



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1990

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, x désigne une variable réelle appartenant à $[0, 1[$. Les fonctions considérées dans cette variable sont définies uniquement sur $[0, 1[$. En particulier, les limites et équivalents en 1 sont pris avec $x < 1$.

Preliminaire

Étant données deux suites réelles à termes positifs ou nuls (x_n) et (y_n) , on pose

$$z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0 = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}.$$

(a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n z_k \leq \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \left(\sum_{k=0}^n y_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} z_k.$$

(b) En déduire que, si les séries

$$\sum x_n$$

et

$$\sum y_n$$

convergent et ont pour sommes X et Y , alors

$$\sum z_n$$

converge et a pour somme $Z = XY$.

Partie 1

On considère les suites (u_n) et (J_n) définies par

$$u_0 = 1, \quad u_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k} \quad (n \geq 1),$$

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. (a) Étudier le sens de variation de (J_n) et prouver sa convergence.
1. (b) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} pour $n \geq 2$.
1. (c) Calculer J_0 et J_1 . En déduire les valeurs de J_{2n} et de J_{2n+1} en fonction de u_n .

2. (a) Déduire successivement des résultats précédents les inégalités suivantes :

$$1 \leq \frac{\pi}{2} \frac{u_n^2}{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n} \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

$$0 \leq u_n - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \leq \frac{u_n}{2n+1} \quad (n \geq 0) \quad (2)$$

2. (b) Déduire de (1) un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. (a) Montrer que $\omega : t \mapsto \tan t$ réalise une bijection de $] -\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. On note ψ sa bijection réciproque. Montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. (b) Calculer

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x \cos^2 t}.$$

On pourra poser $\tan t = \sqrt{1-x} \tan u$.

4. (a) Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n J_{2k} x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x \cos^2 t} - x^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x \cos^2 t} dt.$$

4. (b) Établir

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x \cos^2 t} dt \leq \frac{J_{2n+2}}{1 - x}.$$

4. (c) En déduire que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{2n+1}.$$

5. (a) Établir par récurrence que

$$u_n = \sum_{k=0}^n u_k / (2k+1).$$

5. (b) À l'aide du préliminaire, en déduire que

$$\frac{1}{(1-x)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

6. En utilisant les inégalités (2), établir les résultats suivants.

6. (a) La série

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$$

converge.

6. (b) On a

$$x \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1-x)^{3/2}S(x) \leq 1.$$

Donner un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

Partie 2

À toute partie A de $\mathbb{N}$, on associe la suite (a_n) définie par $a_n = 1$ si $n \in A$ et $a_n = 0$ si $n \notin A$.

On pose, sous réserve d'existence,

$$f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad P(A) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f_A(x).$$

1. Prouver que la série définissant $f_A(x)$ converge. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles $P(A)$ existe.
2. Établir les propriétés suivantes.
 2. (a) Si $A \in \mathcal{S}$, alors $0 \leq P(A) \leq 1$.
 2. (b) $\emptyset$ et $\mathbb{N}$ appartiennent à $\mathcal{S}$. Préciser $P(\emptyset)$ et $P(\mathbb{N})$.
 2. (c) Si $A \in \mathcal{S}$, alors son complémentaire $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A$ appartient à $\mathcal{S}$. Préciser $P(\overline{A})$ en fonction de $P(A)$.
 2. (d) Si $A, B \in \mathcal{S}$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $A \cup B \in \mathcal{S}$. Préciser $P(A \cup B)$ en fonction de $P(A)$ et $P(B)$.

3. Montrer que les parties suivantes appartiennent à $\mathcal{S}$ et préciser leur valeur de P .

3. (a) A est une partie finie de $\mathbb{N}$.

3. (b) $A = q\mathbb{N} = \{qk : k \in \mathbb{N}\}$, où q est un entier naturel non nul.

3. (c) $A = q\mathbb{N} + t = \{qk + t : k \in \mathbb{N}\}$, où $q, t \in \mathbb{N}$ et $q \neq 0$.

4. On se propose d'établir que l'ensemble C des carrés d'entiers naturels non nuls appartient à $\mathcal{S}$ et de calculer $P(C)$.

On définit $c_n = 1$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^2 = n$, et $c_n = 0$ sinon. Alors

$$f_C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2}.$$

4. (a) À l'aide du préliminaire, établir

$$\frac{f_C(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor x^n,$$

où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière, c'est-à-dire l'entier tel que $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$.

4. (b) Démontrer

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n - \frac{f_C(x)}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

4. (c) À l'aide de la partie 1, en déduire un équivalent de $f_C(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. Prouver que $C \in \mathcal{S}$ et donner $P(C)$.

5. On admet que l'ensemble D des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls appartient à $\mathcal{S}$. On se propose de majorer $P(D)$.

On définit $d_n = 1$ s'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p^2 + q^2 = n$, et $d_n = 0$ sinon. On pose

$$f_D(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

On note $v(n)$ le nombre de couples ordonnés $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p^2 + q^2 = n$.

5. (a) Établir que

$$(f_C(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) x^n.$$

5. (b) Établir que $f_D(x) \leq (f_C(x))^2$. En déduire un majorant de $P(D)$.

5. (c) En comparant d_n et $v(n)$, montrer plus précisément

$$2f_D(x) \leq (f_C(x))^2 + f_C(x^2).$$

En déduire un nouveau majorant de $P(D)$.