



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1991

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, on désigne par a un réel strictement positif et par K une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$K(x) = P(x) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right),$$

où P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

L'objet du problème est la recherche des fonctions continues f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'on ait, pour tout réel positif x :

$$(1) \quad f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f(t) dt.$$

Les trois parties du problème sont indépendantes les unes des autres.

Preliminaire

On considère, pour tout entier naturel n , l'intégrale $J_n(a)$ définie par :

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} t^n \exp\left(-\frac{t}{a}\right) dt.$$

En raisonnant par récurrence sur n , établir la convergence de cette intégrale et préciser sa valeur en fonction de n et a .

Partie I

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 1$.

1. Soit f une solution de (1). Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = cK$.
2. On considère réciproquement une fonction $f = cK$, où c est un nombre réel donné. À quelle condition sur c cette fonction est-elle solution de (1) ?
3. Étudier, selon les valeurs prises par a , l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.

Partie II

Dans toute cette partie, on désigne par λ un nombre réel et l'on suppose que

$$P(x) = \lambda a + x.$$

1. Soit E l'espace vectoriel engendré par les deux applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$\Phi_0(x) = \exp\left(-\frac{x}{2a}\right), \quad \Phi_1(x) = \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

1.(a) Montrer que (Φ_0, Φ_1) est une base de E .

1.(b) Soient Φ un élément de E et Ψ la fonction définie, pour $x \geq 0$, par :

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi(t) dt.$$

Prouver que cette intégrale est convergente et montrer que Ψ est un élément de E .

1.(c) Montrer que l'application $u : \Phi \in E \mapsto u(\Phi) = \Psi \in E$ est un endomorphisme de E .

Établir que sa matrice dans la base (Φ_0, Φ_1) est de la forme $a^2 M(\lambda)$, où $M(\lambda)$ est une matrice ne dépendant que de λ que l'on explicitera. L'application u est-elle un automorphisme de E ?

2. Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle appartient à E .

3. On considère réciproquement une fonction $f = \alpha_0 \Phi_0 + \alpha_1 \Phi_1$ de E , où α_0 et α_1 sont des nombres réels.

3.(a) Établir que cette fonction f est solution de (1) si et seulement si α_0 et α_1 sont solutions d'un système de deux équations que l'on explicitera.

3.(b) Résoudre et discuter le système obtenu.

3.(c) Représenter dans le plan l'ensemble des couples (a^2, λ) pour lesquels l'équation (1) n'a pas de solution. On portera a^2 en abscisse et λ en ordonnée.

Partie III

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 3x^2 - 4ax + x^2$.

1. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.(a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de M , avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

1.(b) Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres. On choisira à chaque fois un vecteur propre dont la troisième composante est égale à 1.

1.(c) En déduire une matrice inversible P telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

1.(d) Calculer l'inverse de la matrice P .

2. On considère les trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n + 6w_n, \\ v_{n+1} = -u_n + 2w_n, \\ w_{n+1} = u_n + 2v_n + 2w_n, \end{cases} \quad u_0 = 3, \quad v_0 = -2, \quad w_0 = 1.$$

2.(a) À l'aide du résultat précédent, expliciter u_n, v_n, w_n .

2.(b) Étudier la convergence et calculer les sommes éventuelles U, V, W des trois séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} a^{3n} u_n, \quad \sum_{n \geq 0} a^{3n} v_n, \quad \sum_{n \geq 0} a^{3n} w_n.$$

3. On définit une suite de fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $g_0 = K$, puis :

$$g_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)g_n(t) dt.$$

On pose alors :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x).$$

3.(a) Prouver par récurrence que g_n est bien définie et qu'il existe trois réels $\alpha_n, \beta_n, \chi_n$ tels que l'on ait, pour tout réel positif x :

$$g_n(x) = a^{3n}(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a x + \chi_n x^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

À l'aide des résultats précédents, expliciter les expressions de $\alpha_n, \beta_n, \chi_n$.

3.(b) Vérifier que, pour tout entier naturel n et tout réel positif x , on a :

$$f_{n+1}(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f_n(t) dt.$$

4. On suppose que $4a^3 < 1$ et l'on définit, pour tout réel positif x :

$$L(x) = (Ua^2 + 2Vax + Wx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

4.(a) Montrer que, pour tout réel positif x , la suite $(f_n(x))$ converge et exprimer sa limite en fonction de $L(x)$.

4.(b) Montrer que la fonction L est solution de (1).

5. Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle est nécessairement de la forme :

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right),$$

où A, B, C sont des réels.

6. On considère réciproquement la fonction f définie par :

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

6.(a) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si A, B, C vérifient :

$$(I_3 - a^3 M) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.(b) Pour quelles valeurs de a ce système admet-il une solution unique et quelle est alors cette solution ?

7. Étudier, selon les valeurs prises par a , l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.