



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1993

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objet du problème, développé dans la partie III, est l'obtention de valeurs approchées du nombre π .

Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel et par a un nombre réel supérieur ou égal à 1. On notera aussi, pour simplifier les écritures : $b = a^2 + 1$.

Partie I — Étude d'intégrales

1. On désigne par p, q des entiers naturels et l'on étudie l'intégrale :

$$I(p, q) = \int_0^1 t^{2p} (1 - t^2)^q dt.$$

1. (a) On suppose que $q \geq 1$. Former une relation de récurrence entre $I(p, q)$ et $I(p + 1, q - 1)$.

1. (b) En déduire l'expression à l'aide de factorielles de l'intégrale $I(p, q)$, et en particulier celle de l'intégrale $I(p, p)$ que l'on notera $J(p)$ dans la suite du problème.

1. (c) En étudiant le maximum sur $[0, 1]$ de $t \mapsto t^2(1 - t^2)$, établir que l'on a $0 \leq J(p) \leq 1/4^p$.

2. On étudie dans cette question l'intégrale : $f(a) = \int_0^{1/a} \frac{dt}{1 + t^2}$.

2. (a) Calculer $f(1)$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(\theta)$.

2. (b) Établir, pour $a \neq 1$, l'égalité suivante :

$$(1) \quad f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1).$$

On pourra utiliser dans l'intégrale donnant $f((a+1)/(a-1))$ le changement de variable défini par $t = (ax-1)/(x+a)$.

2. (c) Établir que $f(a) = a \int_0^1 \frac{dt}{a^2 + t^2}$.

Partie II — Étude d'une suite de polynômes

1. On considère les fonctions polynômes définies par : $P_n(x) = 1 + \lambda_n x^n (1-x)^n$.

Déterminer le nombre réel λ_n pour que $-a^2$ soit racine de P_n .

On supposera λ_n ainsi choisi dans toute la suite du problème. On désignera alors par Q_n la fonction polynôme définie par : $P_n(x) = (x+a^2)Q_n(x)$.

2. (a) Expliciter Q_0 et Q_1 .

2. (b) En considérant $P_{n+1}(x) - P_n(x)$, établir, pour tout nombre réel x , la formule suivante :

$$(2) \quad Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = \left(-\frac{x(1-x)}{a^2} \right)^n Q_1(x).$$

En déduire l'expression de $Q_2(x)$.

Partie III — Détermination de valeurs approchées de π

1. Une première approximation de π . On pose : $u_n(a) = a \int_0^1 Q_n(t^2) dt$.

1. (a) Calculer $u_1(a)$ et $u_2(a)$.

1. (b) Vérifier que $u_2(a) = a \int_0^1 \frac{P_2(t^2)}{a^2 + t^2} dt$.

En déduire la double inégalité suivante :

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3 b^3} \leq f(a) \leq u_2(a) + \frac{J(2)}{a^5 b^2}.$$

1. (c) Donner un encadrement décimal de $f(2)$ et $f(3)$, avec les six premières décimales.
1. (d) À l'aide de la relation (1), en déduire une valeur décimale approchée du nombre π , avec les six premières décimales et une indication sur la précision obtenue.

2. Généralisation

2. (a) Établir l'inégalité suivante :

$$(3) \quad |u_n(a) - f(a)| \leq \frac{1}{(4a^2b)^n a}.$$

2. (b) Établir à l'aide de l'égalité (2) que :

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n a J(n)}{(a^2 b)^{n+1}} \frac{2(2b-1)n + 3b - 1}{4n + 3}.$$

2. (c) On pose : $v_n(a) = u_{n+1}(a) - u_n(a)$.

Exprimer, pour $n \geq 1$, le rapport $v_{n+1}(a)/v_n(a)$ en fonction de n et de a .

2. (d) On donne un entier naturel n et un nombre réel a supérieur à 1. Rédiger en Python :

- une procédure de calcul de $u_k(a)$ pour $0 \leq k \leq n$, en utilisant la suite $(v_k(a))$;
- une procédure de calcul d'une valeur approchée de π , en utilisant la relation (1).

2. (e) On choisit $n = 5$ et $a = 2$. Quelle valeur approchée de π obtient-on ainsi ?
Indiquer à l'aide de l'inégalité (3) la précision de cette approximation.

3. Recherche d'un choix optimal pour a

On suppose dans cette question que $a > 1$ et l'on pose :

$$w_n(a) = 4 \left(u_n(a) + u_n \left(\frac{a+1}{a-1} \right) \right).$$

3. (a) Soit c le plus petit des deux nombres a et $(a+1)/(a-1)$. Montrer que :

$$|w_n(a) - \pi| \leq \frac{8}{c(4c^2(1+c^2))^n}.$$

3. (b) Tracer la courbe représentative de la fonction définie pour $a > 1$ par :

$$a \mapsto \min \left(a, \frac{a+1}{a-1} \right).$$

En déduire pour quelle valeur a_0 de a le nombre c défini ci-dessus est maximal.

3. (c) On choisit $a = 5/2$. Donner un majorant de $|w_n(a) - \pi|$. Qu'obtient-on alors pour $n = 5$?