



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1988

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de fonctions continues sur $[0, 1]$ par des fonctions polynômes.

Les parties II, III et IV sont indépendantes.

Notations

On associe à tout entier naturel n non nul et à toute fonction numérique f continue sur $[0, 1]$ la fonction polynôme, notée f_n , définie par :

$$(1) \quad \forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Rappel

Soit h une fonction numérique définie sur $[0, 1]$. S'il existe un réel positif k tel que :

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2, \quad |h(x) - h(x')| \leq k|x - x'|,$$

on dit que h est k -Lipschitzienne sur $[0, 1]$.

I — Étude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto x^2$

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la fonction polynôme f_n associée à f par (1) dans les deux cas particuliers suivants.

a) $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = 1.$

b) $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = x.$

2. f désignant une fonction numérique continue sur $[0, 1]$, on note g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = xf(x)$, f_n et g_n les fonctions respectivement associées à f et à g par (1), et f'_n la dérivée de f_n .

Vérifier que :

$$(2) \quad \forall x \in [0, 1], \quad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g_n(x) - xf_n(x).$$

3. On suppose que $\forall x \in [0, 1], f(x) = x^2$.

a) Déterminer f_n .

b) Calculer $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|$.

4. Dédire des résultats précédents que :

$$(3) \quad \forall x \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

II — Étude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto \exp x$

Dans toute cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp x$, par la relation (1).

1. Vérifier que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \left[x \left(\exp \frac{1}{n} - 1 \right) + 1 \right]^n.$$

2. Déterminer, pour tout x de $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

3. On suppose que $x \in]0, 1[$.

a) Écrire le développement limité à l'ordre 2, en zéro, de $u \mapsto \ln[x(\exp u - 1) + 1]$.

b) En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $f_n(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

4. Étudier les variations de la fonction ψ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\psi(x) = n \ln \left[x \left(\exp \frac{1}{n} - 1 \right) + 1 \right] - x.$$

On montrera, à l'aide du théorème de Rolle, que ψ' possède au moins une racine sur $]0, 1[$ et, en calculant ψ'' , que cette racine x_n est unique.

5. En déduire que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \exp x \leq f_n(x) \leq \exp[x + \psi(x_n)],$$

et que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - \exp x| \leq e[\exp(\psi(x_n)) - 1].$$

6. Donner, en utilisant un développement limité de $\psi(x_n)$ à un ordre suffisant, un équivalent de $\exp(\psi(x_n)) - 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.

III — Étude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Dans toute cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$, par la relation (1).

1. Détermination de f_n .

Vérifier que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = n \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{n+k} x^k (1-x)^{n-k} = n \int_0^1 u^{n-1} [1 - x(1-u)]^n du.$$

2. Majoration de $|f'_n(x)|$.

a) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall (t, t') \in [0, 1]^2, \quad |t^n - (t')^n| \leq n|t - t'|.$$

b) En déduire que :

$$\begin{aligned} \forall (x, x') \in [0, 1]^2, \quad \forall u \in [0, 1], \quad & |[1 - x(1-u)]^n - [1 - x'(1-u)]^n| \\ & \leq n(1-u)|x - x'|, \end{aligned}$$

puis que f_n est 1-Lipschitzienne sur $[0, 1]$.

c) En déduire un majorant de $\sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x)|$.

3. Majoration de $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|$.

a) Utiliser la relation (2) et l'égalité $xf(x) = 1 - f(x)$ pour démontrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = 1 - (1+x)f_n(x).$$

b) En déduire que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{1}{4n}.$$

IV — Convergence de la suite (f_n) vers f sur $[0, 1]$

Dans toute cette partie, on désigne par f une fonction numérique continue sur $[0, 1]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par f_n la fonction polynôme associée à f par (1).

1. Convergence de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \geq 1}$.

a) On note, pour $0 \leq k \leq n$:

$$I_n(k) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

Déterminer, pour $0 \leq k \leq n-1$, une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.

En déduire $I_n(k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

b) Calculer, en fonction de f , $\int_0^1 f_n(x) dx$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

2. Étude de $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ pour f de classe C^1 sur $[0, 1]$.

On suppose f de classe C^1 sur $[0, 1]$.

a) Montrer qu'il existe un réel positif k tel que f soit k -Lipschitzienne sur $[0, 1]$. En déduire que, si $M_0(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, on a :

$$\forall \alpha > 0, \quad \forall (x, x') \in [0, 1]^2, \quad |f(x') - f(x)| \leq k\alpha + \frac{2M_0(f)}{\alpha^2}(x' - x)^2.$$

On distinguera les deux cas $|x' - x| \leq \alpha$ et $|x' - x| > \alpha$.

b) En utilisant la relation (3), montrer que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad |f_n(x) - f(x)| \leq k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}.$$

d) En déduire l'existence d'un nombre réel positif A tel que :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{\sqrt[3]{n}}.$$

On pourra étudier, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\alpha \mapsto k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}$.

Retrouver ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

3. Vitesse de convergence de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f si f est de classe C^2 sur $[0, 1]$.

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur $[0, 1]$.

a) Démontrer que, si $M_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$, on a :

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2, \quad |f(x') - f(x) - (x' - x)f'(x)| \leq \frac{M_2(f)}{2}(x' - x)^2.$$

b) En déduire que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{M_2(f)}{8n},$$

et montrer, par un exemple, que cette majoration est la meilleure possible.