



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1992

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par E_n l'ensemble des applications f de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f et sa dérivée n -ième $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Pour tout élément f de E_n , on note :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|.$$

Pour les dérivées intermédiaires, lorsqu'elles sont bornées, on notera de même

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|. \text{ On adopte la convention } f^{(0)} = f.$$

L'objet du problème est d'établir que E_n est inclus dans E_k pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, puis d'obtenir une majoration de M_k en fonction de M_0 et de M_n .

PARTIE I

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et soit f un élément de E_2 .

1. Une première majoration de M_1 .

(a) Justifier l'inégalité suivante pour tout réel x et tout réel h :

$$(1) \quad |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}.$$

(b) En déduire que, pour tout réel x et tout réel h strictement positif, on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2},$$

puis en déduire que E_2 est inclus dans E_1 .

(c) Établir que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$. On pourra étudier les variations de la fonction u définie pour $t > 0$ par $u(t) = 2M_0/t + M_2 t/2$.

2. Une seconde majoration de M_1 .

(a) Soit t un nombre réel strictement positif. En appliquant l'inégalité (1) avec $h = t$, puis $h = -t$, établir que, pour tout nombre réel x :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}.$$

(b) En procédant comme précédemment, en déduire une nouvelle majoration de M_1 en fonction de M_0 et de M_2 .

PARTIE II

On suppose dans cette partie que l'entier n est supérieur ou égal à 2. On désigne par f un élément de E_n et par $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ des nombres réels non nuls et deux à deux distincts. On pose, pour tout nombre réel x :

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h_i^j}{j!} f^{(j)}(x), \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

1. On considère le système suivant, d'inconnues $x_1, \dots, x_{n-1}$:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{h_i^j}{j!} x_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Montrer que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. On pourra considérer la fonction-polynôme :

$$P(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_j}{j!} t^{j-1}.$$

2. En déduire que chacune des fonctions $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots, f^{(n-1)}$ est une combinaison linéaire des fonctions $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$.

3. Les inclusions de E_n dans E_k pour $1 \leq k \leq n$.

(a) Soient un nombre réel x et un entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$. En majorant $|f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, établir que :

$$|F_k(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$$

(b) En déduire l'inclusion de E_n dans E_k pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

PARTIE III

1. Majoration de M_1 et de M_2 en fonction de M_0 et de M_3 .

On suppose dans cette question que $n = 3$ et soit f un élément de E_3 . En appliquant les résultats de la question I.2 aux fonctions f' et f , majorer M_2 en fonction de M_1 et de M_3 , puis M_1 en fonction de M_0 et de M_2 , et enfin M_1 et M_2 en fonction de M_0 et de M_3 .

2. Une seconde majoration de M_1 et de M_2 en fonction de M_0 et de M_3 .

On suppose dans cette question que $n = 3$ et soit f un élément de E_3 .

(a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f(x+h)$ et à $f(x-h)$, montrer que, pour tout réel x et tout réel strictement positif h , on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_3 h^2}{6}, \quad |f''(x)| \leq \frac{M_3 h}{3} + \frac{4M_0}{h^2}.$$

(b) En déduire de nouvelles majorations de M_1 et de M_2 en fonction de M_0 et de M_3 .

3. Majoration de M_{n-1} en fonction de M_0 et de M_n .

On suppose dans cette question que $n \geq 2$ et soit f un élément de E_n .

(a) En appliquant les résultats de la question I.2 à la fonction $f^{(n-2)}$, majorer M_{n-1} en fonction de M_{n-2} et de M_n .

(b) En déduire par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ l'existence d'une suite de nombres réels strictement positifs $(a_n)_{n \geq 2}$, indépendants de f , tels que :

$$M_{n-1} \leq a_n M_0^{1/n} M_n^{1-1/n}, \quad a_2 = \sqrt{2}, \quad a_n^n = 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1} \quad (n \geq 3).$$

(c) En déduire que :

$$M_{n-1} \leq 2^{(n-1)/2} M_0^{1/n} M_n^{(n-1)/n}.$$

4. Majoration de M_k en fonction de M_0 et de M_n , pour $0 \leq k \leq n$.

On suppose dans cette question que $n \geq 2$ et soit f un élément de E_n . Déduire par récurrence de la majoration obtenue précédemment que, pour tout entier k compris entre 0 et n , on a :

$$M_k \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n}.$$

Les cas $k = 0$ et $k = n$ seront traités séparément, sans donner de sens à une éventuelle puissance 0^0 .

PARTIE IV

On se propose enfin d'établir que les majorations obtenues en I.2 et III.2 sont optimales. À cet effet, on considère, pour tout entier $p \geq 1$, la fonction w_p définie sur $[0, 1]$ par :

$$w_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{2p}, \\ \sin(p\pi(1-x)) & \text{si } 1 - \frac{1}{2p} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

et prolongée à $\mathbb{R}$ par :

$$w_p(-x) = w_p(x), \quad w_p(2+x) = -w_p(x).$$

1. Étudier la continuité et la périodicité de w_p . Représenter graphiquement w_1 sur $\mathbb{R}$.
2. Soit v_p la primitive de w_p s'annulant en 0. Donner l'expression de $v_p(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$. Exprimer $v_p(-x)$ et $v_p(2+x)$ en fonction de $v_p(x)$. Représenter graphiquement v_1 sur $\mathbb{R}$.
3. Soit u_p la primitive de v_p s'annulant en 1. Donner l'expression de $u_p(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$. Exprimer $u_p(-x)$ et $u_p(2+x)$ en fonction de $u_p(x)$. On pourra étudier $u_p(-x) - u_p(x)$ et $u_p(2+x) + u_p(x)$. Représenter graphiquement u_1 sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les réels suivants :

$$M_0(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_p(x)|, \quad M_1(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u'_p(x)|, \quad M_2(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u''_p(x)|.$$

Quelles sont les limites de $M_0(p)$, de $M_1(p)$ et de $M_2(p)$ lorsque p tend vers l'infini ? En déduire que la majoration de M_1 en fonction de M_0 et de M_2 obtenue à la question I.2 est optimale.

5. On désigne par U_p la primitive de u_p s'annulant en 0. Montrer à l'aide de cette fonction U_p que les majorations de M_1 et de M_2 obtenues précédemment en III.2 sont optimales.