



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1991

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Dans tout le corrigé, une solution de (1) est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ pour laquelle l'intégrale impropre de (1) converge pour chaque $x \geq 0$ et satisfait l'égalité demandée. Aucune convergence absolue de ces intégrales n'est supposée d'avance pour une solution inconnue.

Preliminaire

Méthode 1 — Récurrence et intégration par parties sur un segment.

Pour $n = 0$ et $R > 0$, on a :

$$\int_0^R e^{-t/a} dt = a(1 - e^{-R/a}).$$

Puisque $a > 0$, le terme exponentiel tend vers zéro. L'intégrale converge donc et $J_0(a) = a$.

Supposons que, pour un entier $n \geq 0$, l'intégrale $J_n(a)$ converge et vaut $n!a^{n+1}$. Sur le segment $[0, R]$, une intégration par parties avec $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t/a}$ donne :

$$\int_0^R t^{n+1} e^{-t/a} dt = -aR^{n+1}e^{-R/a} + a(n+1) \int_0^R t^n e^{-t/a} dt.$$

Le terme de bord en zéro est nul puisque $n+1 \geq 1$. Par croissance comparée, $R^{n+1}e^{-R/a} \rightarrow 0$. Le second terme possède une limite finie par l'hypothèse de récurrence. Ainsi, l'intégrale $J_{n+1}(a)$ converge et :

$$J_{n+1}(a) = a(n+1)J_n(a) = (n+1)!a^{n+2}.$$

La récurrence est établie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n(a) = n!a^{n+1}.$$

L'intégrande étant positif ou nul, il s'agit également d'une convergence absolue.

Méthode 2 — Reconnaissance de l'intégrale gamma.

Avec le changement de variable affine $t = as$, valable car $a > 0$, effectué d'abord sur un segment, on obtient :

$$\int_0^R t^n e^{-t/a} dt = a^{n+1} \int_0^{R/a} s^n e^{-s} ds.$$

La définition de la fonction gamma pour le paramètre $n + 1 > 0$ assure la convergence de l'intégrale de droite à l'infini et donne $\Gamma(n + 1) = n!$. On retrouve donc $J_n(a) = a^{n+1} \Gamma(n + 1) = n! a^{n+1}$.

La récurrence est la méthode imposée par l'énoncé. L'intégrale gamma relie ce calcul aux moments des lois gamma et exponentielle.

Partie I

1. Forme nécessaire d'une solution.

Dans cette partie, $K(x) = e^{-x/(2a)}$ et :

$$K(x + t) = K(x)K(t).$$

Si f est solution, l'intégrale de (1) pour $x = 0$ converge. Elle est égale à

$$I = \int_0^{+\infty} K(t)f(t) dt, \text{ puisque } K(0) = 1.$$

Pour tout $R > 0$ et tout $x \geq 0$, on a :

$$\int_0^R K(x + t)f(t) dt = K(x) \int_0^R K(t)f(t) dt.$$

Le passage à la limite conserve cette égalité, donc (1) devient $f(x) = K(x)(1 + I)$. En posant $c = 1 + I$, on conclut $f = cK$ sur tout $[0, +\infty[$.

2. Condition suffisante et nécessaire sur c .

Pour $f = cK$, la fonction est continue et l'intégrale est absolument convergente, car :

$$\int_0^{+\infty} |K(x+t)cK(t)| dt = |c|K(x)J_0(a) = |c|aK(x) < +\infty.$$

De plus :

$$\int_0^{+\infty} K(x+t)f(t) dt = caK(x).$$

L'équation est donc équivalente à $cK(x) = (1 + ca)K(x)$ pour chaque x . Comme $K(x) > 0$, cette égalité équivaut à :

$$(1 - a)c = 1.$$

3. Discussion selon a .

Si $a \neq 1$, l'équation scalaire de la question 2 possède l'unique solution $c = 1/(1 - a)$. Les questions 1 et 2 assurent alors qu'il existe une unique solution de (1) :

$$f(x) = \frac{1}{1 - a} \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

Si $a = 1$, l'équation scalaire devient $0 = 1$, ce qui est impossible. Il n'y a donc aucune solution.

Ces conclusions valent pour tout $a > 0$, sans imposer de signe à f .

Partie II

1. L'espace E et l'opérateur intégral.

1.(a) Base de E .

Par définition, (Φ_0, Φ_1) engendre E . Pour vérifier qu'elle est libre, supposons $r\Phi_0 + s\Phi_1 = 0$. Comme $\Phi_0(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$, on peut diviser par cette fonction et obtenir :

$$r + s\frac{x}{a} = 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

En prenant $x = 0$, puis $x = a$, on obtient $r = 0$, puis $s = 0$. La famille est donc libre et génératrice : c'est une base de E , qui est de dimension 2.

1.(b) Convergence de l'intégrale et stabilité de E .

Écrivons $\Phi = b_0 \Phi_0 + b_1 \Phi_1$. Pour $x \geq 0$ fixé :

$$K(x+t)\Phi(t) = e^{-x/(2a)}(\lambda a + x + t) \left(b_0 + b_1 \frac{t}{a} \right) e^{-t/a}.$$

Le facteur précédant $e^{-t/a}$ est un polynôme en t de degré au plus 2. Sa valeur absolue est majorée par une combinaison à coefficients positifs ou nuls de $1, t, t^2$. Le préliminaire assure donc la convergence absolue de l'intégrale.

On peut intégrer la somme finie des termes développés. En utilisant $J_0(a) = a$, $J_1(a) = a^2$ et $J_2(a) = 2a^3$, on trouve :

$$\Psi(x) = e^{-x/(2a)} \left[b_0((\lambda a + x)a + a^2) + \frac{b_1}{a}((\lambda a + x)a^2 + 2a^3) \right].$$

En regroupant selon la base :

$$\Psi = a^2((\lambda + 1)b_0 + (\lambda + 2)b_1)\Phi_0 + a^2(b_0 + b_1)\Phi_1.$$

Ainsi, $\Psi \in E$.

1.(c) Endomorphisme, matrice et automorphisme.

La question précédente montre que u est bien définie de E dans E . La linéarité de l'intégrale, appliquée à des intégrales absolument convergentes, assure la linéarité de u .

Les coordonnées de $u(\Phi)$ calculées en 1.(b) donnent :

$$\text{Mat}_{(\Phi_0, \Phi_1)}(u) = a^2 M(\lambda), \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda + 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour décider si u est un automorphisme, résolvons l'équation du noyau, sans déterminant. Comme $a^2 > 0$, $u(\Phi) = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} (\lambda + 1)b_0 + (\lambda + 2)b_1 = 0, \\ b_0 + b_1 = 0. \end{cases}$$

La seconde ligne donne $b_1 = -b_0$. Substituer dans la première donne $-b_0 = 0$, puis $b_1 = 0$. Le noyau est donc réduit à zéro. Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif.

Par conséquent, u est un automorphisme pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$.

2. Toute solution appartient à E .

Il faut justifier séparément les moments qui apparaissent ; on ne décompose pas d'emblée une intégrale convergente en intégrales de convergence inconnue.

Pour $R > 0$, posons :

$$I_{0,R} = \int_0^R e^{-t/(2a)} f(t) dt, \quad I_{1,R} = \int_0^R t e^{-t/(2a)} f(t) dt.$$

Ils existent sur chaque segment car f est continue. Définissons aussi :

$$H_R(x) = e^{x/(2a)} \int_0^R K(x+t) f(t) dt = (\lambda a + x) I_{0,R} + I_{1,R}.$$

Puisque f est solution, $H_R(x)$ possède, pour chaque $x \geq 0$, la limite finie :

$$H(x) = e^{x/(2a)} (f(x) - K(x)).$$

Or $H_R(a) - H_R(0) = a I_{0,R}$. Comme $a > 0$, cela montre que $I_{0,R}$ converge vers un réel I_0 .

Ensuite, $I_{1,R} = H_R(0) - \lambda a I_{0,R}$ converge vers un réel I_1 .

Pour tout $x \geq 0$, le passage à la limite dans la combinaison finie donne :

$$f(x) = e^{-x/(2a)} [(\lambda a + x)(1 + I_0) + I_1].$$

Cette fonction est une combinaison de Φ_0 et Φ_1 , donc $f \in E$. Sa forme obtenue implique ensuite que les moments I_0 et I_1 sont même absolument convergents, par le préliminaire.

3. Résolution de l'équation dans E .

3.(a) Système caractérisant les solutions.

On a $K = \lambda a \Phi_0 + a \Phi_1$. Pour $f = \alpha_0 \Phi_0 + \alpha_1 \Phi_1$, toutes les intégrales sont absolument convergentes d'après 1.(b). L'équation (1) équivaut à $f = K + u(f)$.

Comme la famille est une base, l'égalité des fonctions équivaut à l'égalité de leurs coordonnées :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \lambda a + a^2((\lambda + 1)\alpha_0 + (\lambda + 2)\alpha_1), \\ \alpha_1 = a + a^2(\alpha_0 + \alpha_1). \end{cases}$$

En posant $z = a^2 > 0$, on obtient le système :

$$\begin{cases} (1 - z(\lambda + 1))\alpha_0 - z(\lambda + 2)\alpha_1 = \lambda a, \\ -z\alpha_0 + (1 - z)\alpha_1 = a. \end{cases}$$

3.(b) Résolution et discussion.

On utilise une élimination avec un pivot toujours non nul.

Comme $z > 0$, la seconde équation donne :

$$\alpha_0 = \frac{(1 - z)\alpha_1 - a}{z}.$$

En remplaçant dans la première et en multipliant par z , il vient :

$$((1 - z(\lambda + 1))(1 - z) - z^2(\lambda + 2))\alpha_1 = a(1 - z(\lambda + 1)) + \lambda az.$$

Les deux membres se simplifient en :

$$D\alpha_1 = a(1-z), \quad D = 1 - (\lambda + 2)z - z^2.$$

Si $D \neq 0$, on obtient une unique solution :

$$\alpha_1 = \frac{a(1-z)}{D}, \quad \alpha_0 = \frac{a(\lambda + 2z)}{D}.$$

La formule de α_0 résulte de $(1-z)^2 - D = z(\lambda + 2z)$. L'unique fonction solution est donc :

$$f(x) = \frac{a(\lambda + 2a^2) + (1-a^2)x}{1 - (\lambda + 2)a^2 - a^4} \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

Si $D = 0$ et $z \neq 1$, l'équation réduite devient $0 = a(1-z) \neq 0$. Aucune solution n'existe.

Si $D = 0$ et $z = 1$, alors $a = 1$ et $D = -\lambda - 2$ impose $\lambda = -2$. Le système initial se réduit à :

$$2\alpha_0 = -2, \quad -\alpha_0 = 1.$$

Il impose $\alpha_0 = -1$ et laisse α_1 arbitraire. Il existe donc une infinité de solutions :

$$f(x) = (-1 + tx)e^{-x/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.(c) Ensemble des paramètres sans solution.

La discussion donne exactement l'ensemble :

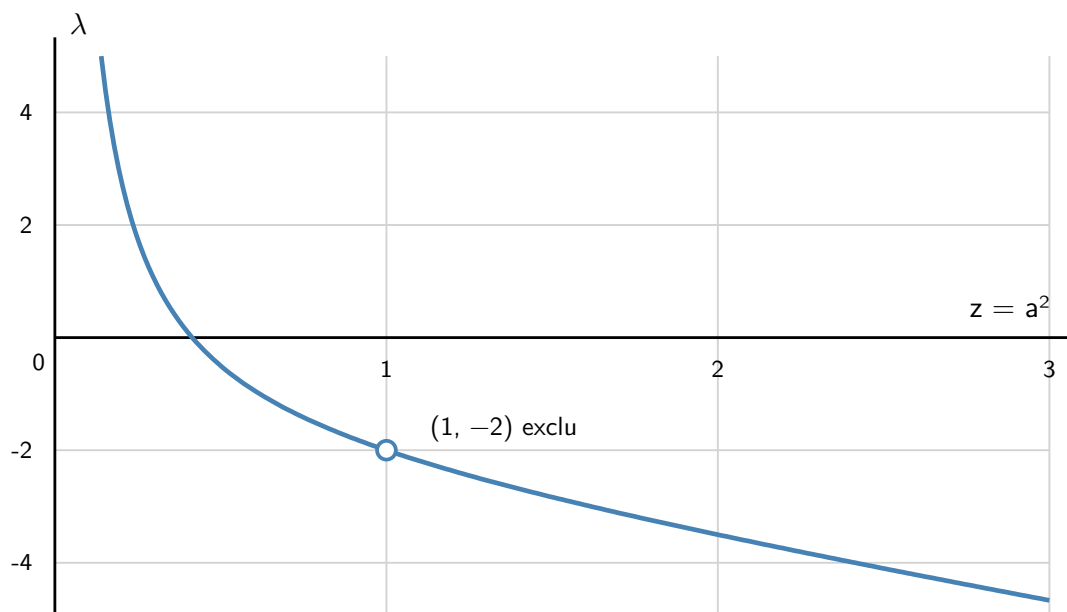
$$\mathcal{N} = \left\{ (z, \lambda) : z > 0, \lambda = \frac{1}{z} - 2 - z, z \neq 1 \right\}.$$

Le point $(1, -2)$ de la courbe est exclu, car l'équation possède alors une infinité de solutions. En dehors de la courbe, elle possède une unique solution.

Pour tracer précisément la courbe, posons $h(z) = 1/z - 2 - z$ pour $z > 0$. On a :

$$h'(z) = -\frac{1}{z^2} - 1 < 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} h(z) = +\infty.$$

La droite $\lambda = -z - 2$ est une asymptote à l'infini puisque $h(z) - (-z - 2) = 1/z \rightarrow 0$. La courbe coupe l'axe horizontal en $z = \sqrt{2} - 1$ et passe par $(1, -2)$, représenté par un cercle vide.



Courbe exacte : $\lambda = 1/z - 2 - z, z > 0$.

Le cercle vide indique le point retiré de l'ensemble.

Le dessin représente une fenêtre de la courbe exacte ; celle-ci se prolonge pour toutes les abscisses $z > 0$. L'ensemble sans solution est la courbe privée du point indiqué.

Partie III

1. Réduction de la matrice M .

1.(a) Valeurs propres réelles de M .

On résout le système ${}^t(M(u, v, w)) = \lambda {}^t(u, v, w)$ pour un vecteur non nul, sans utiliser de déterminant :

$$\begin{cases} u + 2v + 6w = \lambda u, \\ -u + 2w = \lambda v, \\ u + 2v + 2w = \lambda w. \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, soustraire la troisième équation de la première donne $4w = 0$. La seconde

impose alors $u = 0$, puis la troisième impose $v = 0$. Il n'existe donc pas de vecteur propre pour $\lambda = 0$.

Supposons $\lambda \neq 0$. La même soustraction donne $4w = \lambda(u - w)$, soit :

$$u = \left(1 + \frac{4}{\lambda}\right)w.$$

Si $w = 0$, cette relation impose $u = 0$, puis la troisième équation impose $v = 0$. Pour un vecteur propre, w est donc non nul, et l'on peut le normaliser à 1.

La troisième équation donne alors :

$$u = 1 + \frac{4}{\lambda}, \quad v = \frac{\lambda - 3 - 4/\lambda}{2}.$$

La seconde devient :

$$1 - \frac{4}{\lambda} = \frac{\lambda^2 - 3\lambda - 4}{2}.$$

En multipliant par $2\lambda \neq 0$, on obtient :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

La factorisation se vérifie par multiplication :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Les seules valeurs propres possibles sont donc 4, 1, -2. Les vecteurs de la question suivante vérifient le système et établissent qu'elles sont toutes effectivement valeurs propres. Dans l'ordre demandé :

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

Le polynôme obtenu ici résulte de l'élimination dans le système ; aucun résultat sur les polynômes caractéristiques n'est utilisé.

1.(b) Vecteurs propres normalisés.

On remplace chaque valeur dans les expressions trouvées avec $w = 1$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La vérification directe donne :

$$Me_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4e_1, \quad Me_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2, \quad Me_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -2e_3.$$

Ils sont non nuls et leur troisième composante vaut bien 1.

1.(c) Matrice de diagonalisation.

Les trois vecteurs propres sont associés à des valeurs propres distinctes. Le résultat du cours sur l'indépendance des vecteurs propres s'applique : ils forment une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc une base.

La matrice ayant ces vecteurs pour colonnes est ainsi inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $D = \text{diag}(4, 1, -2)$, les relations propres donnent $MP = PD$. Comme P est inversible, on peut multiplier à droite par P^{-1} et conclure :

$$M = PDP^{-1}.$$

Dans cette question, le symbole P désigne la matrice de passage, distincte du polynôme employé dans le préambule.

1.(d) Inverse de P .

Pour déterminer l'inverse, résolvons ${}^t(P(r, s, t)) = {}^t(u, v, w)$ pour un second membre quelconque :

$$\begin{cases} 2r + 5s - t = u, \\ -3s - \frac{3}{2}t = v, \\ r + s + t = w. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $t = -2v/3 - 2s$. La troisième donne ensuite $r = w + 2v/3 + s$. En substituant ces expressions dans la première :

$$2w + 2v + 9s = u.$$

Il en résulte :

$$s = \frac{u - 2v - 2w}{9}, \quad r = \frac{u + 4v + 7w}{9}, \quad t = \frac{-2u - 2v + 4w}{9}.$$

Les coordonnées de l'antécédent étant explicites, on obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette résolution par élimination fournit l'inverse sans recours à une formule faisant intervenir un déterminant.

2. Suites récurrentes et séries.

2.(a) Expressions des suites.

Posons $X_n = {}^t(u_n, v_n, w_n)$ et $h = {}^t(3, -2, 1)$. Les trois récurrences s'écrivent

$X_{n+1} = MX_n$, avec $X_0 = h$. Une récurrence donne $X_n = M^n h$.

À l'aide de la diagonalisation, $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 0$, y compris $n = 0$. Les coordonnées initiales dans la base propre sont :

$$P^{-1}h = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 - 8 + 7 \\ 3 + 4 - 2 \\ -6 + 4 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 5/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$X_n = \frac{2}{9}4^n e_1 + \frac{5}{9}e_2 + \frac{2}{9}(-2)^n e_3.$$

En lisant les composantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{4}{9}4^n + \frac{25}{9} - \frac{2}{9}(-2)^n.$$

$$v_n = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n.$$

$$w_n = \frac{2}{9}4^n + \frac{5}{9} + \frac{2}{9}(-2)^n.$$

Pour $n = 0$, ces formules donnent respectivement 3, -2, 1, conformément aux conditions initiales.

2.(b) Convergence des trois séries et sommes.

Posons $r = a^3 > 0$. Les termes des séries deviennent :

$$r^n u_n = \frac{4}{9}(4r)^n + \frac{25}{9}r^n - \frac{2}{9}(-2r)^n.$$

$$r^n v_n = -\frac{5}{3}r^n - \frac{1}{3}(-2r)^n.$$

$$r^n w_n = \frac{2}{9}(4r)^n + \frac{5}{9}r^n + \frac{2}{9}(-2r)^n.$$

Si $r < 1/4$, les trois raisons $4r, r, -2r$ sont de valeur absolue strictement inférieure à 1. Les trois séries sont alors absolument convergentes. La somme d'une série géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ vaut $1/(1 - q)$, ce qui donne :

$$U = \frac{1}{9} \left(\frac{4}{1 - 4r} + \frac{25}{1 - r} - \frac{2}{1 + 2r} \right).$$

$$V = -\frac{5}{3(1 - r)} - \frac{1}{3(1 + 2r)}.$$

$$W = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{1 - 4r} + \frac{5}{1 - r} + \frac{2}{1 + 2r} \right).$$

Étudions chaque domaine maximal de convergence. Pour la première série :

$$\frac{r^n u_n}{(4r)^n} = \frac{4}{9} + \frac{25}{9} \left(\frac{1}{4} \right)^n - \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow \frac{4}{9}.$$

Si $r \geq 1/4$, $(4r)^n \geq 1$, donc les termes ne tendent pas vers zéro. La série diverge. Le même argument pour w_n , avec limite $2/9$, donne exactement la même condition.

Pour la deuxième série :

$$\frac{r^n v_n}{(-2r)^n} = -\frac{5}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{3} \rightarrow -\frac{1}{3}.$$

Si $r \geq 1/2$, les valeurs absolues des termes ne tendent pas vers zéro, donc la série diverge. Si $r < 1/2$, les deux raisons r et $-2r$ sont de valeur absolue inférieure à 1 : elle converge absolument et sa somme est la formule de V donnée ci-dessus.

On conclut :

Série	Condition de convergence
	$a^3 < 1/4$
$\sum a^{3n} u_n$	

Série	Condition de convergence
$\sum a^{3n} v_n$	$a^3 < 1/2$
$\sum a^{3n} w_n$	$a^3 < 1/4$

Les égalités aux bornes ne donnent pas de convergence, puisque les termes ne tendent pas vers zéro.

3. Itération de l'opérateur intégral.

3.(a) Construction de g_n et coefficients.

Calculons d'abord l'action intégrale sur une fonction quelconque de la forme :

$$F(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2)e^{-x/(2a)}.$$

Pour x fixé, le produit $K(x+t)F(t)$ est $e^{-x/(2a)}e^{-t/a}$ multiplié par un polynôme en t de degré au plus 4. Le préliminaire assure la convergence absolue de l'intégrale.

Posons $R(t) = Aa^2 + 2Bat + Ct^2$. En développant $P(x+t)$ selon les puissances de x , on a :

$$P(x+t) = x^2 + x(-4a + 2t) + (3a^2 - 4at + t^2).$$

Les coefficients de l'intégrale peuvent donc être calculés par les moments $J_j(a)$:

$$\int_0^{+\infty} R(t)e^{-t/a} dt = a^3(A + 2B + 2C).$$

$$\int_0^{+\infty} (-4a + 2t)R(t)e^{-t/a} dt = a^4(-2A + 4C).$$

$$\int_0^{+\infty} (3a^2 - 4at + t^2)R(t)e^{-t/a} dt = a^5(A + 2B + 6C).$$

Pour détailler le dernier calcul, les contributions de A, B, C sont respectivement :

$$Aa^2(3a^2J_0 - 4aJ_1 + J_2) = Aa^5(3 - 4 + 2) = Aa^5.$$

$$2Ba(3a^2J_1 - 4aJ_2 + J_3) = 2Ba^5(3 - 8 + 6) = 2Ba^5.$$

$$C(3a^2J_2 - 4aJ_3 + J_4) = Ca^5(6 - 24 + 24) = 6Ca^5.$$

Le coefficient linéaire se calcule de même : les contributions sont $-2Aa^4, 0$ et $4Ca^4$.

Ainsi, en notant $T(F)(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)F(t) dt$, on obtient :

$$T(F)(x) = a^3((A + 2B + 6C)a^2 + 2(-A + 2C)ax + (A + 2B + 2C)x^2)e^{-x/(2a)}.$$

Les coefficients sont donc transformés par la matrice M de la partie III.

Initialisation : $g_0 = K$ correspond à $(\alpha_0, \beta_0, \chi_0) = (3, -2, 1)$.

Hérédité : si $g_n = a^{3n}F_n$ avec des coefficients $\alpha_n, \beta_n, \chi_n$, le calcul précédent garantit que g_{n+1} est bien définie, continue et de la même forme, avec :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \chi_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \chi_n \end{pmatrix}.$$

La récurrence est donc établie pour tout n . Les coefficients sont uniques, car un polynôme nul sur $[0, +\infty[$ a tous ses coefficients nuls, et $a > 0$. Ils satisfont la même récurrence et la même condition initiale que (u_n, v_n, w_n) ; ainsi :

$$\alpha_n = u_n = \frac{4}{9}4^n + \frac{25}{9} - \frac{2}{9}(-2)^n.$$

$$\beta_n = v_n = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n.$$

$$\chi_n = w_n = \frac{2}{9}4^n + \frac{5}{9} + \frac{2}{9}(-2)^n.$$

3.(b) Relation entre les sommes partielles.

Chaque f_n est une somme finie des fonctions g_k . Chacune des intégrales correspondantes est absolument convergente d'après 3.(a). Par linéarité de cette somme finie :

$$\int_0^{+\infty} K(x+t)f_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} K(x+t)g_k(t) dt = \sum_{k=0}^n g_{k+1}(x).$$

En ajoutant $K(x) = g_0(x)$, on obtient :

$$K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n+1} g_k(x) = f_{n+1}(x).$$

Le raisonnement ne fait intervenir aucun échange entre une somme infinie et une intégrale.

4. Construction d'une solution lorsque $4a^3 < 1$.

4.(a) Limite ponctuelle de f_n .

On suppose $4a^3 < 1$ et on pose toujours $r = a^3$. Les trois séries de 2.(b) convergent absolument. Définissons leurs sommes partielles :

$$U_n = \sum_{k=0}^n r^k u_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^n r^k v_k, \quad W_n = \sum_{k=0}^n r^k w_k.$$

La formule de g_k donne exactement :

$$f_n(x) = (a^2U_n + 2axV_n + x^2W_n)e^{-x/(2a)}.$$

Pour x fixé, cette expression est une combinaison finie de suites convergentes. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = (a^2U + 2axV + x^2W)e^{-x/(2a)} = L(x).$$

La convergence demandée est donc ponctuelle sur tout $[0, +\infty[$.

4.(b) Vérification que L est solution.

Il serait insuffisant de passer directement à la limite sous l'intégrale de 3.(b). On raisonne uniquement sur les trois coefficients.

Notons $S_n = {}^t(U_n, V_n, W_n)$ et $h = {}^t(3, -2, 1)$. Puisque $X_{k+1} = MX_k$:

$$S_{n+1} = h + \sum_{k=1}^{n+1} r^k X_k = h + rM \sum_{k=0}^n r^k X_k = h + rMS_n.$$

Les trois coordonnées de S_n convergent vers celles de $S = {}^t(U, V, W)$. Chaque coordonnée de MS_n est une combinaison linéaire finie : on peut passer à la limite et obtenir :

$$S = h + rMS.$$

La fonction L est continue, et le calcul de l'opérateur T en 3.(a) montre que son intégrale est absolument convergente et a pour coefficients rMS . La relation précédente est précisément l'égalité des coefficients dans $L = K + T(L)$.

Ainsi, L est solution de (1), sans aucun passage à la limite sous une intégrale.

5. Forme nécessaire de toute solution.

Comme dans la partie II, on justifie l'existence des moments au moyen d'intégrales tronquées. Pour $j \in \{0, 1, 2\}$ et $R > 0$, définissons :

$$I_{j,R} = \int_0^R t^j e^{-t/(2a)} f(t) dt.$$

Ces intégrales sur un segment existent par continuité. Pour $x \geq 0$, posons :

$$H_R(x) = e^{x/(2a)} \int_0^R K(x+t)f(t) dt.$$

Le développement du polynôme $P(x+t)$ donne :

$$H_R(x) = (x^2 - 4ax + 3a^2)I_{0,R} + (2x - 4a)I_{1,R} + I_{2,R}.$$

Puisque f est solution, $H_R(x)$ converge pour chaque x vers le réel

$$H(x) = e^{x/(2a)}(f(x) - K(x)).$$

En considérant les trois valeurs $x = 0, a, 2a$, on obtient :

$$H_R(2a) - 2H_R(a) + H_R(0) = 2a^2 I_{0,R}.$$

Comme $a > 0$, les trois limites à gauche montrent que $I_{0,R}$ converge vers un réel I_0 .

Ensuite :

$$H_R(a) - H_R(0) = -3a^2 I_{0,R} + 2a I_{1,R},$$

donc $I_{1,R}$ converge vers un réel I_1 . Enfin :

$$I_{2,R} = H_R(0) - 3a^2 I_{0,R} + 4a I_{1,R}$$

converge vers un réel I_2 .

Pour tout x , on peut donc passer à la limite dans la combinaison finie et ajouter le polynôme de K :

$$e^{x/(2a)}f(x) = (1 + I_0)x^2 + (-4a(1 + I_0) + 2I_1)x + 3a^2(1 + I_0) - 4aI_1 + I_2.$$

En définissant :

$$C = 1 + I_0, \quad B = -2(1 + I_0) + \frac{I_1}{a}, \quad A = 3(1 + I_0) - \frac{4I_1}{a} + \frac{I_2}{a^2},$$

on obtient la forme demandée :

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2)e^{-x/(2a)}.$$

Les divisions sont licites puisque $a > 0$. A posteriori, les trois moments sont absolument convergents, car leur intégrande est un polynôme multiplié par $e^{-t/a}$. Le préliminaire le garantit.

6. Résolution dans l'espace de dimension 3.

6.(a) Système caractérisant les coefficients.

Pour une fonction f de la forme donnée, la continuité et la convergence absolue de l'intégrale sont établies par le calcul de 3.(a). Si $X = {}^t(A, B, C)$, les coefficients de $T(f)$ sont a^3MX , et ceux de K sont $h = {}^t(3, -2, 1)$.

Les fonctions $a^2e^{-x/(2a)}$, $2axe^{-x/(2a)}$, $x^2e^{-x/(2a)}$ sont libres : une combinaison nulle, après division par l'exponentielle positive, est un polynôme nul sur un intervalle, donc ses coefficients sont nuls.

Ainsi, $f = K + T(f)$ équivaut à l'égalité des coordonnées $X = h + a^3MX$, soit :

$$(I_3 - a^3M) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.(b) Unicité et expression de la solution.

Posons $r = a^3 > 0$.

Méthode 1 — Résolution dans la base propre.

Comme P est inversible et $M = PDP^{-1}$, le système équivaut, en posant $Y = P^{-1}X$, à :

$$(I_3 - rD)Y = P^{-1}h = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 5/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de trois équations scalaires :

$$\begin{cases} (1 - 4r)Y_1 = 2/9, \\ (1 - r)Y_2 = 5/9, \\ (1 + 2r)Y_3 = 2/9. \end{cases}$$

Le coefficient $1 + 2r$ est toujours strictement positif. Les deux autres sont non nuls exactement lorsque $r \notin \{1/4, 1\}$. Dans ce cas, le système admet une unique solution :

$$X = \frac{2}{9(1 - 4r)}e_1 + \frac{5}{9(1 - r)}e_2 + \frac{2}{9(1 + 2r)}e_3.$$

En coordonnées :

$$A = \frac{1}{9} \left(\frac{4}{1 - 4r} + \frac{25}{1 - r} - \frac{2}{1 + 2r} \right).$$

$$B = -\frac{5}{3(1 - r)} - \frac{1}{3(1 + 2r)}.$$

$$C = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{1 - 4r} + \frac{5}{1 - r} + \frac{2}{1 + 2r} \right).$$

Si $r = 1/4$, la première équation diagonale est $0 = 2/9$: aucune solution. Si $r = 1$, la deuxième est $0 = 5/9$: aucune solution.

Il y a donc une solution unique exactement pour $a > 0$ tel que $a \notin \{4^{-1/3}, 1\}$.

Méthode 2 — Élimination directe dans le système initial.

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} (1-r)A - 2rB - 6rC = 3, \\ rA + B - 2rC = -2, \\ -rA - 2rB + (1-2r)C = 1. \end{cases}$$

La soustraction de la troisième ligne à la première donne, sans division :

$$A - (1 + 4r)C = 2.$$

La deuxième ligne donne $B = -2 - rA + 2rC$. En remplaçant B dans la troisième ligne, on obtient :

$$(-r + 2r^2)A + (1 - 2r - 4r^2)C = 1 - 4r.$$

Substituer $A = 2 + (1 + 4r)C$ conduit à :

$$(1 - 3r - 6r^2 + 8r^3)C = 1 - 2r - 4r^2.$$

Le coefficient se factorise par une multiplication directe :

$$Q(r) = 1 - 3r - 6r^2 + 8r^3 = (1 - 4r)(1 - r)(1 + 2r).$$

Lorsque $Q(r) \neq 0$, les opérations précédentes sont réversibles et donnent l'unique solution :

$$C = \frac{1 - 2r - 4r^2}{Q(r)}.$$

$$A = 2 + (1 + 4r)C = \frac{3 - 4r - 24r^2}{Q(r)}.$$

$$B = -2 - rA + 2rC = \frac{-2 + 5r + 12r^2}{Q(r)}.$$

Pour $r > 0$, $Q(r) = 0$ exactement aux valeurs $1/4$ et 1 . Le second membre de l'équation en C vaut respectivement $1/4$ et -5 : dans ces deux cas, le système est incompatible.

On retrouve donc le même domaine d'existence et d'unicité. La diagonalisation utilise les questions précédentes et sépare les trois directions propres ; l'élimination donne une expression rationnelle avec un dénominateur commun, utile pour écrire la fonction finale.

Les expressions rationnelles existent même lorsque les séries de 2.(b) divergent. Elles coïncident avec (U, V, W) dans le domaine $r < 1/4$ où ces trois sommes existent.

7. Discussion finale de l'équation intégrale.

La question 5 démontre que toute solution continue appartient à l'espace de dimension 3 étudié. La question 6.(a) prouve réciproquement que toute fonction de cet espace dont les coefficients satisfont le système est solution : son intégrale est absolument convergente.

Si $a = 4^{-1/3}$ ou $a = 1$, le système est incompatible par 6.(b). Il n'existe donc aucune solution de (1).

Pour tout autre $a > 0$, il existe une unique solution. Avec $r = a^3$ et $Q(r) = (1 - 4r)(1 - r)(1 + 2r)$, elle s'écrit :

$$f(x) = \frac{a^2(3 - 4r - 24r^2) + 2ax(-2 + 5r + 12r^2) + x^2(1 - 2r - 4r^2)}{(1 - 4r)(1 - r)(1 + 2r)} \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

Pour $4a^3 < 1$, c'est la fonction L obtenue comme limite ponctuelle de (f_n) dans la question 4. La résolution du système donne également la solution dans les autres domaines non singuliers.

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité de modification de fond, aucun résultat n'a été admis et aucune donnée mathématique du sujet n'a été rectifiée. Les valeurs propres et les inverses sont calculés par des systèmes linéaires ; les passages à la limite sont justifiés par des combinaisons finies. Le graphique demandé en II.3.(c) est construit dans le corrigé en SVG à partir de l'équation exacte.