



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1992

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I

On fixe $f \in E_2$. Les nombres M_0 et M_2 sont finis et positifs ou nuls. L'existence d'un nombre fini M_1 sera établie en 1. (b).

1. Une première majoration de M_1 .

(a) Reste de Taylor d'ordre un.

Question adaptée au programme actuel. La formule imprimée comme une égalité est rectifiée en une majoration du module du reste.

Méthode 1 — Inégalité de Taylor-Lagrange.

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x, h \in \mathbb{R}$, sa dérivée seconde est majorée en valeur absolue par M_2 sur le segment d'extrémités x et $x + h$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne donc :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2|h|^2}{2} = \frac{M_2h^2}{2}.$$

Elle vaut aussi pour $h < 0$, et pour $h = 0$ les deux membres sont nuls.

Méthode 2 — Reste intégral et changement de variable affine.

La formule de Taylor avec reste intégral, applicable puisque $f \in C^2$, donne :

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) = h^2 \int_0^1 (1-t)f''(x+th) dt.$$

Cette expression est valable quel que soit le signe de h . L'inégalité triangulaire pour

l'intégrale et $|f''| \leq M_2$ donnent un module inférieur ou égal à

$M_2 h^2 \int_0^1 (1-t) dt = M_2 h^2 / 2$. La première méthode applique directement le théorème de majoration ; la seconde explicite le reste et son contrôle.

(b) Borne uniforme de la dérivée première.

Question adaptée au programme actuel. Le module et le signe d'inégalité sont rétablis.

Notons $r = f(x+h) - f(x) - hf'(x)$, avec $h > 0$. Alors $hf'(x) = f(x+h) - f(x) - r$, d'où :

$$h|f'(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + |r| \leq 2M_0 + \frac{M_2 h^2}{2}.$$

On divise par $h > 0$ et l'on obtient :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

En prenant, par exemple, $h = 1$, on obtient une borne indépendante de x . La fonction f' est donc bornée sur $\mathbb{R}$. Comme f est de classe C^1 et déjà bornée, elle appartient à E_1 .

Ainsi, $E_2 \subset E_1$, et $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ est bien fini.

(c) Optimisation de la première borne.

Question adaptée au programme actuel. Le résultat est une inégalité, et non une égalité pour toute fonction.

La question précédente donne, pour tout $t > 0$:

$$M_1 \leq u(t) = \frac{2M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}.$$

Traisons d'abord les cas limites. Si $M_0 = 0$, alors $f = 0$ et $M_1 = 0$. Si $M_2 = 0$, l'inégalité donne $M_1 \leq 2M_0/t$ pour tout $t > 0$; en faisant tendre t vers l'infini, on obtient $M_1 = 0$. Dans ces deux cas, la borne demandée vaut bien 0.

Méthode 1 — Variations de u lorsque $M_0, M_2 > 0$.

On a $u'(t) = -2M_0/t^2 + M_2/2$. Cette dérivée s'annule uniquement pour $t_* = 2\sqrt{M_0/M_2}$, elle est négative avant ce point et positive après. La fonction atteint donc son minimum en t_* , et :

$$u(t_*) = \sqrt{M_0 M_2} + \sqrt{M_0 M_2} = 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

En choisissant cette valeur de t dans la borne, on conclut $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Méthode 2 — Égaliser les deux termes par une identité de carré.

Pour $A, B > 0$ et $t > 0$, on a :

$$\frac{A}{t} + Bt - 2\sqrt{AB} = \left(\sqrt{\frac{A}{t}} - \sqrt{Bt} \right)^2 \geq 0.$$

L'égalité est atteinte lorsque $t = \sqrt{A/B}$. Ici, $A = 2M_0$ et $B = M_2/2$, donc le minimum de u vaut $2\sqrt{M_0 M_2}$ et est atteint au même t_* . En y évaluant la majoration de M_1 , on retrouve la conclusion. Cette identité est utile pour optimiser une somme de termes de formes A/t et Bt sans dérivation.

2. Une seconde majoration de M_1 .

(a) Utiliser deux accroissements opposés.

Question adaptée au programme actuel. Le résultat imprimé est rectifié en une majoration de $|f'(x)|$.

Pour $t > 0$, posons $r_+ = f(x+t) - f(x) - tf'(x)$ et $r_- = f(x-t) - f(x) + tf'(x)$. Par 1.

(a), $|r_+|, |r_-| \leq M_2 t^2 / 2$. La soustraction donne :

$$2tf'(x) = f(x+t) - f(x-t) - (r_+ - r_-).$$

Ainsi :

$$2t|f'(x)| \leq 2M_0 + M_2 t^2.$$

En divisant par $2t > 0$:

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}.$$

L'emploi de valeurs symétriques a supprimé la contribution de $f(x)$ et divisé par deux le premier terme de la majoration précédente.

(b) Optimisation de la seconde borne.

On prend le supremum par rapport à x dans a). Si $M_0, M_2 > 0$, la fonction

$v(t) = M_0/t + M_2 t/2$ a pour dérivée $-M_0/t^2 + M_2/2$; elle décroît puis croît autour de $t_* = \sqrt{2M_0/M_2}$. Le minimum est :

$$v(t_*) = \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} = \sqrt{2M_0 M_2}.$$

Si $M_0 = 0$, la fonction est nulle; si $M_2 = 0$, on fait tendre t vers l'infini dans la borne.

Dans tous les cas :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}, \quad M_1^2 \leq 2M_0 M_2.$$

La constante $\sqrt{2}$ améliore la constante 2 de 1. (c).

PARTIE II

1. Unicité de la solution du système homogène.

Question adaptée au programme actuel. Le polynôme suggéré dans le PDF est complété par son terme constant x_1 .

Pour une solution $(x_1, \dots, x_{n-1})$, considérons

$$P(t) = \sum_{j=1}^{n-1} (x_j/j!) t^{j-1}.$$

Le système s'écrit $h_i P(h_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Chaque h_i étant non nul, on a $P(h_i) = 0$.

Le polynôme P a un degré au plus $n-2$ et possède les $n-1$ racines distinctes h_i . Le nombre de racines impose donc $P = 0$. Tous ses coefficients sont nuls, d'où $x_j/j! = 0$, puis $x_j = 0$ pour chaque j .

Cela vaut aussi pour $n = 2$: P est le polynôme constant x_1 , et sa valeur nulle en h_1 impose $x_1 = 0$.

2. Expression des dérivées en fonction des F_i .

Question adaptée au programme actuel. La famille se termine à F_{n-1} ; F_n n'a pas été défini.

Méthode 1 — Inversibilité de la matrice du système.

Posons $A = (h_i^j/j!)_{1 \leq i, j \leq n-1}$. La question 1 montre que $\text{Ker } A = \{0\}$. La matrice est carrée ; le théorème du rang implique qu'elle est inversible. Pour chaque réel x :

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f'(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

En multipliant par $A^{-1} = (b_{j,i})$, on obtient :

$$f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_{j,i} F_i(x), \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Les coefficients sont indépendants de x , car les h_i sont fixés. Chaque dérivée est donc une combinaison linéaire des fonctions F_i .

Méthode 2 — Construction polynomiale explicite des coefficients.

Pour chaque indice i , définissons

$$L_i(t) = \prod_{r \neq i} (t - h_r) / (h_i - h_r),$$

où les indices du produit vont de 1 à $n-1$. Les dénominateurs sont non nuls par distinction des h_i . Pour $n=2$, le produit vide vaut 1. Ces polynômes vérifient $L_i(h_r) = 1$ si $r=i$ et 0 sinon.

Pour un réel x fixé, posons

$$H_x(t) = \sum_{j=1}^{n-1} (f^{(j)}(x)/j!) t^{j-1}.$$

Alors $H_x(h_i) = F_i(x)/h_i$. Le polynôme :

$$H_x(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(x)}{h_i} L_i(t)$$

est de degré au plus $n - 2$ et s'annule en chacun des $n - 1$ points h_r . Il est donc nul. En écrivant

$$L_i(t) = \sum_{r=0}^{n-2} \lambda_{i,r} t^r$$

et en identifiant le coefficient de t^{j-1} , on obtient :

$$f^{(j)}(x) = j! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_{i,j-1}}{h_i} F_i(x).$$

Cette construction établit directement la combinaison linéaire, sans supposer connu un théorème d'interpolation. La première méthode donne l'existence par une inversion de matrice ; la seconde en décrit les coefficients à l'aide de polynômes construits explicitement.

3. Les inclusions de E_n dans E_k .

(a) Borne sur les fonctions F_k .

Question adaptée au programme actuel. On restreint ici k à $1, \dots, n - 1$, puisque seuls ces h_k sont définis ; le reste porte sur $|h_k|^n$ et les modules sont rétablis.

La fonction f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, avec $|f^{(n)}| \leq M_n$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n - 1$, sur le segment d'extrémités x et $x + h_k$, donne :

$$|f(x + h_k) - f(x) - F_k(x)| \leq \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$|F_k(x)| \leq |f(x + h_k)| + |f(x)| + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n \leq 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$$

La borne ne dépend pas de x . Chaque fonction F_k est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) Conclusion sur toutes les dérivées.

Par 2, chaque dérivée $f^{(j)}$ pour $1 \leq j < n$ est une combinaison linéaire finie des fonctions bornées F_i . Plus précisément :

$$|f^{(j)}(x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |b_{j,i}| \left(2M_0 + \frac{|h_i|^n}{n!} M_n \right).$$

Elle est donc bornée. Puisque $f \in C^n(\mathbb{R})$, elle est aussi de classe C^j , et f est bornée par hypothèse. Donc $f \in E_j$ pour chaque $1 \leq j < n$. Pour $j = n$, l'inclusion de E_n dans lui-même est immédiate par définition. Conclusion :

$$E_n \subset E_k \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

Tous les nombres M_k sont désormais finis. Une précision utile pour la suite : si $M_0 = 0$, alors $f = 0$. Si $M_n = 0$, Taylor-Lagrange à l'origine donne un reste nul, donc

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) x^j / j!.$$

Ce polynôme est borné sur $\mathbb{R}$; un polynôme réel non constant n'est pas borné, car son terme dominant impose une valeur absolue tendant vers l'infini. Ainsi, f est constante et $M_k = 0$ pour $k \geq 1$. Ces cas seront pris en compte sans division par un nombre nul.

PARTIE III

1. Premières bornes d'ordre trois.

La partie II donne que f, f', f'' et f''' sont bornées. La fonction f' est de classe C^2 , bornée avec dérivée seconde f''' bornée : elle appartient à E_2 . L'application de I.2 à f' donne $M_2^2 \leq 2M_1M_3$. L'application à f donne $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

Si $M_1 > 0$, on combine ces bornes :

$$M_1^4 \leq 4M_0^2M_2^2 \leq 8M_0^2M_1M_3.$$

On divise par $M_1 > 0$ et on prend la racine cubique, fonction croissante sur les réels positifs : $M_1 \leq 2M_0^{2/3}M_3^{1/3}$. Si $M_1 = 0$, cette borne est également vraie.

Si $M_2 > 0$, de même :

$$M_2^4 \leq 4M_1^2M_3^2 \leq 8M_0M_2M_3^2,$$

donc $M_2 \leq 2M_0^{1/3}M_3^{2/3}$ après division par M_2 puis racine cubique. Le cas $M_2 = 0$ satisfait directement la borne. On obtient finalement :

$$M_1 \leq 2M_0^{2/3}M_3^{1/3}, \quad M_2 \leq 2M_0^{1/3}M_3^{2/3}.$$

2. Secondes bornes d'ordre trois.

(a) Taylor en deux points symétriques.

Question adaptée au programme actuel. Les deux égalités imprimées sont rectifiées en des majorations des modules des dérivées.

Pour $h > 0$, Taylor-Lagrange à l'ordre deux fournit :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + r_+, \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + r_-,$$

avec $|r_+|, |r_-| \leq M_3 h^3/6$. La soustraction des deux formules donne

$2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) - (r_+ - r_-)$, donc :

$$2h|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_3 h^3}{3}.$$

En divisant par $2h$:

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_3 h^2}{6}.$$

L'addition des formules donne $h^2 f''(x) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - (r_+ + r_-)$, d'où :

$$h^2 |f''(x)| \leq 4M_0 + \frac{M_3 h^3}{3}.$$

En divisant par $h^2 > 0$, on obtient la seconde borne demandée :

$$|f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + \frac{M_3 h}{3}.$$

(b) Optimisation des deux paramètres.

Si $M_0 = 0$ ou $M_3 = 0$, la remarque finale de II.3 donne $M_1 = M_2 = 0$: les bornes ci-dessous sont vérifiées. Supposons donc $M_0, M_3 > 0$.

Pour M_1 , on minimise $A(h) = M_0/h + M_3 h^2/6$. Sa dérivée est

$A'(h) = -M_0/h^2 + M_3 h/3$, de signe négatif puis positif autour de $h_1 = (3M_0/M_3)^{1/3}$.

Au minimum, $M_3 h_1^2/6 = M_0/(2h_1)$, donc :

$$A(h_1) = \frac{3M_0}{2h_1} = \frac{3^{2/3}}{2} M_0^{2/3} M_3^{1/3}.$$

Pour M_2 , on minimise $B(h) = 4M_0/h^2 + M_3h/3$. Sa dérivée est $B'(h) = -8M_0/h^3 + M_3/3$, de signe négatif puis positif autour de $h_2 = (24M_0/M_3)^{1/3}$. Au minimum, $4M_0/h_2^2 = M_3h_2/6$, donc :

$$B(h_2) = \frac{M_3h_2}{2} = 3^{1/3} M_0^{1/3} M_3^{2/3}.$$

En prenant le supremum en x dans a), puis en choisissant les paramètres minimisants, on obtient :

$$M_1 \leq \frac{3^{2/3}}{2} M_0^{2/3} M_3^{1/3}, \quad M_2 \leq 3^{1/3} M_0^{1/3} M_3^{2/3}.$$

Les deux constantes sont strictement inférieures à 2, ce qui améliore les bornes de la question 1.

3. Une borne sur la dérivée d'ordre $n - 1$.

Question adaptée au programme actuel. Le domaine est $n \geq 2$, et non seulement $n = 2$, comme l'exige la récurrence demandée.

(a) Appliquer la borne d'ordre deux à une dérivée.

La fonction $g = f^{(n-2)}$ est de classe C^2 . Elle est bornée d'après la partie II, et $g'' = f^{(n)}$ est bornée. Ainsi, $g \in E_2$. Le résultat I.2 donne :

$$M_{n-1} \leq \sqrt{2M_{n-2}M_n}, \quad M_{n-1}^2 \leq 2M_{n-2}M_n.$$

Pour $n = 2$, il s'agit directement de la même inégalité appliquée à $g = f$.

(b) Récurrence sur les constantes.

Question adaptée au programme actuel. La formule portant sur les normes est une majoration ; on fixe $a_2 = \sqrt{2}$ pour initialiser les constantes positives.

Pour $n = 2$, I.2 donne la propriété avec $a_2 = \sqrt{2}$. Supposons-la établie à l'ordre $n - 1$, où $n \geq 3$, et soit $f \in E_n$. Par II, $f \in E_{n-1}$. L'hypothèse de récurrence donne :

$$M_{n-2} \leq a_{n-1} M_0^{1/(n-1)} M_{n-1}^{(n-2)/(n-1)}.$$

Notons $X = M_{n-1}$. Si $X = 0$, la borne recherchée est vérifiée. Sinon, a) et l'hypothèse de récurrence donnent :

$$X^2 \leq 2a_{n-1} M_0^{1/(n-1)} X^{(n-2)/(n-1)} M_n.$$

On divise par la puissance strictement positive de X . Comme $2 - (n - 2)/(n - 1) = n/(n - 1)$:

$$X^{n/(n-1)} \leq 2a_{n-1} M_0^{1/(n-1)} M_n.$$

En élevant à la puissance positive $(n - 1)/n$, on obtient :

$$M_{n-1} \leq (2a_{n-1})^{(n-1)/n} M_0^{1/n} M_n^{(n-1)/n}.$$

Il suffit de définir $a_n = (2a_{n-1})^{(n-1)/n} > 0$. Les constantes dépendent seulement de n et vérifient :

$$a_n^n = 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1}.$$

La propriété est donc établie pour tout $n \geq 2$.

(c) Résoudre la récurrence des constantes.

Question adaptée au programme actuel. On conclut une inégalité pour les normes.

Montrons par récurrence que $a_n = 2^{(n-1)/2}$. Pour $n = 2$, cette expression vaut $\sqrt{2} = a_2$.

Si $a_{n-1} = 2^{(n-2)/2}$, alors :

$$a_n^n = 2^{n-1} \left(2^{(n-2)/2} \right)^{n-1} = 2^{(n-1)+(n-1)(n-2)/2} = 2^{n(n-1)/2}.$$

Comme $a_n > 0$, la racine n -ième donne $a_n = 2^{(n-1)/2}$. Par b) :

$$M_{n-1} \leq 2^{(n-1)/2} M_0^{1/n} M_n^{(n-1)/n}.$$

4. Bornes pour toutes les dérivées intermédiaires.

Question adaptée au programme actuel. On rétablit $n \geq 2$ et le signe d'inégalité ; les extrémités sont interprétées sans puissance 0^0 .

Pour $k = 0$ et $k = n$, la formule se lit simplement $M_0 \leq M_0$ et $M_n \leq M_n$. Pour $1 \leq k < n$, les deux exposants des normes sont strictement positifs. Si $M_0 = 0$ ou $M_n = 0$, la remarque de II.3 donne $M_k = 0$, donc la borne est vraie. Supposons désormais $M_0, M_n > 0$.

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 2$, le seul indice intermédiaire est $k = 1$, et la formule est $M_1 \leq \sqrt{2} M_0^{1/2} M_2^{1/2}$, déjà établie en I.2.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $n - 1$, avec $n \geq 3$. Pour $k = n - 1$, la borne est exactement celle de III.3 (c). Si $1 \leq k \leq n - 2$, la partie II permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $f \in E_{n-1}$:

$$M_k \leq 2^{k(n-1-k)/2} M_0^{(n-1-k)/(n-1)} M_{n-1}^{k/(n-1)}.$$

En substituant la borne de III.3 (c), dont tous les membres sont positifs ou nuls :

$$M_k \leq 2^{k(n-1-k)/2} 2^{k/2} M_0^{(n-1-k)/(n-1)+k/(n(n-1))} M_n^{k/n}.$$

Les exposants se simplifient en $k(n-k)/2$ pour le facteur 2, et en $(n-k)/n$ pour M_0 . On obtient donc, pour tout indice intermédiaire :

$$M_k \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n}.$$

Cela complète la récurrence et le traitement de tous les cas $0 \leq k \leq n$.

PARTIE IV

Pour tout entier $p \geq 1$, on utilise la définition rectifiée de w_p figurant dans le sujet. Pour alléger les calculs, on pose :

$$b = \frac{1}{2p}, \quad a = 1 - b, \quad q = p\pi.$$

Ces nombres dépendent de p , et vérifient $qb = \pi/2$, $q > 0$ et $1/2 \leq a < 1$.

1. Continuité, périodicité et courbe de w_1 .

Question adaptée au programme actuel. Au point $a = 1 - 1/(2p)$, la définition imprimée donnait simultanément les valeurs 1 et 2. On conserve le plateau de valeur 1 et remplace la seconde branche par $\sin(p\pi(1-x))$; les deux valeurs au raccord sont alors égales à 1. Le paramètre entier satisfait $p \geq 1$, conformément au passage à la limite demandé ensuite.

Sur $[0, a]$, la fonction vaut 1. Sur $[a, 1]$, elle vaut $\sin(q(1-x))$. Chaque branche est continue et, au raccord, $\sin(q(1-a)) = \sin(qb) = 1$. Au point 1, elle vaut 0.

On prolonge d'abord par parité sur $[-1, 1]$. Ce prolongement est continu, et les deux valeurs aux extrémités sont nulles. On étend ensuite chaque intervalle de longueur 2 par

la règle $w_p(x+2) = -w_p(x)$. Les raccords entre intervalles sont continus, puisque leurs valeurs sont nulles. Cette construction définit bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire, vérifiant la règle demandée.

En l'appliquant deux fois :

$$w_p(x+4) = -w_p(x+2) = w_p(x).$$

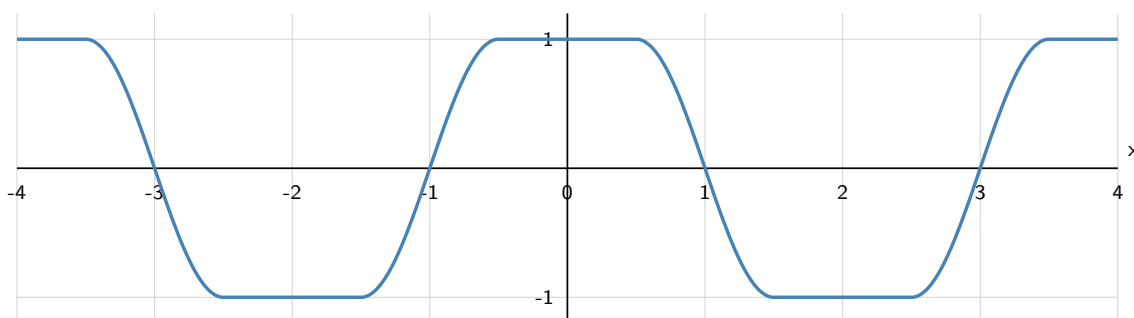
La fonction est donc de période 4. La valeur 2 n'est pas une période, car $w_p(0) = 1$ et $w_p(2) = -1$. On peut même préciser que 4 est sa plus petite période positive : elle est strictement positive sur $] -1, 1[$, strictement négative sur $]1, 3[$, et ses seuls zéros sont les entiers impairs. Toute période positive doit donc être un entier pair, en envoyant le zéro 1 sur un autre zéro. Les translations par 2 changent le signe, donc seule une translation par un multiple de 4 peut être une période.

Pour $p = 1$, sur $[0, 1]$:

$$w_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2, \\ \sin(\pi(1-x)) & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La courbe ci-dessous représente deux périodes ; elle est prolongée sur toute la droite par périodicité. Les points et les portions de courbe sont calculés à partir des formules exactes.

$w_1(x)$, période 4



2. Primitive v_p s'annulant en 0.

Question adaptée au programme actuel. L'indication imprimée attribuant une parité paire à v_p est rectifiée : la primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire est impaire.

Puisque w_p est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental du calcul intégral donne

$v_p(x) = \int_0^x w_p(t) dt$, une fonction de classe C^1 . Sur $[0, a]$, cette intégrale vaut x . Sur $[a, 1]$, on obtient :

$$v_p(x) = a + \int_a^x \sin(q(1-t)) dt = a + \frac{\cos(q(1-x))}{q},$$

car $\cos(q(1-a)) = \cos(\pi/2) = 0$. La formule peut aussi être vérifiée par dérivation de $\cos(q(1-x))/q$. Ainsi :

$$v_p(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq a, \\ a + \frac{\cos(q(1-x))}{q} & a \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les deux expressions valent a au raccord. Posons $V_p = v_p(1) = a + 1/q$.

Par le changement de variable affine $t = -s$ et la parité de w_p , on a :

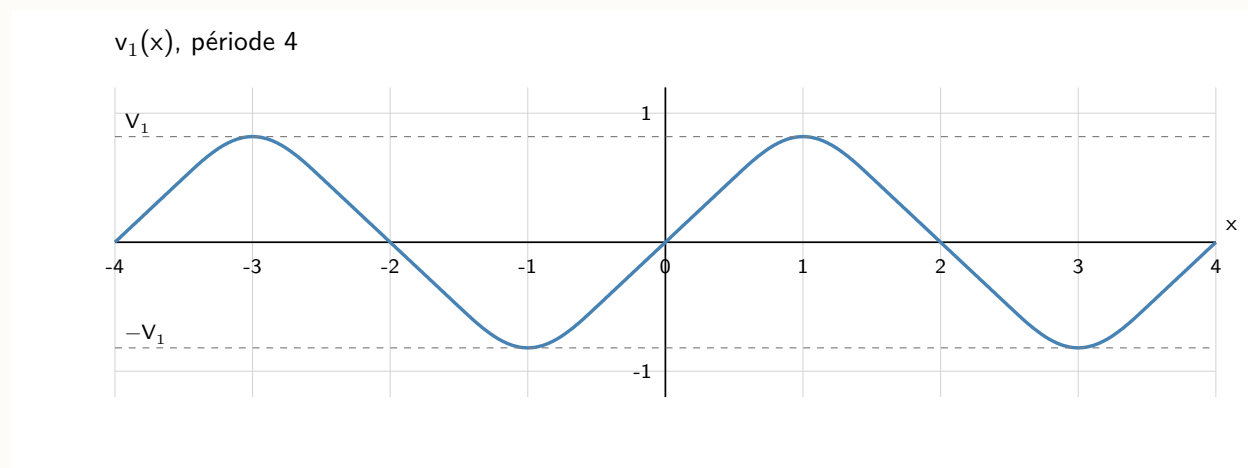
$$v_p(-x) = - \int_0^x w_p(-s) ds = -v_p(x).$$

Pour la translation, la fonction $H(x) = v_p(x+2) + v_p(x)$ est dérivable et vérifie $H'(x) = w_p(x+2) + w_p(x) = 0$. Elle est constante sur $\mathbb{R}$ par le théorème des accroissements finis. En $x = -1$, l'imparité donne $H(-1) = v_p(1) + v_p(-1) = 0$. Ainsi :

$$v_p(-x) = -v_p(x), \quad v_p(x+2) = -v_p(x), \quad v_p(x+4) = v_p(x).$$

Ces deux symétries donnent aussi $v_p(2-x) = v_p(x)$. Sur $[0, 1]$, sa dérivée w_p est positive ou nulle, donc v_p croît de 0 à V_p . Sur $[1, 2]$, la symétrie montre qu'elle décroît de V_p à 0. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et son maximum en valeur absolue vaut V_p .

Pour $p = 1$, on a $V_1 = 1/2 + 1/\pi$. Voici deux périodes de la courbe ; les autres s'obtiennent par translation de longueur 4.



3. Primitive u_p s'annulant en 1.

La fonction v_p est de classe C^1 , donc $u_p(x) = \int_1^x v_p(t) dt$ est de classe C^2 . Pour

$0 \leq x \leq 1$, on écrit $u_p(x) = - \int_x^1 v_p(t) dt$. Posons :

$$C_p = \int_0^1 v_p(t) dt = \frac{a^2}{2} + ab + \frac{1}{q^2}.$$

En effet, l'intégrale de la première branche vaut $a^2/2$, celle de la partie constante de la seconde vaut ab , et celle du cosinus vaut $\sin(qb)/q^2 = 1/q^2$. Sur $[0, a]$, on obtient $u_p(x) = -C_p + x^2/2$. Sur $[a, 1]$:

$$u_p(x) = -a(1-x) - \frac{\sin(q(1-x))}{q^2}.$$

Ainsi :

$$u_p(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - C_p & 0 \leq x \leq a, \\ -a(1-x) - \frac{\sin(q(1-x))}{q^2} & a \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Au raccord, la première branche vaut $a^2/2 - C_p = -ab - 1/q^2$, ce qui coïncide avec la seconde. À l'extrémité 1, la seconde branche vaut bien 0.

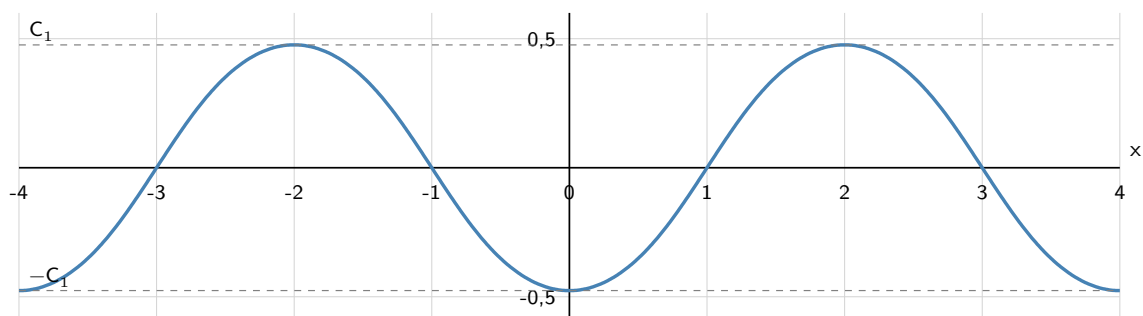
La fonction $K(x) = u_p(-x) - u_p(x)$ est dérivable. Comme v_p est impaire, sa dérivée vaut $-v_p(-x) - v_p(x) = 0$. Elle est constante et s'annule en $x = 0$, donc u_p est paire.

La fonction $L(x) = u_p(x+2) + u_p(x)$ a pour dérivée $v_p(x+2) + v_p(x) = 0$. Elle est constante, et sa valeur en $x = -1$ vaut $u_p(1) + u_p(-1) = 0$, grâce à la parité et à la condition $u_p(1) = 0$. On obtient donc :

$$u_p(-x) = u_p(x), \quad u_p(x+2) = -u_p(x), \quad u_p(x+4) = u_p(x).$$

En particulier, u_p est continue et périodique, donc bornée. Avec $u_p'' = w_p$ également bornée, on a $u_p \in E_2$. Pour $p = 1$, on a $C_1 = 3/8 + 1/\pi^2$, et les deux périodes représentées ci-dessous sont calculées par les expressions précédentes.

$u_1(x)$, période 4



4. Normes de u_p et optimalité de la constante d'ordre deux.

Sur $[0, 1]$, la fonction v_p est positive ou nulle et u_p croît de $-C_p$ à 0. Sur $[1, 2]$, la relation $v_p(2-x) = v_p(x)$ donne $v_p \geq 0$, donc u_p croît encore, de 0 à $u_p(2) = -u_p(0) = C_p$. Par

parité et périodicité, les valeurs de u_p sur toute la droite restent dans $[-C_p, C_p]$, et les deux extrêmes sont atteints. Ainsi, $M_0(p) = C_p$.

La question 2 donne $\sup |v_p| = V_p$, donc $M_1(p) = V_p$. Enfin, $u_p'' = w_p$ et $|w_p| \leq 1$, avec valeur 1 sur le plateau, donc $M_2(p) = 1$.

En remplaçant $a = 1 - b$, $b = 1/(2p)$ et $q = p\pi$, on trouve :

$$M_0(p) = C_p = \frac{1 - b^2}{2} + \frac{1}{q^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8p^2} + \frac{1}{p^2\pi^2},$$

$$M_1(p) = V_p = 1 - \frac{1}{2p} + \frac{1}{p\pi}, \quad M_2(p) = 1.$$

Ces nombres sont strictement positifs. Leurs limites sont :

$$M_0(p) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad M_1(p) \rightarrow 1, \quad M_2(p) \rightarrow 1.$$

Pour établir l'optimalité, supposons qu'une constante K permette la majoration $M_1 \leq K\sqrt{M_0M_2}$ pour toute fonction de E_2 . En l'appliquant à $u_p \in E_2$, on obtient :

$$K \geq \frac{M_1(p)}{\sqrt{M_0(p)M_2(p)}} \rightarrow \sqrt{2}.$$

Donc toute constante universelle est au moins égale à $\sqrt{2}$. La partie I a démontré que $\sqrt{2}$ convient effectivement. La constante est donc optimale. Cette preuve n'affirme pas que l'égalité est atteinte pour un p fini : une suite de fonctions dont les rapports tendent vers la constante suffit à prouver qu'on ne peut l'abaisser.

5. Optimalité des deux constantes d'ordre trois.

Définissons $U_p(x) = \int_0^x u_p(t) dt$. Puisque $u_p \in C^2$, on a $U_p \in C^3$, avec :

$$U_p' = u_p, \quad U_p'' = v_p, \quad U_p''' = w_p.$$

La parité de u_p et le changement de variable $t = -s$ donnent $U_p(-x) = -U_p(x)$. La fonction $x \mapsto U_p(x+2) + U_p(x)$ a une dérivée nulle, car $u_p(x+2) + u_p(x) = 0$. Elle est donc constante et, en $x = -1$, sa valeur est $U_p(1) + U_p(-1) = 0$. Ainsi :

$$U_p(-x) = -U_p(x), \quad U_p(x+2) = -U_p(x), \quad U_p(x+4) = U_p(x).$$

La fonction U_p est continue et périodique, donc bornée. Comme $U_p''' = w_p$ est bornée, on a $U_p \in E_3$.

Pour distinguer ses normes de celles de u_p , notons $L_j(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |U_p^{(j)}(x)|$ pour $0 \leq j \leq 3$. Les questions précédentes donnent immédiatement :

$$L_1(p) = C_p, \quad L_2(p) = V_p, \quad L_3(p) = 1.$$

Pour L_0 , observons que $u_p \leq 0$ sur $[0, 1]$ et $u_p \geq 0$ sur $[1, 2]$. La fonction U_p décroît donc de 0 à $U_p(1)$, puis croît jusqu'à $U_p(2) = -U_p(0) = 0$. En utilisant l'impairité et la périodicité, on obtient :

$$L_0(p) = D_p = -U_p(1) = \int_0^1 (-u_p(x)) dx > 0.$$

À partir des deux expressions de u_p :

$$D_p = \int_0^a \left(C_p - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_a^1 \left(a(1-x) + \frac{\sin(q(1-x))}{q^2} \right) dx.$$

La première intégrale vaut $aC_p - a^3/6$, la contribution de $a(1-x)$ vaut $ab^2/2$, et celle du sinus vaut $(1 - \cos(qb))/q^3 = 1/q^3$. Donc :

$$D_p = aC_p - \frac{a^3}{6} + \frac{ab^2}{2} + \frac{1}{q^3}.$$

Quand $p \rightarrow \infty$, on a $a \rightarrow 1$, $b \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$ et $C_p \rightarrow 1/2$. Par opérations sur ces expressions finies :

$$L_0(p) = D_p \rightarrow \frac{1}{3}, \quad L_1(p) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad L_2(p) \rightarrow 1, \quad L_3(p) = 1.$$

Aucun échange entre une limite et une intégrale n'est nécessaire : la limite de D_p est obtenue à partir de la formule explicite.

Si une constante universelle K_1 vérifie $M_1 \leq K_1 M_0^{2/3} M_3^{1/3}$ pour tout élément de E_3 , son application à U_p donne :

$$K_1 \geq \frac{L_1(p)}{L_0(p)^{2/3} L_3(p)^{1/3}} \rightarrow \frac{1/2}{(1/3)^{2/3}} = \frac{3^{2/3}}{2}.$$

De même, si $M_2 \leq K_2 M_0^{1/3} M_3^{2/3}$ vaut universellement, alors :

$$K_2 \geq \frac{L_2(p)}{L_0(p)^{1/3} L_3(p)^{2/3}} \rightarrow \frac{1}{(1/3)^{1/3}} = 3^{1/3}.$$

La question III.2 établit déjà les bornes avec ces deux constantes. Elles sont donc toutes deux optimales.

Relevé des adaptations

- I.1 (a), (b), (c) et I.2 (a) — Les égalités erronées sont remplacées par les majorations correspondantes ; les modules des restes et des dérivées sont rétablis. Les conclusions sont conservées.

- II.1 — Le polynôme suggéré est complété par son terme constant x_1 , indispensable pour représenter le système.
- II.2 — La dernière fonction de la famille est F_{n-1} , et non F_n , qui n'est pas définie.
- II.3 (a) — L'indice est limité à $1 \leq k \leq n-1$. Le reste est majoré par $|h_k|^n M_n/n!$; le module de F_k et le signe d'inégalité sont rétablis. Le cas $k = n$ reste traité dans la conclusion de (b).
- III.2 (a) — Les deux formules sont rectifiées en des majorations de $|f'|$ et $|f''|$.
- III.3 — Le domaine $n = 2$ est remplacé par $n \geq 2$, conformément à l'objet et à la récurrence de la question. Dans (b) et (c), les formules portant sur les normes sont des inégalités. L'initialisation $a_2 = \sqrt{2}$ est explicitée.
- III.4 — Même rectification du domaine et du signe d'inégalité. Les cas extrêmes sont distingués pour éviter une puissance 0^0 .
- IV.1–5 — Le paramètre satisfait $p \geq 1$. Dans la définition commune, le facteur 2 de la branche sinusoïdale est retiré en conservant le plateau de valeur 1 : le raccord est alors cohérent et continu, et les primitives appartiennent aux classes requises. Tous les calculs portent sur cette définition rectifiée.
- IV.2 — L'indication de parité incorrecte est retirée du sujet; l'expression de $v_p(-x)$ est demandée et démontrée. Les demandes de représentation graphique de IV.1, IV.2 et IV.3 sont conservées, et leurs courbes sont intégrées au corrigé en SVG, calculées à partir des formules exactes.