



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1989

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : Étude d'une suite de polynômes

1. Appartenance de f_0 à E_0 .

La fonction $f_0(x) = e^{x/2}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Ses deux premières dérivées sont $f'_0(x) = e^{x/2}/2$ et $f''_0(x) = e^{x/2}/4$.

Pour tout réel x , $4xf''_0(x) - xf_0(x) = xe^{x/2} - xe^{x/2} = 0$. L'équation définissant E_0 est donc satisfaite sur tout $\mathbb{R}$, y compris en 0.

$$f_0 \in E_0.$$

2. Passage de E_n à E_{n+1} .

(a) Dérivée de f_{n+1} .

La fonction $f_{n+1} = 2((2n+1)f_n - xf'_n)$ est indéfiniment dérivable puisque f_n l'est. En dérivant le produit xf'_n :

$$f'_{n+1}(x) = 2((2n+1)f'_n(x) - f'_n(x) - xf''_n(x)) = 4nf'_n(x) - 2xf''_n(x).$$

Comme $f_n \in E_n$, on a $4xf''_n(x) - 8nf'_n(x) = xf_n(x)$. En multipliant cette identité par $-1/2$, on obtient :

$$4nf'_n(x) - 2xf''_n(x) = -\frac{x}{2}f_n(x).$$

Donc $f'_{n+1}(x) = -xf_n(x)/2$. Aucune division par x n'a été effectuée : l'identité vaut aussi en 0.

(b) Appartenance à E_{n+1} .

D'après la question précédente :

$$f''_{n+1}(x) = -\frac{1}{2}f_n(x) - \frac{x}{2}f'_n(x).$$

En utilisant cette expression, celle de f'_{n+1} et la définition de f_{n+1} , on calcule :

$$4xf_{n+1}''(x) - 8(n+1)f_{n+1}'(x) - xf_{n+1}(x)$$

$$= -2xf_n(x) - 2x^2f_n'(x) + 4(n+1)xf_n(x) - 2(2n+1)xf_n(x) + 2x^2f_n'(x) = 0.$$

Les termes en f_n' se compensent, et le coefficient de xf_n est $-2 + 4(n+1) - 2(2n+1) = 0$. La fonction f_{n+1} est indéfiniment dérivable et satisfait l'équation requise pour tout réel x .

$$f_{n+1} \in E_{n+1}.$$

3. Premiers termes et récurrence à deux termes.

(a) Expression de f_1 .

La relation (1) au rang 0 donne :

$$f_1(x) = 2(f_0(x) - xf_0'(x)) = 2\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{x/2} = (2-x)e^{x/2}.$$

(b) Relation (2).

Pour $n \geq 1$, I.2(a) appliquée au rang $n-1$ donne $f_n'(x) = -xf_{n-1}(x)/2$. En remplaçant cette dérivée dans (1) :

$$f_{n+1}(x) = 2(2n+1)f_n(x) - 2x\left(-\frac{x}{2}f_{n-1}(x)\right) = 2(2n+1)f_n(x) + x^2f_{n-1}(x).$$

L'identité est valable pour tout réel x et tout $n \geq 1$.

4. Étude des polynômes P_n .

(a) Premiers termes.

En multipliant les expressions de f_0 et f_1 par $e^{-x/2}$:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 2 - x.$$

(b) Récurrence, positivité, degré et valeur en 0.

La multiplication de (2) par $e^{-x/2}$ donne, pour $n \geq 1$:

$$P_{n+1}(x) = 2(2n+1)P_n(x) + x^2P_{n-1}(x).$$

Positivité pour $x < 2$.

Fixons $x < 2$. On a $P_0(x) = 1 > 0$ et $P_1(x) = 2 - x > 0$. Si $P_{n-1}(x) > 0$ et $P_n(x) > 0$, le premier terme de la récurrence est strictement positif, et le second est positif ou nul.

Ainsi $P_{n+1}(x) > 0$.

La récurrence donne $P_n(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x < 2$.

Coefficients, degré et terme dominant.

Les deux premiers termes sont des polynômes à coefficients entiers, de degrés respectifs 0 et 1, avec coefficients dominants 1 et -1 . Supposons P_{n-1} de degré $n-1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n-1}$, et P_n de degré n .

Le terme $2(2n+1)P_n$ est de degré n , tandis que x^2P_{n-1} est de degré $n+1$, avec coefficient dominant $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$. Ce dernier coefficient ne peut pas être annulé par le premier terme, de degré inférieur.

Les coefficients restent entiers par somme et produit de polynômes à coefficients entiers. Par récurrence :

$$\deg P_n = n, \quad \text{coefficient dominant de } P_n = (-1)^n.$$

Valeur en 0.

Posons $C_n = P_n(0)$. La récurrence donne $C_0 = 1$ et $C_{n+1} = 2(2n+1)C_n$, la formule étant également vraie pour $n = 0$ puisque $C_1 = 2$.

Pour $n \geq 1$, on obtient :

$$C_n = 2^n \prod_{j=1}^n (2j-1) = 2^n \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Cette expression vaut aussi pour $n = 0$. En particulier, $C_n > 0$ pour tout n .

Partie II : Étude d'une suite de rationnels

1. Étude numérique d'un exemple.

(a) Algorithme de calcul.

Question adaptée au programme actuel : l'algorithme est demandé en Python, et les n premiers termes sont explicitement $P_0(x), \dots, P_{n-1}(x)$.

On initialise les deux premiers termes, puis on utilise (3). Une liste permet de conserver les valeurs précédentes. Le code ne nécessite aucun import.

Python

```
def valeurs_polynomes(n, x):
    P = [0] * n
    P[0] = 1
    if n >= 2:
        P[1] = 2 - x
    for k in range(1, n - 1):
        P[k + 1] = 2 * (2 * k + 1) * P[k] + x**2 * P[k - 1]
    return P
```

Cette fonction suppose $n \geq 1$, comme l'énoncé. Pour $n = 1$, elle renvoie seulement $[1]$; pour $n = 2$, elle renvoie les deux valeurs initiales. La borne supérieure de range est exclue : le dernier indice calculé par la boucle est bien $n - 1$.

Pour $x = 1$ ou $x = -1$ donné comme entier Python, toutes les opérations restent des opérations sur des entiers et les valeurs de P_k sont obtenues exactement. Pour un x

représenté par un flottant, les résultats sont numériques.

Le code a été exécuté, notamment pour les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 9$.

(b) Tableau des valeurs et conjecture.

Question adaptée au programme actuel : le calcul numérique est effectué en Python et les quotients sont affichés avec douze décimales. Les colonnes des polynômes contiennent des valeurs entières exactes.

Voici le programme complet produisant les lignes du tableau, avant l'arrondi d'affichage des quotients :

Python

```
def valeurs_polynomes(n, x):  
    P = [0] * n  
    P[0] = 1  
    if n >= 2:  
        P[1] = 2 - x  
    for k in range(1, n - 1):  
        P[k + 1] = 2 * (2 * k + 1) * P[k] + x**2 * P[k - 1]  
    return P  
  
def tableau_exemple():  
    P_plus = valeurs_polynomes(9, 1)  
    P_moins = valeurs_polynomes(9, -1)  
    tableau = [0] * 9  
    for k in range(9):  
        tableau[k] = [k, P_plus[k], P_moins[k], P_moins[k] / P_plus[k]]  
    return tableau
```

Ce code a été exécuté. Aucun dénominateur n'est nul, puisque $1 < 2$ et I.4(b) donne $P_k(1) > 0$.

k	$P_k(1)$	$P_k(-1)$	$u_k(1)$ approché
0	1	1	1,000000000000
1	1	3	3,000000000000
2	7	19	2,714285714286
3	71	193	2,718309859155
4	1001	2721	2,718281718282
5	18089	49171	2,718281828736
6	398959	1084483	2,718281828459
7	10391023	28245729	2,718281828459
8	312129649	848456353	2,718281828459

Les valeurs suggèrent $u_n(1) \rightarrow e$. La convergence sera démontrée aux questions suivantes ; l'observation numérique seule ne constitue pas une preuve.

2. Étude d'une fonction auxiliaire.

(a) Expression de l'erreur.

Pour x non racine de P_n , les quotients suivants sont définis. Comme $P_n(x) = e^{-x/2} f_n(x)$ et $P_n(-x) = e^{x/2} f_n(-x)$:

$$u_n(x) - e^x = \frac{e^{x/2} f_n(-x) - e^x e^{-x/2} f_n(x)}{P_n(x)}.$$

Le numérateur est $e^{x/2}(f_n(-x) - f_n(x)) = (-1)^{n+1} e^{x/2} g_n(x)$. Ainsi :

$$u_n(x) - e^x = (-1)^{n+1} \frac{e^{x/2} g_n(x)}{P_n(x)}.$$

(b) Parité et relation intégrale.

Par définition :

$$g_n(-x) = (-1)^n(f_n(-x) - f_n(x)) = -g_n(x).$$

La fonction g_n est donc impaire, et $g_n(0) = 0$.

En dérivant g_{n+1} , il faut tenir compte du signe dû à l'argument $-x$:

$$g'_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}(f'_{n+1}(x) + f'_{n+1}(-x)).$$

L'identité de I.2(a) fournit $f'_{n+1}(x) = -xf_n(x)/2$ et $f'_{n+1}(-x) = xf_n(-x)/2$. Donc :

$$g'_{n+1}(x) = \frac{x}{2}(-1)^n(f_n(x) - f_n(-x)) = \frac{x}{2}g_n(x).$$

Les fonctions sont continues et indéfiniment dérivables. Le théorème fondamental du calcul intégral, avec $g_{n+1}(0) = 0$, donne pour tout réel x :

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x t g_n(t) dt.$$

La formule reste valable pour $x < 0$ avec l'orientation usuelle de l'intégrale.

(c) Majoration de g_n sur les réels positifs ou nuls.

Au rang 0, $g_0(x) = e^{x/2} - e^{-x/2}$. Pour $x \geq 0$, cette différence est positive ou nulle et au plus $e^{x/2}$.

Supposons que, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq g_n(t) \leq (t^2/4)^n e^{t/2}/n!$. Pour $0 \leq t \leq x$, l'exponentielle est croissante, donc $e^{t/2} \leq e^{x/2}$. La relation intégrale donne :

$$0 \leq g_{n+1}(x) \leq \frac{e^{x/2}}{2 \cdot 4^n n!} \int_0^x t^{2n+1} dt.$$

En calculant l'intégrale :

$$\frac{e^{x/2}}{2 \cdot 4^n n!} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+1} \frac{e^{x/2}}{(n+1)!}.$$

La récurrence fournit pour tous $n \geq 0$ et $x \geq 0$:

$$0 \leq g_n(x) \leq \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \frac{e^{x/2}}{n!}.$$

À $x = 0$, on a directement $g_n(0) = 0$. Pour $x > 0$, on a même $g_n(x) > 0$: c'est vrai pour g_0 et se propage par l'intégrale d'une fonction strictement positive sur $]0, x]$.

3. Convergence pour $x \leq 0$.

(a) Minoration des polynômes par leur valeur en 0.

Fixons $x \leq 0$. On a $P_0(x) = P_0(0) = 1$ et $P_1(x) = 2 - x \geq 2 = P_1(0)$.

Supposons $P_n(x) \geq C_n$ et $P_{n-1}(x) \geq C_{n-1} > 0$. La relation (3) donne :

$$P_{n+1}(x) = 2(2n+1)P_n(x) + x^2P_{n-1}(x) \geq 2(2n+1)C_n = C_{n+1}.$$

La récurrence conclut que $P_n(x) \geq P_n(0) = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \leq 0$.

(b) Première majoration de l'erreur.

Pour $x \leq 0$, la parité de g_n et II.2(c) donnent, avec $t = -x \geq 0$:

$$|g_n(x)| = g_n(-x) \leq \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \frac{e^{-x/2}}{n!}.$$

Comme $P_n(x) \geq C_n > 0$, la relation (4) est utilisable. En prenant sa valeur absolue :

$$|u_n(x) - e^x| \leq \frac{e^{x/2}}{C_n} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \frac{e^{-x/2}}{n!} = \frac{1}{n!C_n} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n.$$

Or $n!C_n = (2n)!$. On obtient donc :

$$|u_n(x) - e^x| \leq \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n.$$

En $x = 0$, on a plus précisément $u_n(0) = 1 = e^0$ pour tous les n , donc l'erreur est nulle.

(c) Limite pour $x \leq 0$.

Fixons $x \leq 0$ et posons $a = x^2/4 \geq 0$. Puisque $(2n)! \geq n!$, la borne précédente donne :

$$0 \leq |u_n(x) - e^x| \leq \frac{a^n}{(2n)!} \leq \frac{a^n}{n!}.$$

La série exponentielle

$$\sum_{n \geq 0} a^n / n!$$

converge. Son terme général tend donc vers 0. Le théorème d'encadrement donne $|u_n(x) - e^x| \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = e^x \quad (x \leq 0).$$

4. Convergence pour $0 \leq x < 2$.

Pour $0 \leq x < 2$, les deux nombres $P_n(x)$ et $P_n(-x)$ sont strictement positifs, par I.4(b). Ainsi $u_n(x)$ et $u_n(-x)$ sont définis et non nuls, et :

$$u_n(x)u_n(-x) = \frac{P_n(-x)}{P_n(x)} \frac{P_n(x)}{P_n(-x)} = 1.$$

Donc $u_n(x) = 1/u_n(-x)$. D'après II.3(c), $u_n(-x) \rightarrow e^{-x} > 0$. La continuité de l'inverse sur les réels non nuls donne :

$$u_n(x) \rightarrow \frac{1}{e^{-x}} = e^x.$$

La conclusion comprend $x = 0$, où tous les termes valent 1.

5. Variations de f_n .

(a) Positivité des fonctions d'indice pair.

Pour tout n et tout $x \leq 0$, I.4(b) donne $P_n(x) > 0$. Comme $f_n(x) = P_n(x)e^{x/2}$ et l'exponentielle est strictement positive, on a $f_n(x) > 0$ sur ce demi-axe.

Supposons maintenant n pair et $x > 0$. Par définition de g_n , puisque $(-1)^n = 1$:

$$f_n(x) = f_n(-x) + g_n(x).$$

Le premier terme est strictement positif par le cas précédent, et le second est positif ou nul par II.2(c). Donc $f_n(x) > 0$.

On conclut que $f_{2p}(x) > 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Variations selon la parité de l'indice.

Avant de dresser les tableaux, précisons les limites. On a $f_n(x) = P_n(x)e^{x/2}$, où P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, l'exponentielle tend vers 0 plus vite qu'une puissance ne croît ; ainsi $f_n(x) \rightarrow 0$, avec des valeurs positives sur ce demi-axe.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le terme dominant du polynôme donne $f_{2p}(x) \rightarrow +\infty$ et $f_{2p+1}(x) \rightarrow -\infty$.

Indices impairs.

On a $f'_{2p+1}(x) = -xf_{2p}(x)/2$. La fonction f_{2p} est strictement positive sur tout $\mathbb{R}$ par II.5(a). La dérivée est donc strictement positive pour $x < 0$ et strictement négative pour $x > 0$, avec $f'_{2p+1}(0) = 0$.

x	$] -\infty, 0[$	0	$] 0, +\infty[$
$f'_{2p+1}(x)$	+	0	—
f_{2p+1}	croît depuis 0	maximum C_{2p+1}	décroît vers $-\infty$

Comme $C_{2p+1} > 0$, la continuité et la stricte décroissance sur $[0, +\infty[$ assurent un unique zéro positif. Notons-le dès maintenant a_p , notation utilisée en II.6. La fonction est positive pour $x < a_p$, nulle en a_p , et négative pour $x > a_p$.

Indices pairs non nuls.

Soit $n = 2p$ avec $p \geq 1$. On a $f'_{2p}(x) = -xf_{2p-1}(x)/2$, et f_{2p-1} possède l'unique zéro $a_{p-1} > 0$ qui vient d'être établi.

Pour $x < 0$, les deux facteurs $-x$ et $f_{2p-1}(x)$ sont positifs : la dérivée est positive. Pour $0 < x < a_{p-1}$, elle est négative. Pour $x > a_{p-1}$, les deux facteurs $-x$ et $f_{2p-1}(x)$ sont négatifs : la dérivée est positive.

x	$] -\infty, 0[$	0	$]0, a_{p-1}[$	a_{p-1}	$]a_{p-1}, +\infty[$
$f'_{2p}(x)$	+	0	—	0	+
f_{2p}	croît depuis 0	maximum local C_{2p}	décroît	minimum local strictement positif	croît vers $+\infty$

La valeur en 0 est un maximum local strict, et la valeur en a_{p-1} est un minimum local strict. La positivité de cette dernière valeur vient de II.5(a). Ce minimum n'est pas un minimum global sur $\mathbb{R}$, puisque la limite en $-\infty$ est 0.

Enfin, $f_0(x) = e^{x/2}$ est strictement croissante ; ce cas, bien que non demandé ici, sera utile pour contrôler f_{n-1} lorsque $n = 1$.

6. Étude des racines de P_n .

(a) Nombre de racines réelles.

L'exponentielle étant toujours strictement positive, $P_n(x) = 0$ équivaut à $f_n(x) = 0$.

Si n est pair, II.5(a) donne $f_n(x) > 0$ pour tout x ; il n'existe donc aucune racine réelle de P_n .

Si $n = 2p + 1$, la fonction f_n est strictement positive pour $x \leq 0$, puis strictement décroissante de $C_n > 0$ vers $-\infty$ sur $[0, +\infty[$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne une racine positive, et la stricte décroissance donne son unicité. Il s'agit du nombre a_p introduit en II.5(b).

En particulier, $P_1(x) = 2 - x$ donne $a_0 = 2$. La positivité de P_n pour $x < 2$ assure aussi $a_p \geq 2$.

(b) Croissance stricte des racines.

Appliquons (2) avec $n = 2p + 2$ et $x = a_p$:

$$f_{2p+3}(a_p) = 2(4p + 5)f_{2p+2}(a_p) + a_p^2 f_{2p+1}(a_p).$$

Le dernier terme est nul, car a_p est la racine de f_{2p+1} . Le premier est strictement positif, car f_{2p+2} est d'indice pair. Ainsi $f_{2p+3}(a_p) > 0$.

Or f_{2p+3} est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et s'annule en a_{p+1} . Sa valeur positive en a_p impose $a_p < a_{p+1}$.

La suite (a_p) est donc strictement croissante.

(c) Divergence des racines vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que la suite croissante (a_p) soit majorée. Elle aurait alors une limite réelle $L \geq 2$ par le théorème de la limite monotone.

La croissance étant stricte, chaque a_p est strictement inférieur à L . La fonction f_{2p+1} est strictement décroissante sur le demi-axe positif et nulle en a_p , donc $f_{2p+1}(L) < 0$ et $P_{2p+1}(L) < 0$.

En revanche, $P_{2p+1}(-L) > 0$, puisque $-L < 2$. Ainsi, pour tout p :

$$u_{2p+1}(-L) = \frac{P_{2p+1}(L)}{P_{2p+1}(-L)} < 0.$$

D'après II.3(c), la suite complète $(u_n(-L))$ converge vers $e^{-L} > 0$, et ses termes d'indice impair convergent donc vers la même limite. Une suite de réels strictement négatifs ne peut converger vers une limite strictement positive : en prenant $\varepsilon = e^{-L}/2$, la définition de la convergence imposerait des termes supérieurs à $e^{-L}/2$ à partir d'un certain rang.

Cette contradiction montre que (a_p) n'est pas majorée. Comme elle est croissante :

$$a_p \longrightarrow +\infty.$$

7. Convergence pour $x \geq 2$.

(a) Définition et positivité à partir d'un certain rang.

Fixons $x \geq 2$. La divergence de (a_p) permet de choisir p_x tel que $a_{p_x} > x$.

Si $n \geq 2p_x$ est pair, $P_n(x) > 0$ par II.5(a). S'il est impair, écrivons $n = 2p + 1$. L'inégalité $2p + 1 \geq 2p_x$ implique $p \geq p_x$, et donc $a_p \geq a_{p_x} > x$.

Le signe de f_{2p+1} avant sa racine donne alors $P_n(x) > 0$. Par ailleurs, $P_n(-x) > 0$ pour tous les n , car $-x < 2$.

Ainsi, pour tout $n \geq 2p_x$, $u_n(x)$ est défini et strictement positif. Cette affirmation ne suppose pas que tous les premiers termes soient définis : par exemple, $u_1(2)$ ne l'est pas.

(b) Limite sur le demi-axe restant.

Pour $n \geq 2p_x$, les dénominateurs sont non nuls et :

$$u_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}.$$

Comme $-x \leq 0$, II.3(c) donne $u_n(-x) \rightarrow e^{-x} > 0$. La continuité de l'inverse assure donc $u_n(x) \rightarrow e^x$.

Avec II.3(c) et II.4, on a ainsi établi la convergence vers e^x pour tout réel x fixé, en considérant la suite à partir d'un rang où elle est définie lorsque cela est nécessaire.

Partie III : Vitesse de convergence de la suite $(u_n(x))$

On conserve la notation $C_n = P_n(0) = (2n)!/n!$. Pour un réel x fixé, tous les polynômes $P_n(x)$ sont strictement positifs à partir d'un certain rang, comme établi dans la partie II. Les équivalents et les quotients de différences qui suivent sont étudiés à partir de ce rang.

1. Équivalent de $P_n(x)$.

(a) Contrôle de $f_n(x)$ sur le demi-axe négatif.

Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis.

Pour tout $m \geq 0$, f_m est strictement positive et croissante sur $] -\infty, 0]$. Pour $m = 0$, cela découle de $f_0 = e^{x/2}$; pour $m \geq 1$, la dérivée $f'_m(t) = -tf_{m-1}(t)/2$ est positive pour $t < 0$.

Soit $n \geq 1$ et $x \leq 0$. Pour $t \in [x, 0]$, on a $0 < f_{n-1}(t) \leq f_{n-1}(0) = C_{n-1}$. Ainsi :

$$0 \leq f'_n(t) = -\frac{t}{2}f_{n-1}(t) \leq \frac{|x|}{2}C_{n-1}.$$

La fonction f_n est de classe C^1 sur $[x, 0]$, donc l'inégalité des accroissements finis donne :

$$|f_n(0) - f_n(x)| \leq \frac{|x|}{2}C_{n-1}|0 - x| = \frac{x^2}{2}C_{n-1}.$$

La croissance de f_n assure que la différence est positive ou nulle. Comme $f_n(0) = C_n$ et $f_n(x) = P_n(x)e^{x/2}$:

$$0 \leq P_n(0) - P_n(x)e^{x/2} \leq \frac{x^2}{2}P_{n-1}(0).$$

Méthode 2 — Intégration directe de la dérivée.

Le théorème fondamental du calcul intégral donne :

$$f_n(0) - f_n(x) = \int_x^0 \left(-\frac{t}{2}\right) f_{n-1}(t) dt.$$

Sur le segment, les deux facteurs sont positifs ou nuls et $f_{n-1}(t) \leq C_{n-1}$. La croissance de l'intégrale entraîne :

$$0 \leq f_n(0) - f_n(x) \leq C_{n-1} \int_x^0 \left(-\frac{t}{2}\right) dt = \frac{x^2}{4}C_{n-1}.$$

Cette borne est plus précise que celle demandée et l'implique. La première méthode suit l'outil imposé ; la seconde tient compte de la variation du facteur $-t/2$ au lieu de le remplacer par sa borne maximale.

(b) Équivalent pour tout réel fixé.

Pour $x \leq 0$, divisons l'inégalité de III.1(a) par $C_n > 0$. Comme $C_n = 2(2n-1)C_{n-1}$ pour $n \geq 1$, on obtient :

$$0 \leq 1 - \frac{P_n(x)e^{x/2}}{C_n} \leq \frac{x^2}{4(2n-1)}.$$

À x fixé, le membre de droite tend vers 0. Donc $P_n(x)e^{x/2}/C_n \rightarrow 1$, ce qui équivaut à :

$$P_n(x) \sim C_n e^{-x/2}.$$

Pour $x > 0$, la conclusion précédente appliquée à $-x$ donne $P_n(-x)/(C_n e^{x/2}) \rightarrow 1$. Par la partie II, $u_n(x) \rightarrow e^x$ et $u_n(x) > 0$ à partir d'un certain rang.

La définition du quotient donne alors :

$$\frac{P_n(x)}{C_n e^{-x/2}} = \frac{P_n(-x)}{C_n e^{x/2}} \frac{e^x}{u_n(x)} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1.$$

L'équivalent est donc valable pour tout réel x fixé. Pour $x = 0$, il s'agit d'une égalité exacte.

2. Majoration de l'erreur.

(a) Comparaison avec la différence de deux termes consécutifs.

Question adaptée au programme actuel : on ajoute la condition $P_n(x)P_{n+1}(x) > 0$.

L'affirmation originale pour tout réel x est fausse, même lorsque les deux quotients existent. Par exemple, pour $n = 0$ et $x = 3$, $u_0(3) = 1$ et $u_1(3) = -5$, donc

$|u_1(3) - u_0(3)| = 6$, tandis que $|u_0(3) - e^3| = e^3 - 1 > 6$. Cette dernière inégalité découle déjà de $e^3 \geq 1 + 3 + 9/2$.

Sous la condition rectifiée, les deux dénominateurs sont non nuls. Posons

$\varepsilon_n(x) = u_n(x) - e^x$. La relation (4) donne :

$$\varepsilon_n(x)\varepsilon_{n+1}(x) = -\frac{e^x g_n(x)g_{n+1}(x)}{P_n(x)P_{n+1}(x)}.$$

Pour $x \geq 0$, les deux fonctions $g_n(x)$ et $g_{n+1}(x)$ sont positives ou nulles ; pour $x < 0$, elles sont négatives ou nulles par imparité. Leur produit est donc toujours positif ou nul.

Le dénominateur étant strictement positif, on obtient $\varepsilon_n(x)\varepsilon_{n+1}(x) \leq 0$. Les deux erreurs sont de signes opposés, ou l'une d'elles est nulle. Ainsi :

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| = |\varepsilon_{n+1}(x) - \varepsilon_n(x)| = |\varepsilon_{n+1}(x)| + |\varepsilon_n(x)|.$$

En particulier :

$$|u_n(x) - e^x| \leq |u_{n+1}(x) - u_n(x)|.$$

La condition est satisfaite pour tous les n si $x < 2$, et pour tous les n assez grands si x est un réel fixé quelconque. Elle suffit donc à toutes les utilisations ultérieures.

(b) Identité polynomiale des numérateurs.

Posons, pour tout réel x :

$$D_n(x) = P_{n+1}(-x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(-x).$$

Pour $n = 0$, $D_0(x) = (2 + x) - (2 - x) = 2x$.

Pour $n \geq 1$, la relation (3) donne :

$$D_n(x) = (2(2n + 1)P_n(-x) + x^2P_{n-1}(-x))P_n(x)$$

$$- (2(2n + 1)P_n(x) + x^2P_{n-1}(x))P_n(-x).$$

Les termes en $2(2n + 1)$ se compensent. Il reste :

$$D_n(x) = x^2(P_{n-1}(-x)P_n(x) - P_{n-1}(x)P_n(-x)) = -x^2D_{n-1}(x).$$

Par récurrence à partir de $D_0 = 2x$, on obtient :

$$D_n(x) = 2(-1)^n x^{2n+1}.$$

L'identité est polynomiale et valable pour tout réel x , sans condition sur les racines.

(c) Borne explicite de l'erreur.

Question adaptée au programme actuel : la condition $P_n(x)P_{n+1}(x) > 0$ est conservée ici. Elle permet d'appliquer III.2(a) et assure la positivité du membre de droite. Sans cette condition, la borne écrite dans le sujet original peut même être négative.

En mettant les quotients au même dénominateur et en utilisant III.2(b), on a :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{D_n(x)}{P_n(x)P_{n+1}(x)} = \frac{2(-1)^n x^{2n+1}}{P_n(x)P_{n+1}(x)}.$$

Sous la condition de signe, sa valeur absolue est $2|x|^{2n+1}/(P_n(x)P_{n+1}(x))$. La comparaison de III.2(a) donne :

$$|u_n(x) - e^x| \leq \frac{2|x|^{2n+1}}{P_n(x)P_{n+1}(x)}.$$

Pour $x = 0$, tous les quotients valent 1 et les deux membres sont nuls.

(d) Erreur pour l'approximation $u_7(1)$.

La condition de signe est satisfaite, puisque $P_7(1) > 0$ et $P_8(1) > 0$. Le tableau de II.1(b) donne $P_7(1) = 10391023$ et $P_8(1) = 312129649$.

En appliquant III.2(c) avec $n = 7$ et $x = 1$:

$$\left| \frac{28245729}{10391023} - e \right| \leq \frac{2}{10391023 \cdot 312129649} = \frac{2}{3243346361740927} < 6,167 \times 10^{-16}.$$

De plus, $g_7(1) > 0$ et $P_7(1) > 0$; la relation (4) donne $u_7(1) - e > 0$. Le rationnel $u_7(1)$ est donc une approximation par excès.

La borne précédente concerne la valeur rationnelle exacte $u_7(1)$. Si l'on utilise seulement la valeur affichée avec douze décimales dans le tableau, l'arrondi peut ajouter au plus $\frac{1}{2} \times 10^{-12}$ à l'erreur. L'inégalité triangulaire donne alors une erreur totale inférieure à $5,007 \times 10^{-13}$.

3. Équivalent de l'erreur pour $x \neq 0$ fixé.

Fixons un réel $x \neq 0$ et posons $\Delta_n(x) = u_{n+1}(x) - u_n(x)$. À partir d'un certain rang, tous les dénominateurs sont strictement positifs. L'identité de III.2(b) montre également que $\Delta_n(x) \neq 0$, puisque $x \neq 0$.

(a) Équivalent de la différence consécutive.

III.1(b) donne $P_n(x) \sim C_n e^{-x/2}$ et, en décalant l'indice, $P_{n+1}(x) \sim C_{n+1} e^{-x/2}$. Ces quantités sont non nulles à partir d'un certain rang, donc on peut multiplier les équivalents puis inverser leur produit.

L'identité exacte de III.2(c) donne :

$$\Delta_n(x) \sim \frac{2(-1)^n e^x x^{2n+1}}{C_n C_{n+1}}.$$

Comme $C_{n+1} = 2(2n+1)C_n$ et $C_n = (2n)!/n!$, on obtient aussi la forme :

$$\Delta_n(x) \sim (-1)^n \frac{e^x x^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)((2n)!)^2}.$$

Cet équivalent est signé : le facteur $(-1)^n x^{2n+1}$ doit être conservé.

(b) Quotient des différences successives.

Les différences étant non nulles, l'identité exacte permet de calculer directement leur quotient :

$$\frac{\Delta_{n+1}(x)}{\Delta_n(x)} = -x^2 \frac{P_n(x)}{P_{n+2}(x)}.$$

D'après III.1(b), les facteurs exponentiels se compensent et :

$$\frac{P_n(x)}{P_{n+2}(x)} \sim \frac{C_n}{C_{n+2}} = \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}.$$

Le dernier terme tend vers 0. On conclut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x) - u_n(x)} = 0.$$

Le quotient est obtenu par une identité particulière ; aucun critère général de convergence de série n'est nécessaire.

(c) Équivalent signé de l'erreur.

Question adaptée au programme actuel : l'équivalent final est exprimé en factorielles. Il conserve l'objectif d'évaluation précise de l'erreur et se démontre avec les résultats précédents, sans utiliser la formule asymptotique extérieure au référentiel rappelée dans le sujet original.

Posons $\varepsilon_n(x) = u_n(x) - e^x$. Pour tous les n assez grands, III.2(a) appliquée à l'indice $n+1$ donne :

$$|\varepsilon_{n+1}(x)| \leq |\Delta_{n+1}(x)|.$$

En divisant par $|\Delta_n(x)| > 0$, puis en utilisant III.3(b) :

$$\left| \frac{\varepsilon_{n+1}(x)}{\Delta_n(x)} \right| \leq \left| \frac{\Delta_{n+1}(x)}{\Delta_n(x)} \right| \rightarrow 0.$$

L'identité $\Delta_n(x) = \varepsilon_{n+1}(x) - \varepsilon_n(x)$ se réarrange en $\varepsilon_n(x) = -\Delta_n(x) + \varepsilon_{n+1}(x)$. Ainsi :

$$\frac{\varepsilon_n(x)}{-\Delta_n(x)} = 1 - \frac{\varepsilon_{n+1}(x)}{\Delta_n(x)} \rightarrow 1.$$

On a donc $\varepsilon_n(x) \sim -\Delta_n(x)$. En utilisant III.3(a), on obtient exactement l'équivalent demandé dans la version adaptée :

$$u_n(x) - e^x \sim (-1)^{n+1} \frac{e^x x^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)((2n)!)^2}.$$

La conclusion vaut pour tout réel non nul x fixé. Pour $x = 0$, l'erreur est identiquement nulle ; ce cas est exclu de l'énoncé d'un équivalent non nul, mais l'approximation est alors exacte à chaque rang.

Relevé des adaptations

- II.1(a) : algorithme demandé en Python ; précision que les n premiers termes sont ceux d'indices 0 à $n-1$, pour $n \geq 1$. Aucun code ancien n'était fourni dans le sujet.
- II.1(b) : calcul numérique réalisé en Python et affichage des quotients avec douze décimales, en remplacement de la référence à la précision d'une calculatrice. Les valeurs des polynômes restent exactes.
- III.2(a) : ajout de $P_n(x)P_{n+1}(x) > 0$. La majoration originale pour tout réel est fautive, comme le montre $n = 0, x = 3$. La condition rétablit l'opposition des signes des erreurs et est satisfaite à partir d'un certain rang pour tout réel fixé.
- III.2(c) : même condition de positivité du produit des dénominateurs, nécessaire pour la majoration issue de III.2(a) et pour que le membre de droite soit positif ou nul.
- III.3(c) : remplacement de l'équivalent utilisant une formule asymptotique hors référentiel par l'équivalent en factorielles, entièrement établi avec les identités et majorations du problème ; suppression du rappel extérieur devenu inutile.