



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1987

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de $\ln 2$ par des nombres rationnels, qui fait l'objet de la partie III. À cet effet, on établit dans les parties I et II une formule interpolatoire pour le calcul d'une intégrale.

Notations

1. Pour toute fonction réelle f de classe C^k sur un intervalle J , on note $f^{(0)} = f$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k$, $f^{(i)}$ la dérivée d'ordre i de f .
2. Pour tout entier naturel n , E_n désigne l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On munit E_n du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

et de la norme euclidienne associée

$$\|P\| = \sqrt{\int_0^1 P^2(t) dt}.$$

On confond dans la suite polynôme et fonction polynomiale associée.

3. On définit les trois suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$U_0(x) = 1, \quad U_n(x) = \frac{x^n(x-1)^n}{n!} \quad (n \geq 1, x \in \mathbb{R}),$$

$$P_n(x) = U_n^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}),$$

$$Q_n(x) = \int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} dt \quad (n \in \mathbb{N}, x > 1).$$

Partie I — Étude des polynômes P_n et Q_n

I.1.a. Expliciter P_0 , P_1 et P_2 .

I.1.b. Montrer que P_n est un polynôme de degré n et préciser le coefficient de X^n dans P_n .

I.1.c. Comparer $U_n(1-x)$ à $U_n(x)$, puis $P_n(1-x)$ à $P_n(x)$.

I.2. Relation de récurrence entre les polynômes P_n

I.2.a. Vérifier que

$$U'_{n+1}(x) = (2x-1)U_n(x) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (1)$$

$$U''_{n+1}(x) = 2(2n+1)U_n(x) + U_{n-1}(x) \quad (n \geq 1). \quad (2)$$

I.2.b. En dérivant n fois (1) et $n-1$ fois (2), démontrer que

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (3)$$

I.3. Orthogonalité des polynômes P_n

I.3.a. Pour $n \geq 1$, calculer $U_n^{(k)}(1)$ et $U_n^{(k)}(0)$ si $0 \leq k \leq n-1$.

I.3.b. Montrer, à l'aide d'intégrations par parties successives, que, si f est une fonction réelle de classe C^n sur $[0, 1]$,

$$\int_0^1 f(t)P_n(t) dt = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(t)U_n(t) dt. \quad (4)$$

En déduire que, si $n \geq 1$, pour tout polynôme $Q \in E_{n-1}$,

$$\int_0^1 Q(t)P_n(t) dt = 0. \quad (5)$$

I.3.c. Prouver enfin que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E_n .

I.4. Calcul de la norme du polynôme P_n

I.4.a. On pose $I_n = \int_0^1 U_n(t) dt$. Utiliser (2) pour obtenir, pour $n \geq 1$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . En déduire la valeur de I_n .

I.4.b. Calculer $\|P_n\|$ en utilisant (4).

I.5. Étude des racines de P_n

On suppose $n \geq 1$ et on se propose de démontrer que P_n admet n racines distinctes appartenant à $]0, 1[$.

I.5.a. Que vaut $\int_0^1 P_n(t) dt$? P_n peut-il conserver un signe constant sur $[0, 1]$? En déduire que P_n admet au moins une racine d'ordre impair appartenant à $]0, 1[$.

I.5.b. Soient $x_1, \dots, x_k$ les racines d'ordre impair de P_n appartenant à $]0, 1[$. Montrer que

$$\int_0^1 \left[\prod_{i=1}^k (t - x_i) \right] P_n(t) dt$$

est non nulle et, à l'aide de (5), prouver que $k = n$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $(x_1, \dots, x_n)$ les racines de P_n rangées dans l'ordre croissant.

I.6. Minoration de P_n

I.6.a. Comparer x_i et x_{n+1-i} pour $1 \leq i \leq n$, en utilisant I.1.c. En déduire que

$$P_n^2(x) = \binom{2n}{n}^2 \prod_{i=1}^n [x(x-1) + x_i(1-x_i)].$$

I.6.b. Que vaut $\sup_{0 \leq x \leq 1} x(1-x)$? En déduire, par une majoration simple de $|I_n|$, que

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n+1}.$$

I.6.c. Prouver que, pour $x \geq 1$,

$$P_n(x) \geq \frac{[4\sqrt{x(x-1)}]^n}{2n+1}.$$

I.7. Étude de la suite (Q_n)

I.7.a. Expliciter Q_0 , Q_1 et Q_2 . Montrer que, pour tout entier n , Q_n est la restriction à $]1, +\infty[$ d'un polynôme à coefficients rationnels, dont on donnera le degré. Dans la suite, Q_n désigne également son unique prolongement polynomial à $\mathbb{R}$.

I.7.b. Démontrer, en utilisant (3), que

$$(n+1)Q_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)Q_n(x) + nQ_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (6)$$

Partie II — Calcul de l'intégrale d'un polynôme par interpolation

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 1.

II.1. Détermination d'une formule interpolatoire

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on appelle L_i le polynôme défini par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

II.1.a. Pour $1 \leq j \leq n$, calculer $L_i(x_j)$. En déduire que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de E_{n-1} . Quelles sont les coordonnées d'un polynôme $P \in E_{n-1}$ dans cette base?

II.1.b. Prouver l'existence de réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) \quad (P \in E_{n-1}). \quad (7)$$

II.1.c. Établir que, pour $x \neq x_i$,

$$L_i(x) = \frac{1}{P'_n(x_i)} \frac{P_n(x)}{x - x_i}.$$

II.1.d. En déduire que

$$\lambda_i = \frac{Q_n(x_i)}{P'_n(x_i)}. \quad (8)$$

II.2. Extension de la formule interpolatoire

II.2.a. Soit $P \in E_{2n-1}$ et R le reste de sa division euclidienne par P_n . Montrer que

$$\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 R(t) dt.$$

II.2.b. En déduire que (7) reste valable si $P \in E_{2n-1}$.

II.3. Applications de cette formule

II.3.a. Si $0 \leq k \leq 2n - 1$, que vaut

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k$$

?

II.3.b. En remarquant que $P_n^2(X) - \binom{2n}{n} X^{2n}$ appartient à E_{2n-1} , calculer

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2n}.$$

II.3.c. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lambda_i = \int_0^1 L_i^2(t) dt.$$

En déduire que $\lambda_i > 0$.

Partie III — Application à la détermination de valeurs approchées de $\ln 2$

On se propose de démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2 - x_i}$$

converge vers $\ln 2 = \int_0^1 \frac{dt}{2-t}$, et d'étudier sa vitesse de convergence. Les poids λ_i et les racines x_i sont ceux correspondant à P_n .

III.1. Convergence de $(u_n)_{n \geq 1}$

III.1.a. En remarquant que, pour $x \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^k}{2^{k+1}} + \frac{x^{2n}}{4^n(2-x)},$$

démontrer que

$$u_n - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k2^k} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)}$$

et que

$$\ln 2 - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{4^n} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2-t} dt.$$

III.1.b. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$|\ln 2 - u_n| < \frac{2}{(2n+1)4^n}.$$

Conclure.

III.2. Autre expression de u_n

Montrer, en décomposant Q_n dans la base $(L_1, \dots, L_n)$ de E_{n-1} et en utilisant (8), que

$$u_n = \frac{Q_n(2)}{P_n(2)} \quad (n \geq 1).$$

En déduire que u_n est rationnel.

III.3. Relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}

Utiliser (3) et (6) pour simplifier $Q_{n+1}(2)P_n(2) - Q_n(2)P_{n+1}(2)$. En déduire que

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)} \quad (n \geq 1).$$

III.4. Rapidité de convergence de $(u_n)_{n \geq 1}$

III.4.a. Montrer, en considérant $Q_n(2)$, que

$$\ln 2 - u_n = \frac{1}{P_n(2)} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t} dt.$$

III.4.b. En déduire, en remarquant que

$$\int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(2)}{t-2} P_n(t) dt = 0,$$

que

$$\ln 2 - u_n = \frac{1}{P_n^2(2)} \int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2-t} dt.$$

III.4.c. Démontrer les inégalités

$$0 < \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)} \leq \frac{2n+1}{32^n}.$$

III.5. Application numérique

Dresser un tableau donnant, pour $n = 1, 2, 3, 4$, u_n sous forme irréductible et sous forme décimale approchée, ainsi qu'un majorant de $\ln 2 - u_n$.