



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1988

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Pour $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ et $x \in [0, 1]$, on note :

$$w_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Ce sont des polynômes à valeurs positives ou nulles sur $[0, 1]$. Les facteurs d'exposant nul désignent la fonction constante 1, y compris aux extrémités. La formule du binôme donne :

$$\sum_{k=0}^n w_{n,k}(x) = (x + 1 - x)^n = 1.$$

La relation (1) s'écrit donc

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) w_{n,k}(x).$$

Les sommes utilisées dans le corrigé sont toutes finies. En particulier, leur dérivation ou leur intégration terme à terme est justifiée par la linéarité pour un nombre fini de termes.

I — Étude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto x^2$

1. Cas particuliers.

a)

Lorsque $f(x) = 1$, chaque valeur $f(k/n)$ vaut 1. La formule du binôme donne directement :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Ainsi $f_n = f$ sur $[0, 1]$ pour tout $n \geq 1$.

b)

Méthode 1 — Utiliser une identité sur les coefficients binomiaux.

Lorsque $f(x) = x$, on a $f(k/n) = k/n$. Le terme d'indice 0 est nul. Pour $1 \leq k \leq n$, l'écriture factorielle montre que $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} \\ &= x. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de la formule du binôme ; elle reste valable pour $n = 1$, où la somme est réduite à son seul terme d'indice 0. Ainsi $f_n = f$.

Méthode 2 — Interpréter les coefficients par une loi binomiale.

Pour $x \in]0, 1[$ fixé, soit Y de loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$. Les probabilités $P(Y = k)$ valent $w_{n,k}(x)$, et Y est une variable aléatoire finie, donc possède une espérance. La formule du transfert donne :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P(Y = k) = \frac{E(Y)}{n} = x,$$

car l'espérance d'une binomiale de paramètres n, x vaut nx . Aux extrémités, la formule (1) donne directement $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. On retrouve donc $f_n(x) = x$ sur tout le segment.

La première méthode est une manipulation de sommes finies ; la seconde identifie le premier moment d'une loi binomiale, interprétation utile pour les erreurs d'approximation.

2.

La fonction f n'a pas besoin d'être dérivable : les valeurs $f(k/n)$ sont des coefficients constants du polynôme f_n .

Fixons d'abord $x \in]0, 1[$. En dérivant chaque poids, on obtient :

$$w'_{n,k}(x) = \left(\frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x} \right) w_{n,k}(x).$$

Les dénominateurs sont alors non nuls. En multipliant par $x(1-x)/n$:

$$\frac{x(1-x)}{n} w'_{n,k}(x) = \left(\frac{k}{n} - x \right) w_{n,k}(x).$$

On multiplie par $f(k/n)$ et on somme de $k = 0$ à n . Puisque $g(k/n) = (k/n)f(k/n)$, il vient :

$$\frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} f(k/n) w_{n,k}(x) - x \sum_{k=0}^n f(k/n) w_{n,k}(x) = g_n(x) - x f_n(x).$$

Les deux membres sont des polynômes en x , donc continus aux extrémités. L'égalité s'y prolonge par continuité. On peut également vérifier que $g_n(0) = 0$, $g_n(1) = f_n(1) = f(1)$ et que le facteur $x(1-x)$ s'annule aux deux bornes. La relation (2) est donc établie sur tout $[0, 1]$.

3. On suppose $f(x) = x^2$.

a)

Méthode 1 — Appliquer la relation (2) au cas linéaire.

Appliquons I-2 à la fonction $\ell(t) = t$ et à $g(t) = t\ell(t) = t^2$. D'après I-1.b), le polynôme associé à ℓ est $\ell_n(x) = x$, donc $\ell'_n(x) = 1$. Le polynôme associé à g est précisément le f_n de cette question. La relation (2) donne :

$$\frac{x(1-x)}{n} = f_n(x) - x^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Méthode 2 — Utiliser le deuxième moment d'une binomiale.

Pour $x \in]0, 1[$, soit $Y \sim \mathcal{B}(n, x)$. Cette variable est finie, donc admet espérance et variance. Par transfert et par la formule de Koenig-Huygens :

$$f_n(x) = E\left(\frac{Y^2}{n^2}\right) = \frac{V(Y) + E(Y)^2}{n^2}.$$

Comme $E(Y) = nx$ et $V(Y) = nx(1-x)$, on obtient :

$$f_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Aux bornes $x = 0$ et $x = 1$, cette identité se vérifie directement dans (1). La première méthode réutilise l'identité différentielle ; la seconde explique le terme supplémentaire comme une variance.

b)

La formule précédente donne $f_n(x) - f(x) = x(1-x)/n \geq 0$. Or :

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Sur $[0, 1]$, cette expression a pour maximum $1/4$, atteint en $x = 1/2$. Par conséquent :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4n}.$$

4.

On développe le carré et on utilise les trois sommes obtenues dans I-1 et I-3 :

$$\sum_{k=0}^n w_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} w_{n,k}(x) = x, \quad \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 w_{n,k}(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 w_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 w_{n,k}(x) - 2x \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} w_{n,k}(x) + x^2 \sum_{k=0}^n w_{n,k}(x) \\ &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

C'est la relation (3), valable pour chaque $x \in [0, 1]$ et chaque $n \geq 1$.

II — Étude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto \exp x$

1.

Pour chaque k , $f(k/n) = e^{k/n} = (e^{1/n})^k$. La formule du binôme donne donc :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (xe^{1/n})^k (1-x)^{n-k} \\ &= (xe^{1/n} + 1 - x)^n \\ &= [1 + x(e^{1/n} - 1)]^n. \end{aligned}$$

La base de cette puissance est strictement positive pour $x \in [0, 1]$.

2.

Méthode 1 — Passer au logarithme et utiliser les accroissements finis.

Fixons $x \in [0, 1]$ et posons $a_n = e^{1/n} - 1 > 0$. La dérivabilité de l'exponentielle en 0 donne $(e^u - 1)/u \rightarrow 1$, donc $a_n \rightarrow 0$ et $na_n \rightarrow 1$.

Si $x = 0$, on a directement $f_n(0) = 1 = e^0$. Si $x > 0$, les accroissements finis appliqués à $\ln$ sur $[1, 1 + xa_n]$ donnent un réel $\xi_n \in [1, 1 + xa_n]$ tel que :

$$\ln(1 + xa_n) = \frac{xa_n}{\xi_n}.$$

Comme $\xi_n \rightarrow 1$, il vient :

$$\ln f_n(x) = n \ln(1 + xa_n) = \frac{na_n x}{\xi_n} \rightarrow x.$$

Par continuité de l'exponentielle, $f_n(x) \rightarrow e^x$. Cela inclut $x = 1$, pour lequel la formule donne en fait $f_n(1) = e$ pour tout n .

Méthode 2 — Utiliser l'interprétation probabiliste et une variance.

Pour $x \in]0, 1[$ fixé, soit $Y \sim \mathcal{B}(n, x)$ et $Z = Y/n$. Les variables sont finies. La formule du transfert donne $f_n(x) = E(e^Z)$, tandis que $E(Z) = x$ et $V(Z) = x(1-x)/n$.

Sur $[0, 1]$, la dérivée de l'exponentielle est majorée par e . Les accroissements finis donnent donc $|e^z - e^x| \leq e|z - x|$ pour $z \in [0, 1]$. Par l'inégalité triangulaire pour une espérance finie, puis par Cauchy-Schwarz appliquée aux sommes finies de probabilités :

$$|f_n(x) - e^x| \leq e E|Z - x| \leq e \sqrt{E((Z - x)^2)} = e \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq \frac{e}{2\sqrt{n}}.$$

Cette borne tend vers 0. Aux extrémités, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = e$ directement. La limite est donc e^x pour tout $x \in [0, 1]$. Le passage au logarithme exploite la formule explicite ; l'approche probabiliste donne aussi une borne de l'erreur indépendante de x .

3. On fixe $x \in]0, 1[$.

a)

Pour éviter toute composition de développements limités, on calcule les dérivées de la fonction demandée et on applique Taylor-Young. Posons :

$$H_x(u) = \ln(1 - x + xe^u).$$

Le nombre $1 - x + xe^u$ est strictement positif pour tout $u \in \mathbb{R}$, puisque $0 < x < 1$. La fonction H_x est donc de classe C^2 , et même C^∞ , au voisinage de 0. On calcule :

$$H'_x(u) = \frac{xe^u}{1-x+xe^u}, \quad H''_x(u) = \frac{x(1-x)e^u}{(1-x+xe^u)^2}.$$

En 0, on a $H_x(0) = 0$, $H'_x(0) = x$ et $H''_x(0) = x(1-x)$. Taylor-Young à l'ordre deux donne donc :

$$\ln[1 + x(e^u - 1)] = xu + \frac{x(1-x)}{2}u^2 + o(u^2) \quad (u \rightarrow 0).$$

b)

On applique le développement de (a) en $u = 1/n$, puis on multiplie par n :

$$\ln f_n(x) = nH_x(1/n) = x + \frac{x(1-x)}{2n} + o(1/n).$$

Posons $\delta_n = \ln f_n(x) - x$. Alors $\delta_n \rightarrow 0$ et, puisque $0 < x < 1$:

$$\delta_n \sim \frac{x(1-x)}{2n} > 0.$$

Le quotient $(e^v - 1)/v$ tend vers 1 lorsque $v \rightarrow 0$. On peut l'appliquer à $v = \delta_n$, qui est non nul pour tout n suffisamment grand. Ainsi :

$$f_n(x) - e^x = e^x(e^{\delta_n} - 1) \sim \frac{e^x x(1-x)}{2n}.$$

D'après II-2, e^x est bien la limite de $f_n(x)$, donc l'équivalent demandé est celui-ci. Aux bornes, exclues de cette question, l'erreur est identiquement nulle et cet équivalent à coefficient strictement positif ne s'applique pas.

4.

On fixe $n \geq 1$ et pose $a = e^{1/n} - 1 > 0$. La fonction du sujet est $\psi(x) = n \ln(1 + ax) - x$. Elle est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, puisque $1 + ax > 0$. Ses valeurs aux extrémités sont :

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = n \ln(e^{1/n}) - 1 = 0.$$

Les hypothèses du théorème de Rolle sont satisfaites. Il existe donc au moins un $x_n \in]0, 1[$ tel que $\psi'(x_n) = 0$.

On calcule :

$$\psi'(x) = \frac{na}{1 + ax} - 1, \quad \psi''(x) = -\frac{na^2}{(1 + ax)^2} < 0.$$

La dérivée ψ' est strictement décroissante ; elle ne peut donc avoir qu'une seule racine. Le point x_n est unique. L'équation $\psi'(x_n) = 0$ donne $1 + ax_n = na$, d'où :

$$x_n = n - \frac{1}{e^{1/n} - 1}.$$

La décroissance de ψ' impose $\psi'(x) > 0$ pour $x < x_n$ et $\psi'(x) < 0$ pour $x > x_n$. Ainsi ψ est strictement croissante sur $[0, x_n]$, puis strictement décroissante sur $[x_n, 1]$. Elle atteint son maximum en x_n et ses minima aux deux extrémités :

$$0 \leq \psi(x) \leq \psi(x_n), \quad \psi(x_n) > 0.$$

5.

La formule de II-1 et la définition de ψ donnent $f_n(x) = e^{x+\psi(x)}$. L'exponentielle étant strictement croissante, les inégalités de II-4 entraînent :

$$e^x \leq f_n(x) \leq e^{x+\psi(x_n)}.$$

L'erreur est donc positive ou nulle et vérifie :

$$|f_n(x) - e^x| = e^x(e^{\psi(x)} - 1) \leq e^x(e^{\psi(x_n)} - 1) \leq e(e^{\psi(x_n)} - 1),$$

car $x \leq 1$ et $e^{\psi(x_n)} - 1 \geq 0$. En prenant le supremum sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - e^x| \leq e[e^{\psi(x_n)} - 1].$$

Il s'agit d'une majoration du supremum ; aucune égalité de ce supremum avec le membre de droite n'est affirmée.

6.

Comme n varie, on écrit ici ψ_n pour la fonction ψ de II-4. Il faut contrôler le reste de Taylor lorsque le paramètre x est remplacé par x_n ; un développement établi seulement pour un x fixé ne suffit pas.

Commençons par localiser x_n . Avec $u = 1/n$, Taylor-Young pour l'exponentielle donne $e^u - 1 = u + u^2/2 + o(u^2)$. La formule de II-4 s'écrit :

$$x_n = \frac{(e^u - 1)/u - 1}{e^u - 1} = \frac{u/2 + o(u)}{u + o(u)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Pour obtenir un reste contrôlé indépendamment de x , reprenons

$H_x(u) = \ln(1 - x + xe^u)$ pour tous $x \in [0, 1]$. La fonction est de classe C^3 en u sur $\mathbb{R}$, y compris lorsque $x = 0$ ou $x = 1$. Posons :

$$P_x(u) = \frac{xe^u}{1 - x + xe^u}.$$

On a $0 \leq P_x(u) \leq 1$, $H'_x(u) = P_x(u)$ et $P'_x(u) = P_x(u)(1 - P_x(u))$. En dérivant, on obtient :

$$H_x'''(u) = P_x(u)(1 - P_x(u))(1 - 2P_x(u)).$$

Puisque $0 \leq P_x(u) \leq 1$, on a $P_x(u)(1 - P_x(u)) \leq 1/4$ et $|1 - 2P_x(u)| \leq 1$. Ainsi $|H_x'''(u)| \leq 1/4$, pour tous les paramètres considérés.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre deux, sur le segment $[0, 1/n]$, donne donc :

$$\left| H_x(1/n) - \frac{x}{n} - \frac{x(1-x)}{2n^2} \right| \leq \frac{1}{24n^3} \quad (x \in [0, 1]).$$

En multipliant par n et en utilisant $\psi_n(x) = nH_x(1/n) - x$, il vient :

$$\left| \psi_n(x) - \frac{x(1-x)}{2n} \right| \leq \frac{1}{24n^2} \quad (x \in [0, 1]).$$

On peut maintenant appliquer cette estimation à $x = x_n$. Comme $x_n \rightarrow 1/2$, elle donne :

$$\psi_n(x_n) = \frac{1}{8n} + o(1/n).$$

La quantité $\psi_n(x_n)$ est strictement positive d'après II-4 et tend vers 0. Par la limite $(e^v - 1)/v \rightarrow 1$ en 0, on conclut :

$$e^{\psi_n(x_n)} - 1 \sim \frac{1}{8n} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Le contrôle du reste permet d'utiliser le point variable x_n sans invoquer de composition de développements limités ni de passage à la limite non justifié.

III — Étude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$

1. Détermination de f_n .

La valeur de f au point k/n est $f(k/n) = n/(n+k)$, dont le dénominateur est strictement positif puisque $n \geq 1$ et $k \geq 0$. La définition donne donc :

$$f_n(x) = n \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{n+k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pour relier cette somme à l'intégrale proposée, on utilise la primitive d'une puissance entière :

$$\frac{1}{n+k} = \int_0^1 u^{n+k-1} du.$$

Les intégrandes sont des polynômes continus sur le segment ; le passage de la somme finie à l'intégrale est justifié par linéarité. On obtient :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n \int_0^1 u^{n-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (xu)^k (1-x)^{n-k} du \\ &= n \int_0^1 u^{n-1} (1-x+xu)^n du \\ &= n \int_0^1 u^{n-1} [1-x(1-u)]^n du. \end{aligned}$$

La seconde égalité est la formule du binôme. Les deux expressions demandées sont établies pour tous $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$.

2. Majoration de $|f'_n(x)|$.

a)

La fonction $q : t \mapsto t^n$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur cet intervalle au sens polynomial. Sa dérivée vérifie $|q'(t)| = nt^{n-1} \leq n$ pour $0 \leq t \leq 1$. Pour $n = 1$, cette dérivée est la fonction constante 1.

L'inégalité des accroissements finis appliquée entre t et t' donne :

$$|t^n - (t')^n| \leq n|t - t'| \quad (t, t' \in [0, 1]).$$

b)

Si $x, x', u \in [0, 1]$, les nombres $1 - x(1 - u)$ et $1 - x'(1 - u)$ appartiennent à $[0, 1]$. On peut donc appliquer (a). Leur différence vaut $(x' - x)(1 - u)$, d'où :

$$|[1 - x(1 - u)]^n - [1 - x'(1 - u)]^n| \leq n(1 - u)|x - x'|.$$

En utilisant la représentation intégrale de III-1 et l'inégalité triangulaire pour l'intégrale sur un segment :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x')| &\leq n \int_0^1 u^{n-1} |[1 - x(1 - u)]^n - [1 - x'(1 - u)]^n| du \\ &\leq n^2 |x - x'| \int_0^1 u^{n-1} (1 - u) du. \end{aligned}$$

L'intégrale se calcule par linéarité :

$$\int_0^1 u^{n-1} (1 - u) du = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Par conséquent :

$$|f_n(x) - f_n(x')| \leq \frac{n}{n+1} |x - x'| \leq |x - x'|.$$

Ainsi f_n est 1-Lipschitzienne sur $[0, 1]$. Le calcul donne même la constante de Lipschitz $n/(n+1)$.

c)

Fixons $x \in]0, 1[$ et considérons un accroissement $h \neq 0$ tel que $x + h \in [0, 1]$. D'après (b) :

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| \leq \frac{n}{n+1}.$$

Le polynôme f_n est dérivable ; en faisant tendre h vers 0, on obtient $|f'_n(x)| \leq n/(n+1)$. Aux extrémités, on prend la limite à droite en 0 et à gauche en 1 ; ces limites coïncident avec les dérivées du polynôme aux points concernés.

On a donc, sur tout le segment :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f'_n(x)| \leq \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

En particulier, 1 est le majorant demandé, indépendant de n .

3. Majoration de l'erreur.

a)

Pour $f(x) = 1/(1+x)$, on a $xf(x) = 1 - f(x)$. La fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est donc $1 - f$.

La construction (1) est linéaire en la fonction à laquelle on l'applique, car elle est une somme finie pondérée de ses valeurs. Comme le polynôme associé à la constante 1 est 1 d'après I-1.a), on obtient $g_n = 1 - f_n$.

La relation (2) donne alors :

$$\frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g_n(x) - x f_n(x) = 1 - f_n(x) - x f_n(x) = 1 - (1+x) f_n(x).$$

Cette identité est valable pour tout $x \in [0, 1]$.

b)

En réarrangeant l'identité de (a), on trouve :

$$f_n(x) - \frac{1}{1+x} = -\frac{x(1-x)}{n(1+x)} f'_n(x).$$

Le dénominateur $1+x$ est strictement positif sur $[0, 1]$. D'après III-2.c), $|f'_n(x)| \leq 1$.
Comme $1+x \geq 1$ et $0 \leq x(1-x) \leq 1/4$, il vient :

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{x(1-x)}{n(1+x)} \leq \frac{1}{4n}.$$

En prenant le supremum, on obtient la majoration demandée :

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{1}{4n}.$$

L'identité montre aussi que l'erreur est nulle aux extrémités ; aucune division par x ou par $1-x$ n'a été nécessaire.

IV — Convergence de la suite (f_n) vers f sur $[0, 1]$

1. Convergence de la suite des intégrales.

a)

Fixons $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n-1$. Les fonctions $x \mapsto x^{k+1}/(k+1)$ et $x \mapsto (1-x)^{n-k}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I_n(k) &= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} (1-x)^{n-k} \right]_0^1 + \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx \\ &= \frac{n-k}{k+1} I_n(k+1). \end{aligned}$$

Le terme de bord est nul : $k+1 \geq 1$ assure l'annulation en 0, et $n-k \geq 1$ celle en 1. On peut donc écrire la récurrence :

$$I_n(k+1) = \frac{k+1}{n-k} I_n(k) \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

Tous les dénominateurs sont alors strictement positifs. Le premier terme vaut :

$$I_n(0) = \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

En appliquant successivement la récurrence, pour $1 \leq k \leq n$:

$$I_n(k) = \frac{1}{n+1} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j+1}{n-j} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}.$$

La même formule vaut pour $k=0$, avec $0! = 1$, et pour $k=n$, où elle donne $1/(n+1)$, également égal à $\int_0^1 x^n dx$. Finalement :

$$I_n(k) = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1) \binom{n}{k}} \quad (0 \leq k \leq n).$$

b)

La formule (1) est une somme finie de fonctions continues ; on peut l'intégrer terme à terme. Grâce à (a) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x) dx &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k/n) I_n(k) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(k/n).\end{aligned}$$

Pour étudier la limite, séparons le terme d'indice 0 et faisons apparaître une somme de Riemann :

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \right) + \frac{f(0)}{n+1}.$$

La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$. Ses sommes de Riemann aux extrémités droites des n intervalles de longueur $1/n$ convergent donc vers son intégrale sur ce segment. De plus, $n/(n+1) \rightarrow 1$ et $f(0)/(n+1) \rightarrow 0$. On conclut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

La preuve ne suppose pas une convergence uniforme préalable de f_n vers f : elle repose sur une formule exacte et sur les sommes de Riemann de f .

2. On suppose f de classe C^1 sur $[0, 1]$.

a)

La dérivée f' est continue sur le segment $[0, 1]$; elle y est donc bornée et atteint le maximum de sa valeur absolue. Posons $K = \max_{[0,1]} |f'|$ et choisissons $k = 1 + K > 0$. L'inégalité des accroissements finis donne :

$$|f(x') - f(x)| \leq K|x' - x| \leq k|x' - x|.$$

La fonction f est donc k -Lipschitzienne. Le choix $k > 0$ permet de traiter ensuite l'optimisation sans division par une constante nulle, même lorsque f est constante.

La continuité de f sur le même segment assure que $M_0(f) = \sup_{[0,1]} |f|$ est un réel fini positif ou nul. Fixons $\alpha > 0$ et posons $\delta = |x' - x|$.

Si $\delta \leq \alpha$, l'inégalité de Lipschitz donne $|f(x') - f(x)| \leq k\delta \leq k\alpha$. On peut ajouter le terme positif ou nul $2M_0(f)\delta^2/\alpha^2$.

Si $\delta > \alpha$, l'inégalité triangulaire donne $|f(x') - f(x)| \leq 2M_0(f)$. Comme $\delta^2/\alpha^2 > 1$, on obtient $|f(x') - f(x)| \leq 2M_0(f)\delta^2/\alpha^2$, puis on peut ajouter $k\alpha$.

Les deux cas donnent, pour tous les paramètres de la question :

$$|f(x') - f(x)| \leq k\alpha + \frac{2M_0(f)}{\alpha^2}(x' - x)^2.$$

b)

Puisque

$$\sum_j w_{n,j}(x) = 1,$$

on peut écrire :

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{j=0}^n (f(j/n) - f(x))w_{n,j}(x).$$

Les poids sont positifs ou nuls. On applique l'inégalité triangulaire, puis l'estimation de (a) avec $x' = j/n$:

$$\begin{aligned}
 |f_n(x) - f(x)| &\leq \sum_{j=0}^n |f(j/n) - f(x)| w_{n,j}(x) \\
 &\leq k\alpha \sum_{j=0}^n w_{n,j}(x) + \frac{2M_0(f)}{\alpha^2} \sum_{j=0}^n \left(\frac{j}{n} - x\right)^2 w_{n,j}(x).
 \end{aligned}$$

La première somme vaut 1 et la seconde vaut $x(1-x)/n$ par la relation (3). Comme $x(1-x) \leq 1/4$, on obtient :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq k\alpha + \frac{2M_0(f)x(1-x)}{n\alpha^2} \leq k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}.$$

Cette borne est valable pour chaque $\alpha > 0$, chaque $x \in [0, 1]$ et chaque $n \geq 1$.

d)

Méthode 1 — Optimiser la majoration suggérée par le sujet.

Supposons d'abord $M_0(f) > 0$. Pour n fixé, posons $J_n(\alpha) = k\alpha + M_0(f)/(2n\alpha^2)$ sur $]0, +\infty[$. Cette fonction est dérivable et :

$$J'_n(\alpha) = k - \frac{M_0(f)}{n\alpha^3}.$$

Comme $k > 0$ et $M_0(f) > 0$, la dérivée s'annule uniquement en :

$$\alpha_n = \left(\frac{M_0(f)}{kn}\right)^{1/3}.$$

Elle est négative pour $0 < \alpha < \alpha_n$ et positive pour $\alpha > \alpha_n$. La fonction atteint donc son minimum global en α_n . On calcule ses deux termes :

$$k\alpha_n = \frac{k^{2/3}M_0(f)^{1/3}}{n^{1/3}}, \quad \frac{M_0(f)}{2n\alpha_n^2} = \frac{k^{2/3}M_0(f)^{1/3}}{2n^{1/3}}.$$

L'estimation de (b) devient :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{n^{1/3}}, \quad A = \frac{3}{2}(k^2 M_0(f))^{1/3} > 0.$$

Si $M_0(f) = 0$, on a $f = 0$ sur $[0, 1]$, donc $f_n = 0$ pour tout n . La même conclusion est vraie avec, par exemple, $A = 1$. L'existence d'une constante positive indépendante de n est donc établie dans tous les cas.

Méthode 2 — Utiliser directement Cauchy-Schwarz sur les poids.

La propriété de Lipschitz de (a) donne :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq k \sum_{j=0}^n \left| \frac{j}{n} - x \right| w_{n,j}(x).$$

On applique Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n+1}$ aux familles $\left(\left| \frac{j}{n} - x \right| \sqrt{w_{n,j}(x)} \right)_j$ et $\left(\sqrt{w_{n,j}(x)} \right)_j$. Les poids sont positifs ou nuls, donc les racines carrées sont définies. Il vient :

$$\sum_{j=0}^n \left| \frac{j}{n} - x \right| w_{n,j}(x) \leq \left(\sum_{j=0}^n \left(\frac{j}{n} - x \right)^2 w_{n,j}(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^n w_{n,j}(x) \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$

Ainsi :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{k}{2\sqrt{n}} \leq \frac{k/2}{n^{1/3}} \quad (n \geq 1).$$

On peut donc prendre $A = k/2 > 0$. Cette seconde méthode donne même une vitesse en $n^{-1/2}$ pour les fonctions Lipschitziennes. La première méthode répond à l'optimisation proposée dans l'énoncé ; la seconde exploite directement la somme des carrés des écarts obtenue en I-4.

Dans les deux méthodes, la majoration indépendante de x tend vers 0. Elle permet de retrouver la limite des intégrales sans échanger automatiquement une limite et une intégrale :

$$\left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

On conclut à nouveau que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ sous l'hypothèse C^1 de cette question.

3. On suppose f de classe C^2 sur $[0, 1]$.

a)

La dérivée seconde est continue sur le segment, donc $M_2(f) = \sup_{[0,1]} |f''|$ est un réel fini positif ou nul.

Méthode 1 — Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

La fonction f est de classe C^2 sur le segment dont les extrémités sont x et x' . L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre un, avec $|f''| \leq M_2(f)$ sur ce segment, donne :

$$|f(x') - f(x) - (x' - x)f'(x)| \leq \frac{M_2(f)}{2}|x' - x|^2.$$

Si $x' = x$, les deux membres sont nuls ; l'inégalité vaut donc pour tous $x, x' \in [0, 1]$.

Méthode 2 — Utiliser le reste intégral.

Posons $\delta = x' - x$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre un, suivie du changement de variable affine $t = x + s\delta$, s'écrit :

$$f(x') - f(x) - \delta f'(x) = \delta^2 \int_0^1 (1-s) f''(x + s\delta) ds.$$

Cette formule est valable pour $\delta > 0$ et $\delta < 0$; pour $\delta = 0$, l'identité est également vérifiée. Tous les points $x + s\delta$ appartiennent au segment d'extrémités x, x' , donc à $[0, 1]$. En prenant les valeurs absolues :

$$|f(x') - f(x) - \delta f'(x)| \leq \delta^2 M_2(f) \int_0^1 (1-s) ds = \frac{M_2(f)}{2} \delta^2.$$

On retrouve l'estimation demandée. La première méthode utilise directement une inégalité du cours ; la seconde exprime l'erreur par une intégrale et explique le facteur $1/2$.

b)

Pour chaque $x \in [0, 1]$, posons :

$$R_k(x) = f(k/n) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x).$$

L'inégalité de (a) donne $|R_k(x)| \leq \frac{M_2(f)}{2}(k/n - x)^2$. D'autre part, I-1 et I-4 donnent :

$$\sum_{k=0}^n w_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) w_{n,k}(x) = 0.$$

La dernière somme est nulle car

$$\sum_k (k/n) w_{n,k}(x) = x.$$

Le terme linéaire de Taylor s'annule donc exactement après pondération :

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n R_k(x) w_{n,k}(x).$$

Par positivité des poids et par la relation (3) :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \frac{M_2(f)}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 w_{n,k}(x) \\ &= \frac{M_2(f)x(1-x)}{2n} \\ &\leq \frac{M_2(f)}{8n}. \end{aligned}$$

La borne est indépendante de x , donc :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{M_2(f)}{8n}.$$

Pour montrer que la constante ne peut pas être améliorée en général, prenons $f(x) = x^2$.

Cette fonction est de classe C^2 et $M_2(f) = 2$. La partie I a établi :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4n} = \frac{M_2(f)}{8n}.$$

L'égalité est réalisée en $x = 1/2$ pour chaque $n \geq 1$. Aucun coefficient strictement inférieur à $1/8$ devant $M_2(f)/n$ ne peut donc convenir à toutes les fonctions de classe C^2 . La majoration est optimale au sens demandé.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation mathématique nécessaire. La numérotation IV-2.a), IV-2.b), IV-2.d) est conservée telle qu'elle figure dans le PDF ; celui-ci ne comporte pas de question IV-2.c).