



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1993

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

On fixe $a \geq 1$, on pose $b = a^2 + 1$ et, pour alléger certains calculs, $D = a^2b > 0$. Tous les polynômes et scalaires sont réels.

Partie I — Étude d'intégrales

1. (a)

Les fonctions intégrées sont polynomiales, donc continues sur $[0, 1]$, et toutes les intégrales $I(p, q)$ existent. Pour $q \geq 1$, on intègre par parties avec $u(t) = t^{2p+1}/(2p+1)$ et $v(t) = (1-t^2)^q$:

$$I(p, q) = \left[\frac{t^{2p+1}}{2p+1} (1-t^2)^q \right]_0^1 + \frac{2q}{2p+1} \int_0^1 t^{2p+2} (1-t^2)^{q-1} dt.$$

Le terme aux bornes est nul : $t^{2p+1} = 0$ en 0, et $(1-t^2)^q = 0$ en 1 puisque $q \geq 1$. On obtient

$$I(p, q) = \frac{2q}{2p+1} I(p+1, q-1).$$

1. (b)

Pour $q = 0$, on a directement $I(p, 0) = 1/(2p+1)$. Pour $q \geq 1$, on applique q fois la relation précédente, jusqu'à un second indice nul :

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \frac{2^q q!}{(2p+1)(2p+3) \cdots (2p+2q-1)} I(p+q, 0) \\ &= \frac{2^q q!}{(2p+1)(2p+3) \cdots (2p+2q+1)}. \end{aligned}$$

Pour transformer le produit de nombres impairs, on sépare dans le produit des entiers de $2p + 1$ à $2p + 2q + 1$ les facteurs pairs $2(p + 1), \dots, 2(p + q)$. Leur produit vaut $2^q(p + q)!/p!$. Ainsi

$$(2p + 1)(2p + 3) \cdots (2p + 2q + 1) = \frac{(2p + 2q + 1)!}{(2p)!} \frac{p!}{2^q(p + q)!}.$$

On en déduit, pour tous $p, q \geq 0$,

$$I(p, q) = \frac{4^q q! (2p)! (p + q)!}{p! (2p + 2q + 1)!}.$$

Le cas $q = 0$ est bien inclus. En particulier,

$$J(p) = I(p, p) = \frac{4^p ((2p)!)^2}{(4p + 1)!}.$$

On retiendra $J(0) = 1$, $J(1) = 2/15$ et $J(2) = 8/315$. Ces valeurs sont obtenues en substituant les indices dans la formule, et non en supposant connue une intégrale particulière hors du référentiel.

1. (c)

Méthode 1 — Étude du maximum par la dérivée

Posons $g(t) = t^2(1 - t^2)$. Sur $[0, 1]$, $g'(t) = 2t(1 - 2t^2)$. La fonction est croissante jusqu'à $1/\sqrt{2}$, puis décroissante. Elle vaut 0 aux bornes et $g(1/\sqrt{2}) = 1/4$. Ainsi $0 \leq g(t) \leq 1/4$ sur le segment.

Pour $p \geq 1$, $0 \leq g(t)^p \leq 1/4^p$, donc la croissance de l'intégrale et la longueur 1 du segment donnent $0 \leq J(p) \leq 1/4^p$. Pour $p = 0$, $J(0) = 1 = 1/4^0$.

Méthode 2 — Mise sous forme d'un carré

L'identité $t^2(1 - t^2) = 1/4 - (t^2 - 1/2)^2$ montre directement que le maximum est $1/4$, atteint en $t = 1/\sqrt{2}$ sur $[0, 1]$. Le produit $t^2(1 - t^2)$ est positif ou nul sur ce segment. Pour $p \geq 1$, on élève donc l'encadrement à la puissance p , puis on l'intègre ; cela redonne $0 \leq J(p) \leq 1/4^p$. Le cas $p = 0$ se traite comme précédemment.

L'étude de variations fournit la position du maximum ; la mise sous forme d'un carré donne une minoration et une majoration immédiates. Les deux établissent la même borne intégrale.

2. (a)

On utilise le changement de variable indiqué. La fonction $\theta \mapsto \tan \theta$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, \pi/4]$, et envoie ce segment sur $[0, 1]$. Sa dérivée vaut $1 + \tan^2 \theta$. Ainsi

$$f(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

2. (b)

Puisque $a \geq 1$ et $a \neq 1$, on a $a > 1$. Posons $d = (a + 1)/(a - 1) > 1$.

Méthode 1 — Changement de variable proposé

Dans $f(d) = \int_0^{(a-1)/(a+1)} dt/(1+t^2)$, prenons $t = (ax - 1)/(x + a)$. Pour $x \in [1/a, 1]$, le dénominateur $x + a$ est strictement positif ; la transformation est de classe C^1 et sa dérivée vaut

$$\frac{dt}{dx} = \frac{a(x+a) - (ax-1)}{(x+a)^2} = \frac{a^2+1}{(x+a)^2} > 0.$$

Elle envoie $x = 1/a$ sur $t = 0$ et $x = 1$ sur $t = (a-1)/(a+1)$. De plus,

$$1+t^2 = \frac{(x+a)^2 + (ax-1)^2}{(x+a)^2} = \frac{(a^2+1)(1+x^2)}{(x+a)^2}.$$

Donc $dt/(1+t^2) = dx/(1+x^2)$ et

$$f(d) = \int_{1/a}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Par Chasles, $f(a) + f(d) = \int_0^1 dx/(1+x^2) = f(1) = \pi/4$.

Méthode 2 — Angles et fonction arctangente

La fonction arctangente est une primitive de $1/(1+t^2)$, donc $f(a) = \arctan(1/a)$ et $f(d) = \arctan(1/d)$. Posons $\alpha = \arctan(1/a)$ et $\beta = \arctan(1/d)$. Comme $a, d > 1$, $\alpha, \beta \in]0, \pi/4[$, donc $\alpha + \beta \in]0, \pi/2[$.

En divisant les formules d'addition du sinus et du cosinus, on obtient $\tan(\alpha + \beta) = (\tan \alpha + \tan \beta)/(1 - \tan \alpha \tan \beta)$; le dénominateur est positif ici. Or

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a+1} = \frac{a^2+1}{a(a+1)},$$

$$1 - \tan \alpha \tan \beta = 1 - \frac{a-1}{a(a+1)} = \frac{a^2+1}{a(a+1)}.$$

Le quotient vaut 1. La tangente est strictement croissante sur $]0, \pi/2[$ et $\tan(\pi/4) = 1$; ainsi $\alpha + \beta = \pi/4$. On retrouve $f(a) + f(d) = f(1)$.

La substitution donne une identité d'intégrales ; la seconde méthode en explique l'origine trigonométrique, après avoir établi l'identité d'addition nécessaire.

2. (c)

Dans la définition de $f(a)$, faisons le changement affine $t = s/a$. Comme $a > 0$, il envoie $s \in [0, 1]$ sur $t \in [0, 1/a]$ et $dt = ds/a$. Il vient

$$f(a) = \int_0^1 \frac{ds/a}{1 + s^2/a^2} = a \int_0^1 \frac{ds}{a^2 + s^2}.$$

La lettre de la variable d'intégration étant indifférente, c'est l'expression demandée.

Partie II — Étude d'une suite de polynômes

1.

On évalue P_n en $-a^2$. Puisque $1 + a^2 = b$,

$$P_n(-a^2) = 1 + \lambda_n(-a^2)^n b^n = 1 + \lambda_n(-a^2 b)^n.$$

Le nombre $-a^2 b$ est non nul, donc la condition $P_n(-a^2) = 0$ impose une valeur unique :

$$\lambda_n = -\frac{1}{(-a^2 b)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(a^2 b)^n}.$$

En particulier, $\lambda_0 = -1$ et $P_0 = 0$. Posons $r(x) = -x(1-x)/D$. Pour tout $n \geq 0$, on peut écrire $P_n(x) = 1 - r(x)^n$, la puissance d'indice 0 désignant le polynôme constant 1.

Puisque $-a^2$ est racine, le théorème de factorisation des polynômes assure que $x + a^2$

divise P_n . Il existe un unique polynôme Q_n tel que $P_n = (x + a^2)Q_n$. Cela vaut également pour le polynôme nul, dont le quotient est nul.

2. (a)

De $P_0 = 0$, on déduit $Q_0 = 0$. Pour $n = 1$,

$$P_1(x) = 1 + \frac{x(1-x)}{D} = \frac{a^2b + x - x^2}{D}.$$

Comme $b = a^2 + 1$, on a $a^2b + x - x^2 = (x + a^2)(b - x)$. Ainsi

$$Q_1(x) = \frac{b - x}{a^2b}.$$

2. (b)

À l'aide de $P_n = 1 - r^n$, on calcule

$$P_{n+1} - P_n = r^n(1 - r) = r^n P_1.$$

La factorisation définissant Q_n donne alors l'identité polynomiale

$$(x + a^2)(Q_{n+1} - Q_n) = (x + a^2)r^n Q_1.$$

Pour tout $x \neq -a^2$, on peut simplifier par $x + a^2$. Les deux membres ainsi obtenus étant des polynômes continus, l'égalité s'étend à $x = -a^2$ par continuité. Donc, pour tout réel x ,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = \left(-\frac{x(1-x)}{a^2b} \right)^n Q_1(x).$$

Au rang $n = 1$, on obtient

$$Q_2(x) = Q_1(x)(1 + r(x)) = \frac{b-x}{D} \left(1 - \frac{x(1-x)}{D} \right).$$

Sous forme développée, $Q_2(x) = (b-x)/D - [bx - (b+1)x^2 + x^3]/D^2$.

Partie III — Détermination de valeurs approchées de π

Les intégrales définissant u_n existent car $Q_n(t^2)$ est une fonction polynomiale de t . En particulier, $u_0(a) = 0$.

1. (a)

En intégrant les polynômes obtenus dans la partie II,

$$u_1(a) = \frac{a}{D} \int_0^1 (b - t^2) dt = \frac{b - 1/3}{ab} = \frac{3b - 1}{3ab}.$$

Pour u_2 , la forme développée de Q_2 donne

$$\begin{aligned} u_2(a) &= u_1(a) - \frac{a}{D^2} \int_0^1 (bt^2 - (b+1)t^4 + t^6) dt \\ &= u_1(a) - \frac{a}{D^2} \left(\frac{b}{3} - \frac{b+1}{5} + \frac{1}{7} \right). \end{aligned}$$

Le terme entre parenthèses vaut $(35b - 21(b+1) + 15)/105 = (14b - 6)/105$. Par conséquent,

$$u_2(a) = \frac{3b-1}{3ab} - \frac{2(7b-3)}{105a^3b^2}.$$

1. (b)

Pour $t \in [0, 1]$, $a^2 + t^2 > 0$, et l'identité $P_2(t^2) = (a^2 + t^2)Q_2(t^2)$ donne

$$u_2(a) = a \int_0^1 \frac{P_2(t^2)}{a^2 + t^2} dt.$$

Comme $P_2(t^2) = 1 - t^4(1 - t^2)^2/D^2$, I.2. (c) entraîne

$$f(a) - u_2(a) = \frac{a}{D^2} \int_0^1 \frac{t^4(1 - t^2)^2}{a^2 + t^2} dt.$$

Sur le segment, $a^2 \leq a^2 + t^2 \leq a^2 + 1 = b$, donc $1/b \leq 1/(a^2 + t^2) \leq 1/a^2$. Le facteur $t^4(1 - t^2)^2$ est positif ou nul ; on peut multiplier puis intégrer ces inégalités. Ainsi

$$\frac{a}{D^2 b} J(2) \leq f(a) - u_2(a) \leq \frac{a}{D^2 a^2} J(2).$$

Avec $D = a^2 b$, cela donne exactement

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3 b^3} \leq f(a) \leq u_2(a) + \frac{J(2)}{a^5 b^2}.$$

1. (c)

On utilise $J(2) = 8/315$ et les expressions rationnelles de u_2 ; les bornes décimales doivent être arrondies vers l'extérieur pour préserver l'encadrement.

Pour $a = 2$, $b = 5$, $u_1(2) = 7/15$ et $u_2(2) = 1217/2625$. Les bornes exactes de b) sont

$$L_2 = \frac{1217}{2625} + \frac{1}{39375}, \quad H_2 = \frac{1217}{2625} + \frac{1}{31500}.$$

Leurs valeurs sont $L_2 = 0.463644444 \dots$ et $H_2 = 0.463650793 \dots$. Un encadrement à six décimales est donc

$$0.463644 \leq f(2) \leq 0.463651.$$

Pour $a = 3, b = 10, u_1(3) = 29/90$ et $u_2(3) = 22804/70875$. Les bornes exactes sont

$$L_3 = \frac{22804}{70875} + \frac{1}{1063125}, \quad H_3 = \frac{22804}{70875} + \frac{2}{1913625}.$$

Elles valent respectivement $0.321750499706 \dots$ et $0.321750604219 \dots$. On peut donc écrire

$$0.321750 \leq f(3) \leq 0.321751.$$

1. (d)

Pour $a = 2, (a + 1)/(a - 1) = 3$. La relation (1) et I.2. (a) donnent $\pi = 4(f(2) + f(3))$. En conservant les bornes rationnelles exactes de c), on obtient

$$L_\pi = 4(L_2 + L_3) \leq \pi \leq H_\pi = 4(H_2 + H_3).$$

Leur développement décimal commence par

$$L_\pi = 3.141579776601 \dots, \quad H_\pi = 3.141605591482 \dots$$

En particulier, un encadrement décimal à six décimales est $3.141579 \leq \pi \leq 3.141606$.

Le milieu des bornes exactes vaut environ $3.141592684042 \dots$ et s'arrondit à six décimales en 3.141593 . L'erreur maximale de ce dernier nombre est

$$\max(3.141593 - L_\pi, H_\pi - 3.141593) < 0.000013234.$$

On peut donc proposer $\pi \simeq 3.141593$ avec une erreur absolue inférieure à 1.3234×10^{-5} . L'affichage comporte six décimales ; la précision garantie par ces bornes reste de l'ordre de 10^{-5} .

2. (a)

La relation $P_n(t^2) = (a^2 + t^2)Q_n(t^2)$ et la forme de P_n donnent, pour tout $n \geq 0$,

$$f(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n a}{D^n} \int_0^1 \frac{t^{2n}(1-t^2)^n}{a^2 + t^2} dt.$$

Pour $n = 0$, le facteur au numérateur est le polynôme constant 1 et $u_0 = 0$; cette expression reste vraie. Le dénominateur est au moins $a^2 > 0$, donc

$$|f(a) - u_n(a)| \leq \frac{a}{D^n a^2} \int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^n dt = \frac{J(n)}{aD^n}.$$

Par I.1. (c), $J(n) \leq 1/4^n$. Par conséquent,

$$|u_n(a) - f(a)| \leq \frac{1}{a(4D)^n} = \frac{1}{(4a^2b)^n a}.$$

Comme $4D \geq 8$, le majorant tend vers 0 pour a fixé : $u_n(a) \rightarrow f(a)$. L'expression exacte du reste montre également que $u_n(a) \leq f(a)$ si n est pair et $u_n(a) \geq f(a)$ si n est impair.

2. (b)

En intégrant l'égalité (2), et en substituant $Q_1(t^2) = (b - t^2)/D$, on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1}(a) - u_n(a) &= \frac{(-1)^n a}{D^{n+1}} \int_0^1 t^{2n} (1-t^2)^n (b-t^2) dt \\ &= \frac{(-1)^n a}{D^{n+1}} (bJ(n) - I(n+1, n)). \end{aligned}$$

Il reste à exprimer la dernière intégrale en fonction de $J(n)$. L'identité $1 = (1-t^2) + t^2$ donne

$$J(n) = I(n, n+1) + I(n+1, n).$$

La récurrence de I.1. (a), appliquée à $p = n$ et $q = n+1 \geq 1$, donne

$I(n, n+1) = 2(n+1)I(n+1, n)/(2n+1)$. Ainsi

$$J(n) = \frac{4n+3}{2n+1} I(n+1, n), \quad I(n+1, n) = \frac{2n+1}{4n+3} J(n).$$

Comme $4n+3 > 0$, cette division est permise. En reportant,

$$bJ(n) - I(n+1, n) = J(n) \frac{b(4n+3) - (2n+1)}{4n+3} = J(n) \frac{2(2b-1)n + 3b-1}{4n+3}.$$

On conclut

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n a J(n)}{(a^2 b)^{n+1}} \frac{2(2b-1)n + 3b-1}{4n+3}.$$

La preuve inclut $n = 0$, où l'on retrouve $u_1 - u_0 = (3b-1)/(3ab)$.

2. (c)

Posons $L_n = 2(2b - 1)n + 3b - 1$. Comme $b \geq 2$, $L_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. Par I.1. (b), $J(n) > 0$; la formule de b) assure donc $v_n(a) \neq 0$ et le quotient demandé est défini.

À partir de la formule factorielle de J , on calcule

$$\frac{J(n+1)}{J(n)} = \frac{4(2n+2)^2(2n+1)^2}{(4n+5)(4n+4)(4n+3)(4n+2)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(4n+3)(4n+5)}.$$

Dans le quotient des expressions de v_{n+1} et v_n , on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)} &= -\frac{1}{D} \frac{J(n+1)}{J(n)} \frac{L_{n+1}}{L_n} \frac{4n+3}{4n+7} \\ &= -\frac{2(n+1)(2n+1)(2(2b-1)n+7b-3)}{a^2b(4n+5)(4n+7)(2(2b-1)n+3b-1)}. \end{aligned}$$

C'est la formule recherchée pour $n \geq 1$. Le calcul montre qu'elle vaut également pour $n = 0$, ce qui permet d'initialiser la procédure suivante sans cas particulier supplémentaire.

2. (d)

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

La première procédure utilise $u_0 = 0$ et $v_0 = u_1 = (3b - 1)/(3ab)$, puis les relations $u_{k+1} = u_k + v_k$ et $v_{k+1} = v_k v_{k+1}/v_k$, avec le quotient explicite de c). Elle renvoie un tableau de longueur $n + 1$ contenant tous les termes demandés.

La seconde utilise $d = (a + 1)/(a - 1)$ et $\pi = 4(f(a) + f(d))$ pour renvoyer $4(u_n(a) + u_n(d))$. Les entrées sont un entier $n \geq 0$ et un réel $a > 1$.

Python

```
import numpy as np

def valeurs_u(n, a):
```

```

b = a * a + 1
u = np.zeros(n + 1)
v = (3 * b - 1) / (3 * a * b)
for k in range(n):
    u[k + 1] = u[k] + v
    l_k = 2 * (2 * b - 1) * k + 3 * b - 1
    l_suiv = 2 * (2 * b - 1) * (k + 1) + 3 * b - 1
    rapport = -2 * (k + 1) * (2 * k + 1) * l_suiv
    rapport = rapport / (a * a * b * (4 * k + 5) * (4 * k + 7) * l_k)
    v = v * rapport
return u

def approximation_pi(n, a):
    d = (a + 1) / (a - 1)
    u_a = valeurs_u(n, a)
    u_d = valeurs_u(n, d)
    return 4 * (u_a[n] + u_d[n])

print(valeurs_u(5, 2.0))
print(approximation_pi(5, 2.0))

```

La boucle $\text{range}(n)$ parcourt $k = 0, \dots, n - 1$, donc calcule exactement les indices 1 à n . Pour $n = 0$, elle ne s'exécute pas et le tableau contient le seul terme $u_0 = 0$. Tous les dénominateurs sont strictement positifs pour $a > 1$; $a - 1$ est aussi non nul dans la seconde procédure. Le dernier calcul de v après u_n prépare un terme supplémentaire qui n'est pas utilisé, sans modifier le tableau retourné.

Le code a été exécuté pour plusieurs indices, dont $n = 0$ et $n = 5$, et pour les paramètres $a = 2$ et $a = 5/2$. Il utilise l'arithmétique flottante : ses sorties sont des approximations numériques des valeurs rationnelles calculées exactement dans les applications ci-dessous.

2. (e)

Pour $a = 2$, le second paramètre de (1) est $d = 3$. Les calculs rationnels par les

réurrences de b)-c) donnent

$$u_5(2) \simeq 0.463647609037677149, \quad u_5(3) \simeq 0.321750554396656343.$$

La valeur approchée obtenue est donc

$$w_5(2) = 4(u_5(2) + u_5(3)) \simeq 3.141592653737334.$$

Pour justifier sa précision, on combine (3) aux deux paramètres par l'inégalité triangulaire. Avec $b(2) = 5$, $b(3) = 10$, $4 \cdot 2^2 \cdot 5 = 80$ et $4 \cdot 3^2 \cdot 10 = 360$,

$$|w_5(2) - \pi| \leq 4 \left(\frac{1}{2 \cdot 80^5} + \frac{1}{3 \cdot 360^5} \right) < 6.106 \times 10^{-10}.$$

La précision est ainsi démontrée à partir de (3). De plus, l'indice 5 est impair; a) montre que les deux valeurs u_5 sont supérieures aux valeurs correspondantes de f . On a donc aussi $\pi \leq w_5(2)$, et l'on peut donner l'encadrement exact

$$w_5(2) - 4 \left(\frac{1}{2 \cdot 80^5} + \frac{1}{3 \cdot 360^5} \right) \leq \pi \leq w_5(2).$$

3. (a)

Posons $d = (a + 1)/(a - 1) > 1$ et $c = \min(a, d) > 1$. L'identité (1) donne

$$w_n(a) - \pi = 4(u_n(a) - f(a) + u_n(d) - f(d)).$$

Par l'inégalité triangulaire et (3),

$$|w_n(a) - \pi| \leq 4 \left(\frac{1}{a[4a^2(1 + a^2)]^n} + \frac{1}{d[4d^2(1 + d^2)]^n} \right).$$

Comme $a, d \geq c > 0$, on a $a, d \geq c$ et $4a^2(1+a^2), 4d^2(1+d^2) \geq 4c^2(1+c^2)$. Toutes ces quantités sont positives ; en prenant les puissances d'indice $n \geq 0$ puis les inverses, chacun des deux termes est majoré par $1/[c(4c^2(1+c^2))^n]$. Ainsi

$$|w_n(a) - \pi| \leq \frac{8}{c[4c^2(1+c^2)]^n}.$$

3. (b)

Étudions $c(a) = \min(a, d(a))$ avec $d(a) = (a+1)/(a-1)$. Pour $a > 1$, la comparaison des deux valeurs peut se faire en multipliant par le dénominateur positif $a-1$:

$$a \leq d(a) \iff a(a-1) \leq a+1 \iff (a-1)^2 \leq 2.$$

Puisque $a-1 > 0$, cette condition équivaut à $1 < a \leq 1 + \sqrt{2}$. En posant $a_0 = 1 + \sqrt{2}$, on obtient donc

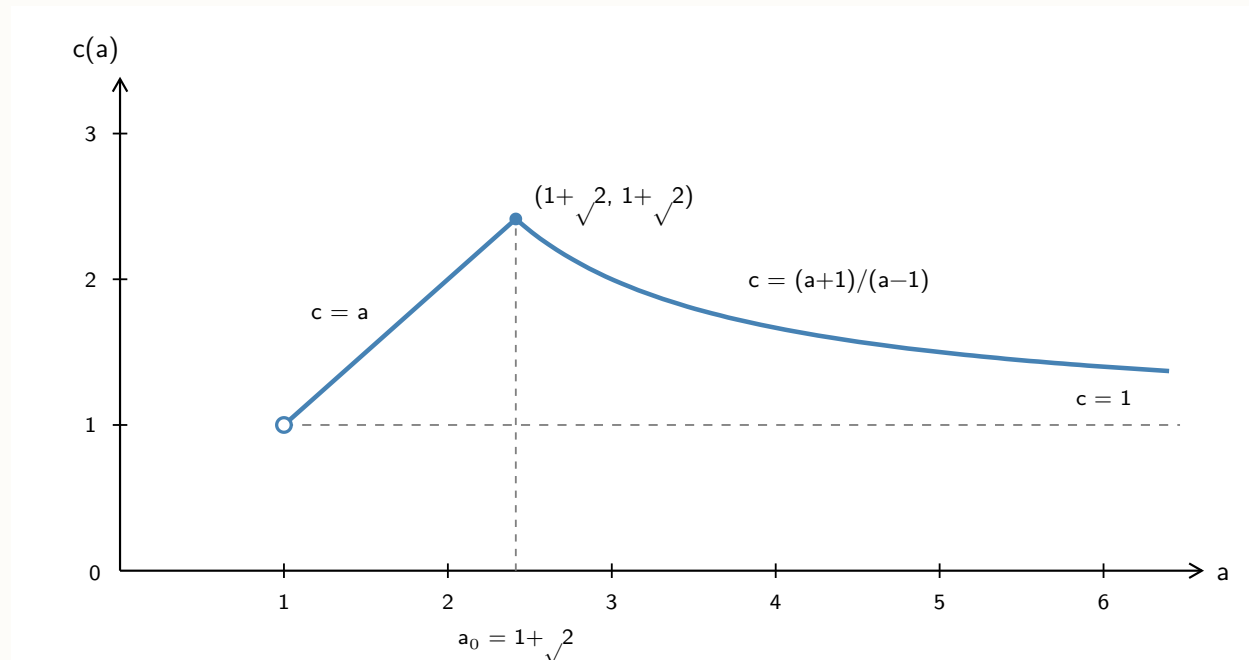
$$c(a) = \begin{cases} a & \text{si } 1 < a \leq a_0, \\ \frac{a+1}{a-1} & \text{si } a \geq a_0. \end{cases}$$

Les deux expressions sont égales à a_0 au point de raccordement. La première branche est strictement croissante ; la seconde est strictement décroissante, car

$d'(a) = -2/(a-1)^2 < 0$. De plus, $c(a) \rightarrow 1$ lorsque $a \rightarrow 1^+$ et lorsque $a \rightarrow +\infty$.

La courbe est donc une portion de la droite $c = a$, suivie d'une branche de la courbe $c = 1 + 2/(a-1)$ qui tend vers l'asymptote horizontale $c = 1$. Le point $a = 1$ est exclu du domaine. Le maximum global est atteint uniquement pour $a = a_0 = 1 + \sqrt{2}$, et vaut $c(a_0) = 1 + \sqrt{2}$.

La représentation suivante montre ces deux branches sur une portion du domaine ; les coordonnées sont calculées à partir des expressions précédentes. Le cercle ouvert marque l'exclusion de $a = 1$.



3. (c)

Pour $a = 5/2$, le second paramètre est $d = (a + 1)/(a - 1) = 7/3$. Donc $c = \min(5/2, 7/3) = 7/3$ et

$$4c^2(1 + c^2) = 4 \cdot \frac{49}{9} \cdot \frac{58}{9} = \frac{11368}{81}.$$

La borne de a) devient

$$|w_n(5/2) - \pi| \leq \frac{24}{7} \left(\frac{81}{11368} \right)^n.$$

Pour $n = 5$, elle donne

$$|w_5(5/2) - \pi| \leq \frac{24}{7} \left(\frac{81}{11368} \right)^5 < 6.297 \times 10^{-11}.$$

La procédure de III.2. (d), exécutée avec ces paramètres, donne

$$w_5(5/2) = 4(u_5(5/2) + u_5(7/3)) \simeq 3.141592653599674.$$

Le calcul exact des deux termes par les récurrences rationnelles confirme cette valeur. Comme 5 est impair, les deux approximations sont des majorants, et l'on dispose aussi de l'encadrement

$$w_5(5/2) - \frac{24}{7} \left(\frac{81}{11368} \right)^5 \leq \pi \leq w_5(5/2).$$

Le choix $a = 5/2$ est proche du choix optimal $a_0 = 1 + \sqrt{2}$ et améliore la borne obtenue pour $a = 2$. L'optimalité établie en b) porte sur la maximisation de c , donc sur la minimisation de la borne de a), sans prétendre minimiser l'erreur exacte pour chaque indice.

Relevé des adaptations

- III.2. (d) : Code adapté en Python ; les deux procédures demandées sont remplacées par une fonction renvoyant les termes $u_0, \dots, u_n$, calculés à partir de (v_k) , et une fonction donnant l'approximation de π à l'aide de la relation (1). Les cas $n = 0$ et les bornes des boucles sont conservés.