agit d'un nombre fini d'étapes.

Ainsi, pour tout $p > 0$,

$$g_p(x) \sim \frac{\Gamma(p)}{(1-x)^p} \quad (x \rightarrow 1^-).$$

Partie III

1. Calcul pour $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

(a) La dérivée h' est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$; la fonction $|h'|$ y atteint donc un maximum fini M_1 .

Méthode 1 — Inégalité de Taylor-Lagrange pour une primitive.

Posons $H(t) = \int_{\alpha}^t h(x) dx$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne $H' = h$.

Comme h est de classe $\mathcal{C}^1$, H est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $H'' = h'$ et $|H''| \leq M_1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, entre α et β , donne

$$|H(\beta) - H(\alpha) - (\beta - \alpha)H'(\alpha)| \leq \frac{M_1(\beta - \alpha)^2}{2}.$$

Or $H(\alpha) = 0$, $H'(\alpha) = h(\alpha)$ et $H(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx$. On en déduit exactement

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx - (\beta - \alpha)h(\alpha) \right| \leq \frac{M_1(\beta - \alpha)^2}{2}.$$

Méthode 2 — Intégration de l'inégalité des accroissements finis.

Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, l'inégalité des accroissements finis donne

$|h(x) - h(\alpha)| \leq M_1(x - \alpha)$. Toutes les fonctions intégrées sont continues sur le segment ; par l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (h(x) - h(\alpha)) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |h(x) - h(\alpha)| dx \leq M_1 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx = \frac{M_1(\beta - \alpha)^2}{2}.$$

Le membre de gauche est celui de l'inégalité demandée. La première méthode suit l'instruction du sujet ; la seconde explique directement l'erreur commise lorsqu'on remplace une fonction par sa valeur au bord gauche d'un intervalle.

(b) On commence par justifier la régularité aux extrémités. Pour $r \geq 1$, la fonction $x \mapsto x^r$ sur $[0, 1]$ a une dérivée continue jusqu'en 0 : si $r = 1$, sa dérivée vaut 1 ; si $r > 1$, sa dérivée en 0 vaut $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{r-1} = 0$ et la dérivée intérieure rx^{r-1} tend aussi vers 0.

Comme $a - 1 \geq 1$ et $b - 1 \geq 1$, les fonctions x^{a-1} et $(1 - x)^{b-1}$ sont ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Leur produit h l'est également. Sur $]0, 1[$,

$$h'(x) = (a - 1)x^{a-2}(1 - x)^{b-1} - (b - 1)x^{a-1}(1 - x)^{b-2}.$$

Cette dérivée se prolonge continûment aux extrémités : $h'(0) = 1$ si $a = 2$, et $h'(0) = 0$ si $a > 2$; $h'(1) = -1$ si $b = 2$, et $h'(1) = 0$ si $b > 2$. On a aussi $h(0) = h(1) = 0$. Le maximum $M_1 = \max_{[0,1]} |h'|$ est donc fini.

Fixons $n \geq 1$. Chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, avec $x_k = k/n$, a pour longueur $1/n$. La question (a), avec le même majorant M_1 pour toutes les dérivées, donne

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(x) dx - \frac{1}{n} h(k/n) \right| \leq \frac{M_1}{2n^2} \quad (0 \leq k < n).$$

La relation de Chasles et l'inégalité triangulaire permettent de sommer ces n erreurs :

$$|I(a, b) - u_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2n^2} = \frac{M_1}{2n},$$

avec

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(k/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{b-1}.$$

Cette estimation prouve notamment $u_n \rightarrow I(a, b)$. Elle vaut aussi pour $n = 1$: dans ce cas $u_1 = h(0) = 0$ et $I(a, b) \leq M_1/2$. Ce cas sera utilisé en (d).

(c) Résultat admis dans cette version adaptée : si

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

et

$$\sum_{n \geq 1} b_n$$

sont deux séries convergentes à termes réels positifs ou nuls, de sommes A et B , alors la série de termes

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

pour $n \geq 2$ converge et a pour somme AB .

Pour $0 \leq x < 1$ fixé, on applique ce résultat aux termes $a_k = k^{a-1}x^k$ et $b_k = k^{b-1}x^k$. Ils sont positifs ou nuls et les deux séries convergent par II-1., leurs sommes étant $g_a(x)$ et

$g_b(x)$. Pour $n \geq 2$,

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} k^{a-1} x^k (n-k)^{b-1} x^{n-k} = x^n \sum_{k=1}^{n-1} k^{a-1} (n-k)^{b-1}.$$

Le terme $k = 0$ dans la définition de u_n est nul, puisque $a - 1 > 0$. En sortant les puissances de n , cette définition donne

$$u_n = \frac{1}{n^{a+b-1}} \sum_{k=1}^{n-1} k^{a-1} (n-k)^{b-1}.$$

Ainsi $c_n = u_n n^{a+b-1} x^n$, et le résultat admis fournit

$$g_a(x)g_b(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n n^{a+b-1} x^n.$$

Le résultat admis sert précisément à identifier cette somme au produit des deux sommes, sans effectuer d'échange non justifié entre des séries infinies.

(d) Comme $u_1 = 0$, on peut écrire la somme de (c) à partir de $n = 1$. De plus, la série $g_{a+b}(x)$ converge. En soustrayant ces deux séries convergentes, on obtient

$$g_a(x)g_b(x) - I(a, b)g_{a+b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - I(a, b)) n^{a+b-1} x^n.$$

L'estimation de (b), valable pour tous les indices $n \geq 1$, donne

$$|u_n - I(a, b)| n^{a+b-1} x^n \leq \frac{M_1}{2} n^{a+b-2} x^n.$$

La série des majorants converge : sa somme est $(M_1/2)g_{a+b-1}(x)$ et $a + b - 1 \geq 3 > 0$. La série de différences converge donc absolument. L'inégalité triangulaire sur les sommes partielles, suivie du passage à la limite, donne

$$|g_a(x)g_b(x) - I(a, b)g_{a+b}(x)| \leq \frac{M_1}{2}g_{a+b-1}(x).$$

Le terme $n = 1$ à gauche vaut $-I(a, b)x$; il est bien inclus dans la majoration grâce au cas $n = 1$ de (b). L'inégalité est aussi vraie pour $x = 0$, avec les deux membres nuls.

(e) Pour $0 \leq x < 1$, on multiplie l'inégalité précédente par $(1 - x)^{a+b} > 0$. Elle devient

$$\begin{aligned} & |((1 - x)^a g_a(x))((1 - x)^b g_b(x)) - I(a, b)(1 - x)^{a+b} g_{a+b}(x)| \\ & \leq \frac{M_1}{2}(1 - x)((1 - x)^{a+b-1} g_{a+b-1}(x)). \end{aligned}$$

Tous les paramètres $a, b, a + b$ et $a + b - 1$ sont strictement positifs. D'après II-5. (d), les facteurs correspondants tendent respectivement vers $\Gamma(a), \Gamma(b), \Gamma(a + b)$ et $\Gamma(a + b - 1)$. Le membre de droite tend donc vers 0.

Par les opérations sur les limites finies et la continuité de la valeur absolue, il vient $|\Gamma(a)\Gamma(b) - I(a, b)\Gamma(a + b)| = 0$. Comme $\Gamma(a + b) > 0$ par I-1. (c), on peut diviser et conclure

$$I(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)} \quad (a \geq 2, b \geq 2).$$

2. Calcul pour tous $a > 0$ et $b > 0$.

La convergence des intégrales I pour des paramètres strictement positifs est donnée dans cette question ; elle n'est pas à démontrer. Les paramètres décalés utilisés ci-dessous sont également strictement positifs.

(a) On utilise le changement de variable affine $t = 1 - x$. Pour $0 < \varepsilon < 1/2$, sur le segment $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, il donne

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{b-1}(1-t)^{a-1} dt.$$

Les intégrales impropres des deux membres convergent par l'hypothèse de cette question. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $I(a, b) = I(b, a)$.

(b) Pour $0 < x < 1$, l'identité $x + (1 - x) = 1$ donne

$$x^a(1-x)^{b-1} + x^{a-1}(1-x)^b = x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

On intègre d'abord cette égalité sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, puis on fait tendre ε vers 0. Chacune des trois intégrales impropres converge, puisque tous ses paramètres sont strictement positifs. La linéarité donne donc

$$I(a+1, b) + I(a, b+1) = I(a, b).$$

(c) Sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, avec $0 < \varepsilon < 1/2$, on intègre par parties le produit $x^{a-1}(1-x)^b$. Une primitive du premier facteur est x^a/a , puisque $a > 0$, et la dérivée du second est $-b(1-x)^{b-1}$. Ainsi

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{a-1}(1-x)^b dx = \left[\frac{x^a(1-x)^b}{a} \right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \frac{b}{a} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^a(1-x)^{b-1} dx.$$

Les termes de bord tendent vers 0 : en 0, $x^a \rightarrow 0$ et $(1-x)^b \rightarrow 1$; en 1, $(1-x)^b \rightarrow 0$ et $x^a \rightarrow 1$. Les deux intégrales impropres convergent pour les paramètres $(a, b+1)$ et $(a+1, b)$. Le passage à la limite donne donc

$$I(a, b+1) = \frac{b}{a} I(a+1, b).$$

En reportant cette relation dans (b), on obtient $I(a, b) = (1 + b/a)I(a+1, b)$. Comme $a > 0$ et $a+b > 0$, les divisions sont licites et

$$I(a+1, b) = \frac{a}{a+b} I(a, b).$$

On en déduit également $I(a, b+1) = bI(a, b)/(a+b)$. Ces deux relations permettent de décaler l'un ou l'autre paramètre d'une unité.

(d) Pour $a, b > 0$, définissons

$$R(a, b) = \frac{I(a, b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Les trois fonctions Γ sont définies et strictement positives, donc cette expression est bien définie. Les relations de (c) et de I-2. (a) donnent

$$R(a+1, b) = \frac{\frac{a}{a+b} I(a, b) (a+b) \Gamma(a+b)}{a \Gamma(a) \Gamma(b)} = R(a, b),$$

et

$$R(a, b+1) = \frac{\frac{b}{a+b} I(a, b) (a+b) \Gamma(a+b)}{\Gamma(a) b \Gamma(b)} = R(a, b).$$

Choisissons deux entiers $m, k \geq 0$ tels que $a+m \geq 2$ et $b+k \geq 2$. En appliquant successivement ces identités un nombre fini de fois, on a $R(a, b) = R(a+m, b+k)$. La formule établie en III-1. (e) donne $R(a+m, b+k) = 1$. Ainsi $R(a, b) = 1$.

On conclut, pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$$I(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Relevé des adaptations

- II-4. (a) : le domaine $0 < p < 1$ de cette sous-question est étendu à $0 < p \leq 1$, conformément au titre de la question 4 et à l'équivalent demandé en (c). La preuve reste valable au cas limite $p = 1$.
- II-5. (b) : la condition imprimée $n \leq 1$ est rectifiée en $n \geq 1$, afin d'obtenir les inégalités pour tous les indices nécessaires à la sommation en (c).