



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1989

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le problème a pour objet l'étude d'un procédé d'approximation de la fonction exponentielle, notée aussi $\exp$, par des fractions rationnelles.

Partie I : Étude d'une suite de polynômes

Pour tout entier naturel n , on note E_n l'ensemble des fonctions numériques f indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$4xf''(x) - 8nf'(x) - xf(x) = 0.$$

1. Montrer que la fonction f_0 définie par $f_0(x) = \exp(x/2)$ appartient à E_0 .
2. Étant donné un élément f_n de E_n , on note f_{n+1} la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{n+1}(x) = 2((2n+1)f_n(x) - xf'_n(x)). \quad (1)$$

Montrer que :

(a) $f'_{n+1}(x) = -\frac{x}{2}f_n(x).$

(b) $f_{n+1} \in E_{n+1}.$

3. On définit à partir de la fonction f_0 donnée en I.1 et de la relation (1) une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n , f_n appartienne à E_n .

(a) Expliciter f_1 .

(b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x :

$$f_{n+1}(x) = 2(2n+1)f_n(x) + x^2f_{n-1}(x). \quad (2)$$

4. Pour tout entier naturel n , on note P_n la fonction définie, pour tout réel x , par :

$$P_n(x) = f_n(x)e^{-x/2}.$$

(a) Expliciter P_0 et P_1 .

(b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x :

$$P_{n+1}(x) = 2(2n+1)P_n(x) + x^2 P_{n-1}(x). \quad (3)$$

En déduire, pour tout entier naturel n :

- que $P_n(x)$ est strictement positif pour $x < 2$;
- que P_n est un polynôme à coefficients entiers, dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré;
- la valeur de $P_n(0)$.

Partie II : Étude d'une suite de rationnels

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel et l'on pose, pour tout réel x non racine de P_n :

$$u_n(x) = \frac{P_n(-x)}{P_n(x)}.$$

En particulier, u_n est au moins définie sur $] -\infty, 2[$.

1. Étude numérique d'un exemple.

(a) Écrire en Python un algorithme de calcul des n premiers termes $P_0(x), \dots, P_{n-1}(x)$, pour $n \geq 1$ et une valeur donnée du réel x .

(b) Utiliser cet algorithme pour calculer, pour $0 \leq k \leq 8$, les valeurs exactes de $P_k(1)$ et $P_k(-1)$, et des valeurs approchées de $u_k(1)$, que l'on affichera avec douze décimales. Les résultats figureront dans un tableau.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite $(u_n(1))$?

2. Étude d'une fonction auxiliaire.

On désigne par g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = (-1)^n (f_n(x) - f_n(-x)).$$

(a) Établir que, pour x non racine de P_n :

$$u_n(x) - e^x = (-1)^{n+1} \frac{e^{x/2} g_n(x)}{P_n(x)}. \quad (4)$$

(b) Montrer que g_n est impaire et prouver que, pour tout réel x :

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x t g_n(t) dt.$$

(c) En déduire, par récurrence sur n , que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$0 \leq g_n(x) \leq \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \frac{e^{x/2}}{n!}.$$

3. Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x \leq 0$.

(a) À l'aide de la relation (3), montrer par récurrence sur n que, pour $x \leq 0$:

$$P_n(x) \geq P_n(0).$$

(b) Déduire des résultats précédents que, pour tout réel $x \leq 0$:

$$|u_n(x) - e^x| \leq \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n.$$

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ pour $x \leq 0$.

4. Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $0 \leq x < 2$.

Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ pour $0 \leq x < 2$ et en déduire la limite de $(u_n(x))$ dans ce cas.

Dans la suite de cette partie, on étudie la suite $(u_n(x))$ pour x supérieur ou égal à 2.

5. Variations de f_n .

(a) Prouver, d'abord pour $x \leq 0$, puis en utilisant g_n pour $x > 0$, que, si n est pair, alors $f_n(x) > 0$.

(b) Utiliser l'expression de $f'_{n+1}(x)$ en fonction de f_n obtenue en I.2(a) pour étudier les variations de f_n pour $n \geq 1$. On commencera par l'étude de f_{2p+1} .

6. Étude des racines de P_n .

(a) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ n'a pas de solution si n est pair et en possède une et une seule, notée a_p , si $n = 2p + 1$.

(b) Montrer, en utilisant (2) et les variations de f_{2p+1} , que la suite (a_p) est strictement croissante.

(c) Montrer que la suite (a_p) diverge et tend vers $+\infty$. On pourra raisonner par l'absurde en considérant la suite $(u_{2p+1}(-L))$ avec $L = \lim_{p \rightarrow +\infty} a_p$.

7. Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x \geq 2$.

(a) Montrer que, pour tout réel $x \geq 2$, il existe un entier p_x tel que, pour $n \geq 2p_x$, $u_n(x)$ existe et soit strictement positif.

On n'étudie désormais la suite $(u_n(x))$ que pour $n \geq 2p_x$.

(b) Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ pour $x \geq 2$ et en déduire la limite de $(u_n(x))$ dans ce cas.

Partie III : Vitesse de convergence de la suite $(u_n(x))$

1. Équivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(a) On suppose $n \geq 1$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f_n sur $[x, 0]$, établir que, pour $x \leq 0$:

$$0 \leq P_n(0) - P_n(x)e^{x/2} \leq \frac{x^2}{2}P_{n-1}(0).$$

(b) En déduire que, pour tout réel x fixé, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$P_n(x) \sim P_n(0)e^{-x/2}.$$

On commencera par le cas $x \leq 0$ et on l'étendra au cas $x > 0$ à l'aide de $u_n(x)$.

2. Majoration de $|u_n(x) - \exp(x)|$.

(a) Déduire de la relation (4) que, pour tout réel x tel que $P_n(x)P_{n+1}(x) > 0$:

$$|u_n(x) - e^x| \leq |u_{n+1}(x) - u_n(x)|.$$

(b) Déduire de la relation (3) que, pour tout réel x :

$$P_{n+1}(-x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(-x) = 2(-1)^n x^{2n+1}.$$

(c) En déduire que, pour tout réel x tel que $P_n(x)P_{n+1}(x) > 0$:

$$|u_n(x) - e^x| \leq \frac{2|x|^{2n+1}}{P_n(x)P_{n+1}(x)}.$$

(d) Donner un majorant de l'erreur commise en II.1(b) en prenant $u_7(1)$ comme valeur approchée du nombre e .

3. Équivalent de $u_n(x) - \exp(x)$.

Déduire des résultats précédents, pour tout réel non nul x fixé :

(a) Un équivalent de $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x) - u_n(x)} = 0.$$

(c) Que, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n(x) - e^x \sim (-1)^{n+1} \frac{e^x x^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)((2n)!)^2}.$$