



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1990

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Toutes les séries de fonctions sont étudiées pour un x fixé dans $[0, 1[$. Les limites en 1 sont prises à gauche. On adopte $x^0 = 1$, y compris pour $x = 0$.

Préliminaire

(a) Les termes $x_i y_j$ sont positifs ou nuls. En développant un produit de sommes finies,

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \left(\sum_{j=0}^n y_j \right) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} x_i y_j.$$

D'autre part, regrouper une somme finie selon $i + j$ donne

$$\sum_{k=0}^n z_k = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq n}} x_i y_j, \quad \sum_{k=0}^{2n} z_k = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq 2n}} x_i y_j.$$

L'ensemble des couples $i, j \geq 0$ tels que $i + j \leq n$ est inclus dans le carré $0 \leq i, j \leq n$. Ce carré est lui-même inclus dans l'ensemble des couples tels que $i + j \leq 2n$. La positivité des termes donne donc

$$\sum_{k=0}^n z_k \leq \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \left(\sum_{k=0}^n y_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} z_k.$$

Tout repose sur des sommes finies.

(b) Posons

$$X_n = \sum_{k=0}^n x_k,$$

$$Y_n = \sum_{k=0}^n y_k$$

et

$$Z_n = \sum_{k=0}^n z_k.$$

Les hypothèses donnent $X_n \rightarrow X$, $Y_n \rightarrow Y$, et, par positivité, $0 \leq X_n \leq X$, $0 \leq Y_n \leq Y$.

Par la question (a) du préliminaire,

$$0 \leq Z_n \leq X_n Y_n \leq XY.$$

La suite (Z_n) est croissante, puisque $z_n \geq 0$, et majorée. Elle converge vers un réel Z . La sous-suite (Z_{2n}) converge aussi vers Z . En passant à la limite dans $Z_n \leq X_n Y_n \leq Z_{2n}$, on obtient $Z \leq XY \leq Z$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = Z = XY.$$

La formule du produit de séries à termes positifs est ainsi démontrée dans le cadre nécessaire à la suite.

Partie 1

1. (a) Sur $[0, \pi/2]$, $0 \leq \cos t \leq 1$. Donc $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$ et, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq J_{n+1} \leq J_n.$$

La suite est décroissante et minorée par 0, donc converge par le théorème de la limite monotone. Elle est même strictement décroissante, car la différence des intégrandes est strictement positive sur $]0, \pi/2[$.

On peut aussi préciser la limite sans échanger limite et intégrale. Pour $\delta \in]0, \pi/2[$, on scinde le segment :

$$0 \leq J_n \leq \delta + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) (\cos \delta)^n.$$

Le second terme tend vers 0 puisque $0 < \cos \delta < 1$. La limite de (J_n) est donc au plus δ , pour chaque $\delta > 0$, et vaut 0.

1. (b) Pour $n \geq 2$, écrivons $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t \cos t \, dt$. On intègre par parties sur ce segment, avec une primitive $\sin t$ du second facteur. Les fonctions sont de classe C^1 et le terme de bord est nul : à gauche $\sin 0 = 0$, et à droite $\cos^{n-1}(\pi/2) = 0$.

Ainsi

$$J_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{n-2} t \, dt = (n-1)(J_{n-2} - J_n).$$

On a utilisé $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$. Donc

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

1. (c) Par intégration directe, $J_0 = \pi/2$ et $J_1 = 1$.

Pour $n \geq 1$, la récurrence donne

$$J_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{u_n}{2n+1},$$

$$J_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} = \frac{1}{u_n}.$$

Les deux formules valent aussi pour $n = 0$, en utilisant $u_0 = 1$.

2. (a) Précision des indices : l'encadrement (1), qui divise par $2n$, est utilisé pour $n \geq 1$.

La décroissance de (J_n) donne

$$J_{2n+1} \leq J_{2n} \leq J_{2n-1} \quad (n \geq 1).$$

Or $J_{2n+1} = 1/u_n$, $J_{2n} = (\pi/2)u_n/(2n+1)$, et $J_{2n-1} = 1/u_{n-1}$. Par définition,

$$u_n = \frac{2n+1}{2n} u_{n-1}, \quad \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{2n+1}{2n u_n}.$$

En multipliant les deux comparaisons par $u_n > 0$,

$$1 \leq \frac{\pi}{2} \frac{u_n^2}{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

La première inégalité implique $u_n^2 \geq 2(2n+1)/\pi \geq 4n/\pi$. Les quantités étant positives, $u_n \geq 2\sqrt{n}/\sqrt{\pi}$.

La seconde implique $u_n^2 \leq (2n+1)^2/(\pi n)$, d'où

$$\frac{2n}{2n+1} u_n \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

En réarrangeant, on obtient

$$0 \leq u_n - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \leq \frac{u_n}{2n+1}.$$

Pour $n = 0$, cette dernière inégalité s'écrit $0 \leq 1 \leq 1$, donc reste vraie. Ainsi (2) est valable pour tous les indices $n \geq 0$.

2. (b) Dans (1), les deux bornes tendent vers 1. Par encadrement,

$$\frac{\pi}{2} \frac{u_n^2}{2n+1} \rightarrow 1.$$

Comme $(2n+1)/n \rightarrow 2$, on en déduit $u_n^2/n \rightarrow 4/\pi$. La fonction racine carrée est continue sur les réels positifs et $u_n > 0$, donc

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Ainsi $u_n \sim 2\sqrt{n}/\sqrt{\pi}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. (a) Sur $] -\pi/2, \pi/2[$, le cosinus est strictement positif. La fonction tangente est donc continue, dérivable, et

$$\omega'(t) = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} > 0.$$

Elle est strictement croissante. Ses limites aux deux extrémités sont $-\infty$ et $+\infty$, respectivement. Le théorème de la bijection assure qu'elle réalise une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée ne s'annule pas. Le théorème de dérivation de la réciproque donne donc, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(y) = \frac{1}{\omega'(\psi(y))} = \frac{1}{1+y^2}.$$

La réciproque est l'arctangente ; en particulier $\psi(0) = 0$ et $\psi(y) \rightarrow \pi/2$ lorsque $y \rightarrow +\infty$.

3. (b) Fixons $x \in [0, 1[$ et posons $c = \sqrt{1-x} > 0$. Le dénominateur $1 - x \cos^2 t$ est au moins $1 - x > 0$, donc l'intégrande est continue sur $[0, \pi/2]$.

Utilisons le changement de variable proposé : pour $u \in [0, \pi/2[$, posons $t = \psi(c \tan u)$, soit $\tan t = c \tan u$. Cette application est de classe C^1 , strictement croissante, prend la valeur 0 en 0 et tend vers $\pi/2$ à l'autre extrémité.

À l'aide de I.3.a et de $1 + \tan^2 t = 1/\cos^2 t$,

$$\frac{dt}{du} = \frac{c(1 + \tan^2 u)}{1 + c^2 \tan^2 u},$$

$$1 - x \cos^2 t = 1 - \frac{x}{1 + c^2 \tan^2 u} = \frac{c^2(1 + \tan^2 u)}{1 + c^2 \tan^2 u}.$$

Ainsi le quotient de la dérivée par ce dénominateur vaut $1/c$. Pour chaque $U < \pi/2$, le changement de variable sur un segment donne

$$\int_0^{\psi(c \tan U)} \frac{dt}{1 - x \cos^2 t} = \frac{U}{c}.$$

En faisant tendre U vers $\pi/2$, la continuité de l'intégrande sur le segment entier donne

$$I(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}.$$

Le calcul vaut aussi pour $x = 0$, où le changement de variable est l'identité.

4. (a) Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq x \cos^2 t < 1$. La somme géométrique finie donne

$$\sum_{k=0}^n x^k \cos^{2k} t = \frac{1 - (x \cos^2 t)^{n+1}}{1 - x \cos^2 t}.$$

En intégrant cette égalité et en utilisant seulement la linéarité d'une somme finie,

$$\sum_{k=0}^n J_{2k} x^k = I(x) - x^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x \cos^2 t} dt.$$

C'est l'identité demandée.

4. (b) Puisque $1 - x \cos^2 t \geq 1 - x > 0$,

$$0 \leq \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x \cos^2 t} \leq \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x}.$$

La croissance de l'intégrale donne

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x \cos^2 t} dt \leq \frac{J_{2n+2}}{1 - x}.$$

4. (c) Pour x fixé, $J_{2n+2} \leq J_0 = \pi/2$. Donc le reste de I.4.a vérifie

$$0 \leq x^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2} t}{1 - x \cos^2 t} dt \leq \frac{\pi x^{n+1}}{2(1 - x)} \rightarrow 0.$$

On utilise $x^{n+1} \rightarrow 0$ pour $0 \leq x < 1$, ce qui inclut $x = 0$. Les sommes partielles convergent donc vers $I(x)$. En remplaçant J_{2k} par $(\pi/2)u_k/(2k+1)$ et $I(x)$ par la formule de I.3.b, puis en divisant par $\pi/2 > 0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

La convergence et le passage à la limite ont été prouvés par une majoration du reste, sans intégrer une série infinie terme à terme.

5. (a) Méthode 1 — Récurrence demandée.

Pour $n = 0$, l'égalité est $u_0 = u_0/1 = 1$. Supposons-la vraie à l'indice n . Comme $u_{n+1} = (2n+3)u_n/(2n+2)$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2n+2} = \frac{u_{n+1}}{2n+3}.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_k}{2k+1} = u_n + \frac{u_{n+1}}{2n+3} = u_{n+1}.$$

La propriété est établie par récurrence.

Méthode 2 — Somme télescopique.

Pour $k \geq 1$, la même relation entre deux termes successifs donne

$u_k - u_{k-1} = u_k/(2k+1)$. Donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{2k+1} = 1 + \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n.$$

Pour $n = 0$, la somme télescopique est vide et la formule est encore vraie. Cette méthode met en évidence les différences successives à l'origine de l'identité.

5. (b) Fixons $x \in [0, 1[$. Les séries à termes positifs ou nuls

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k x^k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$$

convergent. On peut donc appliquer le préliminaire, question (b), à leurs termes. Le coefficient du produit à l'indice n vaut

$$\sum_{k=0}^n \frac{u_k x^k}{2k+1} x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{2k+1} = u_n x^n.$$

La dernière égalité est I.5.a. Le préliminaire prouve à la fois la convergence de la série obtenue et l'identité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{3/2}}.$$

6. Étude de la série $S(x)$.

6. (a) Par (2), pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq \sqrt{n} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_n.$$

Après multiplication par $x^n \geq 0$, la série majorante converge par I.5.b. La comparaison des séries à termes positifs montre donc que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$$

converge pour tout $x \in [0, 1[$. En particulier, $S(0) = 0$.

6. (b) Multiplions (2) par x^n et sommons d'abord jusqu'à un indice fini. Les trois séries concernées convergent par I.4.c, I.5.b et I.6.a; on peut donc passer à la limite dans les inégalités pour obtenir

$$0 \leq \frac{1}{(1-x)^{3/2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} S(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Ainsi

$$\frac{x}{(1-x)^{3/2}} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} S(x) \leq \frac{1}{(1-x)^{3/2}}.$$

En multipliant par $(1-x)^{3/2} > 0$, on obtient exactement

$$x \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1-x)^{3/2} S(x) \leq 1.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, les deux bornes tendent vers 1. Par encadrement,

$$S(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{3/2}}.$$

Cette démonstration ne déduit pas un équivalent de série du seul équivalent des coefficients; elle utilise un encadrement explicite fourni par (2).

Partie 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1[$, on a $0 \leq a_n x^n \leq x^n$, avec la convention $x^0 = 1$, y compris pour $x = 0$.

La série géométrique de raison x converge et sa somme est $1/(1-x)$. Par comparaison des séries à termes positifs, la série définissant $f_A(x)$ converge, quelle que soit la partie A de $\mathbb{N}$, et

$$0 \leq f_A(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Cela ne prouve pas encore l'existence de la limite définissant $P(A)$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties pour lesquelles cette limite existe.

2. Propriétés de P .

2. (a) En multipliant l'encadrement de II.1 par $1-x > 0$, on obtient

$$0 \leq (1-x)f_A(x) \leq 1.$$

Si $A \in \mathcal{S}$, le passage à la limite lorsque $x \rightarrow 1^-$ donne

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. (b) Tous les coefficients associés à $\emptyset$ sont nuls, donc $f_{\emptyset}(x) = 0$. Tous ceux associés à $\mathbb{N}$ valent 1, donc $f_{\mathbb{N}}(x) = 1/(1-x)$. Par conséquent,

$$(1-x)f_{\emptyset}(x) = 0, \quad (1-x)f_{\mathbb{N}}(x) = 1.$$

Les deux limites existent : $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{S}$, avec

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\mathbb{N}) = 1.$$

2. (c) L'indicatrice de $\bar{A}$ a pour coefficient $1 - a_n$. En soustrayant les sommes partielles puis en passant à la limite, toutes les séries concernées étant convergentes, on trouve

$$f_{\bar{A}}(x) = \frac{1}{1-x} - f_A(x).$$

Ainsi $(1-x)f_{\bar{A}}(x) = 1 - (1-x)f_A(x)$. Si $A \in \mathcal{S}$, le membre de droite tend vers $1 - P(A)$. Il en résulte

$$\bar{A} \in \mathcal{S}, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

2. (d) Puisque $A \cap B = \emptyset$, pour tout n l'indicatrice de $A \cup B$ est la somme des indicatrices de A et B . La même égalité vaut pour les sommes partielles, puis pour les sommes des séries :

$$f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x).$$

Après multiplication par $1-x$, les deux termes de droite possèdent une limite, car $A, B \in \mathcal{S}$. Ainsi

$$A \cup B \in \mathcal{S}, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

3. Exemples de parties appartenant à $\mathcal{S}$.

3. (a) Si A est fini,

$$f_A(x) = \sum_{n \in A} x^n$$

est un polynôme. Lorsque $x \rightarrow 1^-$, chacun de ses termes tend vers 1 ; sa limite est donc le cardinal de A . En particulier, $f_A(x)$ reste borné au voisinage de 1, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f_A(x) = 0.$$

Ainsi toute partie finie A appartient à $\mathcal{S}$ et $P(A) = 0$. Le raisonnement inclut $A = \emptyset$.

3. (b) Les éléments de $q\mathbb{N}$ sont $0, q, 2q, \dots$, tous distincts puisque $q \geq 1$. Les sommes

partielles de la série indicatrice conduisent donc à la série géométrique

$$f_{q\mathbb{N}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{qk} = \frac{1}{1-x^q}.$$

Pour $x \in [0, 1[$, la factorisation $1 - x^q = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{q-1})$ donne

$$(1 - x)f_{q\mathbb{N}}(x) = \frac{1}{1 + x + \dots + x^{q-1}}.$$

Le dénominateur tend vers q , qui est non nul. Par conséquent,

$$q\mathbb{N} \in \mathcal{S}, \quad P(q\mathbb{N}) = \frac{1}{q}.$$

Pour $q = 1$, le dénominateur est simplement 1, ce qui retrouve $P(\mathbb{N}) = 1$.

3. (c) Les éléments de $q\mathbb{N} + t$ sont exactement $t, q + t, 2q + t, \dots$, tous distincts. Ainsi

$$f_{q\mathbb{N}+t}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{qk+t} = \frac{x^t}{1-x^q}.$$

On en déduit

$$(1 - x)f_{q\mathbb{N}+t}(x) = \frac{x^t}{1 + x + \dots + x^{q-1}}.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, $x^t \rightarrow 1$, y compris si $t = 0$, et le dénominateur tend vers q . Donc

$$q\mathbb{N} + t \in \mathcal{S}, \quad P(q\mathbb{N} + t) = \frac{1}{q}.$$

4. Carrés d'entiers naturels non nuls.

4. (a) Pour un indice N , les coefficients non nuls de

$$\sum_{n=0}^N c_n x^n$$

correspondent exactement aux carrés $k^2 \leq N$, avec $k \geq 1$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^N c_n x^n = \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} x^{k^2}.$$

En passant à la limite, on retrouve

$$f_C(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2}.$$

Appliquons le préliminaire aux deux séries à termes positifs

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n$$

et

$$\sum_{n \geq 0} x^n,$$

qui convergent par II.1 et par la formule de la série géométrique. Leur produit est la somme d'une série dont le terme d'indice n vaut

$$\sum_{k=0}^n c_k x^k x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^n c_k.$$

Or

$$\sum_{k=0}^n c_k$$

compte les carrés d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n . Ils sont $1^2, 2^2, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$, donc leur nombre est $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Par conséquent,

$$\frac{f_C(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor x^n.$$

Le préliminaire justifie également la convergence de cette dernière série.

4. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la définition de la partie entière donne

$$0 \leq \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < 1.$$

Multiplions par $x^n \geq 0$, puis sommons jusqu'à un indice fini. Les séries

$$\sum \sqrt{n} x^n,$$

$$\sum \lfloor \sqrt{n} \rfloor x^n$$

et

$$\sum x^n$$

convergent respectivement par I.6.a, II.4.a et la formule géométrique. On peut donc passer à la limite dans les inégalités de sommes partielles, ce qui donne

$$0 \leq S(x) - \frac{f_C(x)}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

4. (c) D'après I.6.b,

$$S(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{3/2}} \quad (x \rightarrow 1^-).$$

Pour $x > 0$, $S(x) \geq x > 0$. L'encadrement de II.4.b peut donc être divisé par $S(x)$:

$$0 \leq 1 - \frac{f_C(x)}{(1-x)S(x)} \leq \frac{1}{(1-x)S(x)}.$$

Or $(1-x)S(x) \sim \sqrt{\pi}/(2\sqrt{1-x})$, et cette dernière expression tend vers $+\infty$. Le membre de droite tend donc vers 0. Par encadrement,

$$\frac{f_C(x)}{(1-x)S(x)} \rightarrow 1.$$

Il en résulte

$$f_C(x) \sim (1-x)S(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Enfin,

$$(1-x)f_C(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-x} \rightarrow 0.$$

La limite définissant $P(C)$ existe donc, et

$$C \in \mathcal{S}, \quad P(C) = 0.$$

5. Sommes de deux carrés d'entiers naturels non nuls.

L'appartenance de D à $\mathcal{S}$ est admise dans l'énoncé d'origine. On utilise cette hypothèse pour passer à la limite dans les deux majorations qui suivent.

5. (a) Pour chaque n , le nombre $v(n)$ est fini : toute représentation $p^2 + q^2 = n$ impose $1 \leq p, q \leq \sqrt{n}$.

Appliquons le préliminaire à deux exemplaires de la série convergente à termes positifs

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n.$$

Il donne

$$(f_C(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \right) x^n.$$

Le produit $c_k c_{n-k}$ vaut 1 exactement lorsque $k = p^2$ et $n - k = q^2$ pour deux entiers $p, q \geq 1$. Chaque k de cette sorte définit un unique couple ordonné (p, q) , puisque la racine carrée positive est unique. Réciproquement, chaque couple ordonné représentant n fournit un tel $k = p^2$.

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} = v(n),$$

et

$$(f_C(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)x^n.$$

La convergence de cette série est elle aussi assurée par le préliminaire.

5. (b) Si $d_n = 0$, il n'existe aucune représentation et $v(n) = 0$. Si $d_n = 1$, il en existe au moins une et $v(n) \geq 1$. Dans les deux cas, $d_n \leq v(n)$.

Après multiplication par $x^n \geq 0$ et sommation, la convergence des séries permet d'obtenir

$$f_D(x) \leq (f_C(x))^2.$$

En utilisant l'équivalent de II.4.c, on a

$$(1-x)(f_C(x))^2 \rightarrow \frac{\pi}{4}.$$

En effet, le carré du rapport entre $f_C(x)$ et $\sqrt{\pi}/(2\sqrt{1-x})$ tend vers 1. Multiplions l'inégalité par $1-x > 0$, puis passons à la limite, dont l'existence à gauche est admise :

$$P(D) \leq \frac{\pi}{4}.$$

Avec II.2.a, cela donne $0 \leq P(D) \leq \pi/4$.

5. (c) Définissons $r_n = 1$ si $n = 2p^2$ pour un entier $p \geq 1$, et $r_n = 0$ sinon. Il compte les représentations diagonales (p, p) de n : il y en a au plus une.

Montrons que $2d_n \leq v(n) + r_n$.

Si $d_n = 0$, alors $v(n) = r_n = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Si $d_n = 1$ et $r_n = 1$, la représentation diagonale donne $v(n) \geq 1$, donc $v(n) + r_n \geq 2 = 2d_n$.

Si $d_n = 1$ et $r_n = 0$, il existe une représentation (p, q) avec $p \neq q$. Les deux couples ordonnés distincts (p, q) et (q, p) sont alors comptés dans $v(n)$, donc $v(n) \geq 2 = 2d_n$.

L'inégalité est ainsi établie pour chaque n . La série associée à (r_n) est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n x^n = \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p^2} = f_C(x^2),$$

car $x^2 \in [0, 1[$. En multipliant l'inégalité sur les coefficients par x^n puis en sommant, on obtient

$$2f_D(x) \leq (f_C(x))^2 + f_C(x^2).$$

Il reste à évaluer le second terme après multiplication par $1 - x$. D'après II.4.c,

$(1 - y)f_C(y) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow 1^-$. Comme $x^2 \rightarrow 1^-$ lorsque $x \rightarrow 1^-$,

$$(1 - x)f_C(x^2) = \frac{(1 - x^2)f_C(x^2)}{1 + x} \rightarrow 0.$$

Le premier terme tend vers $\pi/4$, comme en II.5.b. L'existence de $P(D)$ étant admise, le passage à la limite donne

$$2P(D) \leq \frac{\pi}{4}.$$

Le nouveau majorant est donc

$$P(D) \leq \frac{\pi}{8},$$

et l'on a finalement $0 \leq P(D) \leq \pi/8$.

Relevé des adaptations

Partie 1, question 2.a. Le domaine des indices a été explicité : l'inégalité (1), qui contient une division par $2n$, est valable pour $n \geq 1$; l'inégalité (2) est valable pour $n \geq 0$, son cas $n = 0$ étant vérifié séparément. La rédaction originale ne précisait pas ces domaines à cet endroit.