



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1987

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I — Étude des polynômes P_n et Q_n

On utilise la convention $0! = 1$ et la valeur 1 pour un produit vide. Toutes les intégrales de cette partie portent sur des fonctions continues sur $[0, 1]$, donc existent.

Le produit scalaire annoncé est bien défini : l'intégrale est bilinéaire et symétrique, et $\int_0^1 P^2(t) dt \geq 0$. Si cette intégrale est nulle, la continuité et la positivité de P^2 imposent $P(t) = 0$ sur tout le segment : une valeur strictement positive donnerait une intégrale positive sur un petit intervalle. Un polynôme qui s'annule sur un intervalle est nul. La forme est donc définie positive.

I.1.a. Premiers polynômes

On calcule les dérivées demandées à partir de la définition :

$$U_0 = 1, \quad U_1(X) = X^2 - X, \quad U_2(X) = \frac{1}{2}(X^4 - 2X^3 + X^2).$$

Ainsi

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = 2X - 1, \quad P_2(X) = 6X^2 - 6X + 1.$$

I.1.b. Degré et coefficient dominant

Méthode 1 — Dériver le terme dominant

Le polynôme U_n a degré $2n$ et coefficient dominant $1/n!$, y compris pour $n = 0$. Pour $n \geq 1$, sa dérivée d'ordre n a donc degré n et coefficient dominant

$$\frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

Les termes de degré inférieur à $2n$ ne peuvent donner de terme de degré n après cette dérivation. Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ et le coefficient vaut aussi $\binom{0}{0} = 1$.

Méthode 2 — Développer par le binôme

La formule du binôme donne, pour tout $n \geq 0$,

$$U_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} X^{n+k}.$$

La dérivation d'ordre n de cette somme finie donne

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} X^k.$$

Le coefficient correspondant à $k = n$ vaut $\binom{2n}{n} > 0$, donc le degré est exactement n . Cette formule montre également que tous les coefficients de P_n sont entiers.

La première méthode suffit pour lire le degré et le coefficient dominant; la seconde fournit tous les coefficients et sera utile pour établir la rationalité de Q_n .

I.1.c. Symétrie par rapport à un demi

Pour tout réel x ,

$$(1-x)((1-x)-1) = (1-x)(-x) = x(x-1).$$

Donc $U_n(1-x) = U_n(x)$ pour tout $n \geq 0$. En dérivant n fois cette identité, la composition avec $x \mapsto 1-x$ donne un facteur $(-1)^n$:

$$(-1)^n U_n^{(n)}(1-x) = U_n^{(n)}(x).$$

Par conséquent,

$$P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Pour n pair, P_n est symétrique par rapport à $1/2$; pour n impair, il est antisymétrique par rapport à ce point.

I.2.a. Identités pour les dérivées de U_n

Posons $v(x) = x(x-1)$, de sorte que $v'(x) = 2x-1$. Pour $n \geq 0$,

$$U'_{n+1}(x) = \frac{(n+1)v^n(x)v'(x)}{(n+1)!} = (2x-1)U_n(x).$$

C'est (1). Pour $n \geq 1$, on a aussi $U'_n(x) = (2x-1)v^{n-1}(x)/(n-1)!$. En dérivant (1),

$$U''_{n+1}(x) = 2U_n(x) + (2x-1)^2 \frac{v^{n-1}(x)}{(n-1)!}.$$

Comme $(2x-1)^2 = 4v(x) + 1$, cette expression devient

$$2U_n(x) + 4nU_n(x) + \frac{v^{n-1}(x)}{(n-1)!} = 2(2n+1)U_n(x) + U_{n-1}(x).$$

On obtient (2). Aucun quotient par $v(x)$ n'a été utilisé; les identités sont donc valables aussi en $x=0$ et en $x=1$.

I.2.b. Récurrence des polynômes P_n

Fixons $n \geq 1$ et posons $A(x) = U_n^{(n-1)}(x)$. Dérivons n fois (1). La formule de Leibniz, avec les seules dérivées non nulles de $2x-1$, donne

$$P_{n+1}(x) = (2x-1)P_n(x) + 2nA(x).$$

En dérivant $n-1$ fois (2), on obtient

$$P_{n+1}(x) = 2(2n+1)A(x) + P_{n-1}(x).$$

Multiplions la première égalité par $2n+1$ et la seconde par n . Leur différence élimine A :

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)(2x-1)P_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

C'est exactement (3), pour tout réel x et tout $n \geq 1$.

I.3.a. Annulation aux extrémités

Le polynôme $U_n(X) = X^n(X-1)^n/n!$ possède les racines 0 et 1 de multiplicité n . Pour toute dérivée d'ordre $k < n$, les facteurs correspondant à ces racines ne sont pas entièrement éliminés.

On peut le vérifier par Leibniz : dans la dérivée d'ordre k du produit $X^n(X-1)^n$, chaque terme dérive X^n au plus $k < n$ fois et $(X-1)^n$ au plus $k < n$ fois. Chaque terme s'annule donc aux deux extrémités.

Ainsi, pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n-1$,

$$U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0.$$

I.3.b. Intégrations par parties et orthogonalité

Supposons $n \geq 1$ et $f \in C^n([0, 1])$. Pour $0 \leq r \leq n-1$, on peut intégrer par parties le produit $f^{(r)}U_n^{(n-r)}$: $f^{(r)}$ est de classe C^1 et les dérivées de U_n sont polynomiales.

On obtient

$$\int_0^1 f^{(r)}(t)U_n^{(n-r)}(t) dt = [f^{(r)}(t)U_n^{(n-r-1)}(t)]_0^1 - \int_0^1 f^{(r+1)}(t)U_n^{(n-r-1)}(t) dt.$$

Le terme aux bornes est nul par I.3.a, puisque $0 \leq n-r-1 \leq n-1$. En répétant ces n intégrations par parties,

$$\int_0^1 f(t)P_n(t) dt = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(t)U_n(t) dt.$$

Pour $n = 0$, la formule est simplement une égalité entre deux expressions identiques, puisque $P_0 = U_0 = 1$. On a établi (4).

Si $Q \in E_{n-1}$, sa dérivée d'ordre n est nulle. En appliquant (4) à $f = Q$, on conclut

$$\langle Q, P_n \rangle = \int_0^1 Q(t)P_n(t) dt = 0.$$

C'est (5).

I.3.c. Base orthogonale

Pour $0 \leq k < \ell \leq n$, P_k a degré $k \leq \ell-1$, donc appartient à $E_{\ell-1}$. Par (5), $\langle P_k, P_\ell \rangle = 0$. Par symétrie du produit scalaire, les polynômes sont deux à deux orthogonaux.

Ils sont tous non nuls, puisque chacun a le degré annoncé en I.1.b. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre : si

$$\sum_{k=0}^n a_k P_k = 0,$$

le produit scalaire avec P_j donne $a_j \|P_j\|^2 = 0$, donc $a_j = 0$.

La famille possède $n + 1$ éléments dans E_n , de dimension $n + 1$. C'est donc une base orthogonale de E_n .

I.4.a. Calcul de I_n

Pour $n \geq 1$, intégrons (2) sur $[0, 1]$. Par le théorème fondamental du calcul intégral,

$$U'_{n+1}(1) - U'_{n+1}(0) = 2(2n + 1)I_n + I_{n-1}.$$

Les valeurs du membre de gauche sont nulles par I.3.a appliqué à U_{n+1} , puisque $1 \leq n$.
Donc

$$I_n = -\frac{I_{n-1}}{2(2n + 1)}.$$

Comme $I_0 = \int_0^1 1 dt = 1$, la récurrence donne

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2^n \prod_{r=1}^n (2r + 1)}.$$

Dans $(2n + 1)!$, le produit des facteurs pairs est $2^n n!$ et le produit des facteurs impairs est

$$\prod_{r=1}^n (2r + 1).$$

Par conséquent,

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(2n + 1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n + 1)n! \binom{2n}{n}}.$$

Ces expressions valent également pour $n = 0$.

I.4.b. Norme de P_n

Méthode 1 — Utiliser les intégrations par parties

Appliquons (4) à $f = P_n$. Sa dérivée d'ordre n est constante et vaut, par I.1.b,

$$P_n^{(n)} = n! \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Ainsi

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} I_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}.$$

La norme étant positive, on conclut $\|P_n\| = 1/\sqrt{2n+1}$, pour tout $n \geq 0$.

Méthode 2 — Utiliser la récurrence et l'orthogonalité

La récurrence (3) donne, pour $n \geq 1$,

$$XP_n = \frac{n+1}{2(2n+1)} P_{n+1} + \frac{1}{2} P_n + \frac{n}{2(2n+1)} P_{n-1}.$$

En prenant le produit scalaire avec P_{n-1} , l'orthogonalité donne

$$\langle XP_n, P_{n-1} \rangle = \frac{n}{2(2n+1)} \|P_{n-1}\|^2.$$

Pour $n \geq 2$, la même récurrence au rang $n-1$ donne

$$\langle P_n, XP_{n-1} \rangle = \frac{n}{2(2n-1)} \|P_n\|^2.$$

Pour $n = 1$, cette dernière égalité reste vraie : $XP_0 = X = (P_1 + P_0)/2$, donc

$$\langle P_1, XP_0 \rangle = \|P_1\|^2/2.$$

Les deux produits scalaires sont égaux, puisque leurs intégrandes sont les mêmes. On peut diviser par $n/2 > 0$, d'où

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n-1}{2n+1} \|P_{n-1}\|^2.$$

Avec $\|P_0\|^2 = 1$, le produit est télescopique et donne $\|P_n\|^2 = 1/(2n+1)$, puis la même norme.

La première méthode suit la consigne et calcule directement la norme ; la seconde explique comment la récurrence à trois termes détermine les normes d'une famille orthogonale.

I.5.a. Une première racine d'ordre impair

Puisque $n \geq 1$, le polynôme constant 1 appartient à E_{n-1} . Par (5),

$$\int_0^1 P_n(t) dt = 0.$$

Le polynôme P_n est non nul. S'il était positif ou nul sur tout le segment, il serait strictement positif sur un petit intervalle, par continuité et parce qu'il ne peut s'annuler sur tout le segment ; son intégrale serait positive. Le même argument exclut un polynôme négatif ou nul partout. Il prend donc des valeurs strictement positives et strictement négatives dans $]0, 1[$.

Entre deux tels points, il possède des racines. Les racines sont en nombre fini. Au voisinage d'une racine a de multiplicité m , on écrit $P_n(X) = (X - a)^m S(X)$ avec $S(a) \neq 0$; par continuité, S conserve son signe près de a . Le signe de P_n change donc en a si et seulement si m est impair.

Comme le signe passe d'une valeur positive à une valeur négative entre les deux points choisis, au moins une racine intermédiaire est d'ordre impair. Elle appartient à $]0, 1[$.

I.5.b. Nombre et simplicité des racines

Soient $x_1, \dots, x_k$ les racines distinctes d'ordre impair dans $]0, 1[$, et posons

$$S(X) = \prod_{i=1}^k (X - x_i).$$

Par I.5.a, $k \geq 1$; comme P_n a degré n , $k \leq n$.

À chaque racine intérieure d'ordre impair de P_n , le produit SP_n possède une multiplicité paire, puisqu'on ajoute un facteur. À chaque racine intérieure d'ordre pair de P_n , S ne s'annule pas, et la multiplicité reste paire. Toutes les racines intérieures du produit sont donc d'ordre pair.

Le polynôme SP_n , non nul, ne change ainsi pas de signe sur $]0, 1[$. Il est strictement positif ou strictement négatif sur au moins un petit intervalle. Sa continuité implique alors

$$\int_0^1 S(t)P_n(t) dt \neq 0.$$

Si $k \leq n-1$, $S \in E_{n-1}$ et (5) imposerait au contraire une intégrale nulle. C'est impossible. Donc $k = n$.

Le polynôme P_n de degré n possède ainsi n racines distinctes dans $]0, 1[$. Elles sont nécessairement simples, car la somme de leurs multiplicités ne peut dépasser n , et il ne reste aucune autre racine.

Dans la suite, on les range suivant $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$.

I.6.a. Symétrie des racines et factorisation

Si $P_n(x_i) = 0$, I.1.c donne $P_n(1 - x_i) = 0$. Les nombres $1 - x_i$ parcourent donc les mêmes racines, mais dans l'ordre décroissant. Ainsi

$$x_{n+1-i} = 1 - x_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Posons $c_n = \binom{2n}{n} > 0$. Par I.1.b et I.5.b,

$$P_n(x) = c_n \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Le produit des facteurs $x - (1 - x_i)$ est le même que celui des facteurs $x - x_i$, puisqu'il

s'agit d'une permutation. Donc

$$P_n^2(x) = c_n^2 \prod_{i=1}^n (x - x_i)(x - 1 + x_i).$$

Or $(x - x_i)(x - 1 + x_i) = x(x - 1) + x_i(1 - x_i)$. On en déduit

$$P_n^2(x) = \binom{2n}{n}^2 \prod_{i=1}^n [x(x - 1) + x_i(1 - x_i)].$$

Cette identité est valable pour tout réel x , y compris lorsque n est impair et que la racine centrale est $1/2$.

I.6.b. Minoration du coefficient binomial

Pour $0 \leq x \leq 1$,

$$x(1 - x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

L'égalité a lieu en $x = 1/2$, donc le supremum vaut $1/4$.

Sur le segment, $U_n(t) = (-1)^n [t(1 - t)]^n / n!$ a un signe constant. Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$|I_n| = \frac{1}{n!} \int_0^1 [t(1 - t)]^n dt \leq \frac{1}{n!4^n}.$$

En remplaçant $|I_n|$ par la valeur de I.4.a,

$$\frac{1}{(2n + 1)n! \binom{2n}{n}} \leq \frac{1}{n!4^n}.$$

Toutes les quantités multipliées sont strictement positives. On obtient donc

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n + 1}.$$

Pour $n = 0$, cette dernière inégalité est aussi vraie, avec égalité.

I.6.c. Minoration à droite du segment

Pour $x \geq 1$, tous les facteurs $x - x_i$ sont strictement positifs, puisque $x_i < 1$. La factorisation de I.6.a donne donc $P_n(x) > 0$.

De plus, chaque $x_i(1 - x_i) > 0$ et $x(x - 1) \geq 0$. Ainsi

$$P_n^2(x) \geq c_n^2 [x(x - 1)]^n.$$

En prenant la racine carrée positive et en utilisant I.6.b,

$$P_n(x) \geq c_n [x(x - 1)]^{n/2} \geq \frac{4^n [x(x - 1)]^{n/2}}{2n + 1} = \frac{[4\sqrt{x(x - 1)}]^n}{2n + 1}.$$

La formule couvre aussi $x = 1$: le membre de droite est nul, tandis que $P_n(1) > 0$.

I.7.a. Expression et prolongement polynomial de Q_n

Question adaptée au programme actuel : on explicite le prolongement polynomial utilisé dans la suite du problème. La définition initiale de Q_n porte sur $x > 1$. Le quotient polynomial ci-dessous établit son unique prolongement à tout réel, qui permet ensuite les évaluations $Q_n(x_i)$ dans la partie II.

D'après I.1.a,

$$Q_0(x) = 0,$$

$$Q_1(x) = \int_0^1 \frac{2t - 2x}{t - x} dt = 2,$$

$$Q_2(x) = \int_0^1 [6(t + x) - 6] dt = 6x - 3.$$

Pour le cas général, écrivons

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n c_m X^m.$$

Les coefficients sont entiers par la formule explicite de I.1.b. Pour $m \geq 1$, l'identité de

différence de puissances donne

$$\frac{t^m - x^m}{t - x} = \sum_{s=0}^{m-1} t^{m-1-s} x^s \quad (t \neq x).$$

Pour $x > 1$, on peut donc intégrer cette somme finie sur $[0, 1]$:

$$Q_n(x) = \sum_{m=1}^n c_m \sum_{s=0}^{m-1} \frac{x^s}{m-s}.$$

C'est un polynôme à coefficients rationnels. Pour $n \geq 1$, son terme de degré $n-1$ ne provient que de $m=n$, $s=n-1$, et son coefficient est $c_n = \binom{2n}{n} \neq 0$. Ainsi $\deg Q_n = n-1$. Pour $n=0$, Q_0 est le polynôme nul, qui n'a pas de degré entier.

Ce polynôme est l'unique prolongement polynomial de la fonction définie sur $]1, +\infty[$: deux prolongements auraient une différence nulle sur un intervalle, donc un polynôme identiquement nul.

Pour un réel x quelconque, l'intégrande peut être défini par le quotient après simplification, même si $t = x$. C'est alors un polynôme en t et l'intégrale redonne ce prolongement. En particulier, lorsque $x = x_i$,

$$Q_n(x_i) = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{t - x_i} dt,$$

le quotient étant le polynôme obtenu en divisant P_n par son facteur $X - x_i$, et non une fonction laissée indéfinie en $t = x_i$.

I.7.b. Récurrence de Q_n

Pour $n \geq 1$, appliquons (3) en t et en x , soustrayons les deux égalités puis divisons par $t - x$. Pour le terme central, on utilise

$$(2t-1)P_n(t) - (2x-1)P_n(x) = (2x-1)[P_n(t) - P_n(x)] + 2(t-x)P_n(t).$$

En intégrant, d'abord pour $x > 1$, on obtient

$$(n+1)Q_{n+1}(x) = (2n+1)(2x-1)Q_n(x) + 2(2n+1) \int_0^1 P_n(t) dt - nQ_{n-1}(x).$$

L'intégrale de P_n est nulle par I.5.a. Par conséquent,

$$(n+1)Q_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)Q_n(x) + nQ_{n-1}(x) = 0.$$

Les deux membres sont polynomiaux ; l'égalité établie sur $]1, +\infty[$ est donc valable pour tout réel x . C'est (6).

Partie II — Calcul de l'intégrale d'un polynôme par interpolation

Dans cette partie, $n \geq 1$ est fixé. Les racines $x_1, \dots, x_n$ de P_n sont simples et distinctes ; les dénominateurs $x_i - x_j$ qui définissent les L_i sont donc non nuls.

II.1.a. Base d'interpolation et coordonnées

Pour $1 \leq i, j \leq n$, si $j = i$, tous les facteurs du produit valent 1, donc $L_i(x_i) = 1$. Si $j \neq i$, le facteur correspondant à cette racine est nul, donc $L_i(x_j) = 0$.

Méthode 1 — Évaluations et dimension

Chaque L_i appartient à E_{n-1} . Si

$$\sum_{i=1}^n a_i L_i = 0,$$

l'évaluation en x_j donne $a_j = 0$ pour chaque j . La famille est libre et possède n éléments dans l'espace E_{n-1} , de dimension n . C'est une base.

Si

$$P = \sum_{i=1}^n a_i L_i,$$

la même évaluation donne $a_j = P(x_j)$. Les coordonnées sont donc $(P(x_1), \dots, P(x_n))$ et

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i(X).$$

Méthode 2 — Nombre de racines de la différence

Pour $P \in E_{n-1}$, posons

$$R = P - \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i.$$

Il a degré au plus $n - 1$ et s'annule aux n points distincts x_j . Il est donc nul. On retrouve la formule d'interpolation, qui prouve que la famille engendre E_{n-1} . Comme elle comporte n éléments dans un espace de dimension n , c'est une base.

Les coordonnées sont encore les valeurs $P(x_i)$, puisque l'évaluation d'une décomposition en x_i en donne nécessairement le coefficient correspondant.

La première méthode établit la liberté; la seconde construit directement l'interpolant et utilise le degré de sa différence avec P . Pour $n = 1$, le produit vide donne $L_1 = 1$, et toutes les conclusions restent valables.

II.1.b. Construction des poids

En intégrant la formule d'interpolation, une somme finie, on obtient

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^n P(x_i) \int_0^1 L_i(t) dt.$$

Il suffit donc de définir

$$\lambda_i = \int_0^1 L_i(t) dt \quad (1 \leq i \leq n)$$

pour obtenir (7). Ces nombres sont réels. Ils sont même uniques : en appliquant (7) à $P = L_i$, on retrouve nécessairement cette valeur de λ_i .

II.1.c. Expression de L_i à l'aide de P_n

Avec $c_n = \binom{2n}{n}$, la factorisation et sa dérivation en x_i donnent

$$P_n(X) = c_n(X - x_i) \prod_{j \neq i} (X - x_j), \quad P'_n(x_i) = c_n \prod_{j \neq i} (x_i - x_j).$$

Le second produit est non nul, puisque les racines sont distinctes. Pour $x \neq x_i$, en divisant les deux expressions,

$$\frac{1}{P'_n(x_i)} \frac{P_n(x)}{x - x_i} = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = L_i(x).$$

Après simplification par le facteur $X - x_i$, cette identité est aussi une identité de polynômes, donc se prolonge en $x = x_i$.

II.1.d. Expression des poids par Q_n

L'identité polynomiale de II.1.c et II.1.b donnent

$$\lambda_i = \frac{1}{P'_n(x_i)} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{t - x_i} dt.$$

Le quotient est polynomial, car x_i est une racine de P_n . Par le prolongement établi en I.7.a, l'intégrale vaut $Q_n(x_i)$. Comme $P'_n(x_i) \neq 0$, la division est permise et

$$\lambda_i = \frac{Q_n(x_i)}{P'_n(x_i)}.$$

C'est (8). Il n'y a aucune intégrale impropre au point x_i : le facteur responsable de l'écriture apparente $0/0$ a été simplifié.

II.2.a. Division euclidienne et intégrale du reste

La division euclidienne par le polynôme non nul P_n donne $P = AP_n + R$, où $\deg R < n$ ou $R = 0$. Comme $\deg P \leq 2n - 1$, le quotient A appartient à E_{n-1} .

En effet, si $A \neq 0$, $\deg(AP_n) = \deg A + n$. Ce terme dominant ne peut être annulé par R , de degré inférieur à n ; ainsi $\deg A = \deg P - n \leq n - 1$. Si $\deg P < n$, $A = 0$ et $R = P$.

Par (5), $\int_0^1 A(t)P_n(t) dt = 0$. Donc

$$\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 R(t) dt.$$

II.2.b. Exactitude jusqu'au degré $2n - 1$

Aux racines de P_n , la division donne $P(x_i) = R(x_i)$. Puisque $R \in E_{n-1}$, (7) et II.2.a donnent

$$\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 R(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

La formule (7) est donc exacte pour tout $P \in E_{2n-1}$.

II.3.a. Moments jusqu'au degré $2n - 1$

Pour $0 \leq k \leq 2n - 1$, le monôme X^k appartient à E_{2n-1} . Par II.2.b,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}.$$

En particulier, pour $k = 0$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

II.3.b. Moment d'ordre $2n$

Posons $c_n = \binom{2n}{n}$. Le polynôme P_n^2 a degré $2n$ et coefficient dominant c_n^2 . Le polynôme $H = P_n^2 - c_n^2 X^{2n}$ appartient donc à E_{2n-1} .

Son intégrale vaut, par I.4.b,

$$\int_0^1 H(t) dt = \frac{1}{2n+1} - \frac{c_n^2}{2n+1}.$$

Aux nœuds, $H(x_i) = -c_n^2 x_i^{2n}$. La formule II.2.b donne donc

$$\frac{1 - c_n^2}{2n+1} = -c_n^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2n}.$$

Comme $c_n > 0$, on peut diviser et conclure

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2n} = \frac{1}{2n+1} \left(1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}^2} \right).$$

Pour $n \geq 1$, cette somme est strictement comprise entre 0 et $1/(2n+1)$, car $c_n \geq 2$.

II.3.c. Positivité des poids

Le polynôme L_i^2 a degré au plus $2n-2$, donc appartient à E_{2n-1} . La formule exacte de II.2.b donne

$$\int_0^1 L_i^2(t) dt = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_i^2(x_j) = \lambda_i,$$

car $L_i(x_j)$ vaut 1 si $j = i$ et 0 sinon.

L'intégrande est positive ou nulle et continue. Puisque $L_i(x_i) = 1$ et $x_i \in]0, 1[$, elle est strictement positive sur un petit intervalle autour de x_i . Son intégrale est donc strictement positive. Ainsi $\lambda_i > 0$ pour tout i .

Partie III — Application à la détermination de valeurs approchées de $\ln 2$

Pour chaque n , les racines x_i et les poids λ_i dépendent de ce n . Tous les dénominateurs $2 - x_i$ sont strictement positifs, puisque $0 < x_i < 1$.

La fonction $t \mapsto 1/(2 - t)$ est continue sur $[0, 1]$ et a pour primitive $-\ln(2 - t)$. Ainsi

$$\int_0^1 dt/(2 - t) = \ln 2.$$

III.1.a. Identités issues d'une somme géométrique

Pour $x \in [0, 1]$, le réel $x/2$ est différent de 1. La somme géométrique finie donne

$$\frac{1}{2 - x} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{x}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \frac{(x/2)^{2n}}{1 - x/2} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^k}{2^{k+1}} + \frac{x^{2n}}{4^n(2 - x)}.$$

Appliquons cette égalité aux nœuds, multiplions par λ_i et sommons. Par II.3.a,

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2 - x_i)} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2 - x_i)}.$$

Après le changement d'indice $r = k + 1$, on obtient la première identité :

$$u_n - \sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{r2^r} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2 - x_i)}.$$

Intégrons maintenant l'identité géométrique sur $[0, 1]$. Tous les termes sont continus et la somme est finie. Comme $\int_0^1 t^k dt = 1/(k+1)$,

$$\ln 2 - \sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{r2^r} = \frac{1}{4^n} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2 - t} dt.$$

Il n'y a ici aucun recours à un développement en série infinie ni à un échange de limite et d'intégrale.

III.1.b. Convergence de u_n

Notons

$$s_n = \sum_{r=1}^{2n} 1/(r2^r)$$

et posons $a_n = \ln 2 - s_n$, $b_n = u_n - s_n$. Les deux identités précédentes et la positivité des poids donnent $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

Sur $[0, 1]$, $1/(2 - t) \leq 1$, donc

$$a_n \leq \frac{1}{4^n} \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{(2n+1)4^n}.$$

De même, $1/(2 - x_i) < 1$ et les poids sont strictement positifs. Par II.3.b,

$$b_n < \frac{1}{4^n} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2n} < \frac{1}{(2n+1)4^n}.$$

Ainsi

$$|\ln 2 - u_n| = |a_n - b_n| \leq a_n + b_n < \frac{2}{(2n+1)4^n}.$$

La borne tend vers zéro, puisqu'elle est au plus $2/4^n$. Par encadrement, $u_n \rightarrow \ln 2$.

III.2. Quotient de deux valeurs polynomiales

Par I.7.a, $Q_n \in E_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Sa décomposition dans la base d'interpolation est

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^n Q_n(x_i) L_i(x).$$

Pour $x = 2$, II.1.c donne

$$Q_n(2) = P_n(2) \sum_{i=1}^n \frac{Q_n(x_i)}{P'_n(x_i)(2-x_i)} = P_n(2) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2-x_i},$$

par (8). La factorisation de I.6.a assure $P_n(2) > 0$. On peut donc diviser :

$$u_n = \frac{Q_n(2)}{P_n(2)}.$$

Les coefficients de P_n sont entiers et ceux de Q_n sont rationnels. Leurs valeurs en l'entier 2 sont rationnelles, et $P_n(2) \neq 0$. Ainsi u_n est rationnel, même si les racines utilisées dans sa première définition ne le sont pas nécessairement.

III.3. Récurrence et croissance de u_n

Posons $p_n = P_n(2)$, $q_n = Q_n(2)$. Par (3) et (6), pour $n \geq 1$,

$$(n+1)p_{n+1} = 3(2n+1)p_n - np_{n-1},$$

$$(n+1)q_{n+1} = 3(2n+1)q_n - nq_{n-1}.$$

Notons $D_n = q_{n+1}p_n - q_n p_{n+1}$ pour $n \geq 0$. En multipliant la seconde récurrence par p_n et la première par q_n , puis en soustrayant,

$$(n+1)D_n = n(q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n) = nD_{n-1}.$$

Les valeurs initiales sont $p_0 = 1$, $p_1 = 3$, $q_0 = 0$, $q_1 = 2$. Donc $D_0 = 2$, et la récurrence donne

$$D_n = \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{1}{2} D_0 = \frac{2}{n+1}.$$

Par III.2 et la positivité des p_n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{q_{n+1}p_n - q_n p_{n+1}}{p_n p_{n+1}} = \frac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)}.$$

C'est la relation demandée. Son terme ajouté est strictement positif : la suite (u_n) est strictement croissante.

III.4.a. Première expression de l'erreur

La définition de Q_n peut être utilisée en $x = 2$ sans prolongement, car $2 > 1$. En changeant simultanément les signes au numérateur et au dénominateur,

$$Q_n(2) = \int_0^1 \frac{P_n(2) - P_n(t)}{2 - t} dt = P_n(2) \ln 2 - \int_0^1 \frac{P_n(t)}{2 - t} dt.$$

Comme $P_n(2) > 0$, la division par cette valeur et III.2 donnent

$$\ln 2 - u_n = \frac{1}{P_n(2)} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{2 - t} dt.$$

III.4.b. Expression positive de l'erreur

Le quotient $H(X) = (P_n(X) - P_n(2))/(X - 2)$ est un polynôme de degré $n - 1$, puisque le numérateur s'annule en 2 et a degré n . Il appartient donc à E_{n-1} .

Par (5),

$$0 = \int_0^1 H(t)P_n(t) dt = \int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(2)}{t - 2} P_n(t) dt.$$

Comme $t - 2 = -(2 - t)$, on peut écrire

$$0 = - \int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2 - t} dt + P_n(2) \int_0^1 \frac{P_n(t)}{2 - t} dt.$$

On en déduit

$$\int_0^1 \frac{P_n(t)}{2 - t} dt = \frac{1}{P_n(2)} \int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2 - t} dt.$$

En remplaçant dans III.4.a,

$$\ln 2 - u_n = \frac{1}{P_n^2(2)} \int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2 - t} dt.$$

III.4.c. Encadrement et vitesse de convergence

Le dénominateur $2 - t$ est strictement positif sur $[0, 1]$. Le polynôme P_n est non nul, donc l'intégrande de III.4.b est positive ou nulle et strictement positive sur un petit intervalle.

L'intégrale est strictement positive : $\ln 2 - u_n > 0$.

Comme $1/(2-t) \leq 1$ et $P_n^2(t) \geq 0$, I.4.b donne

$$\ln 2 - u_n \leq \frac{1}{P_n^2(2)} \int_0^1 P_n^2(t) dt = \frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)}.$$

Par I.6.c en $x = 2$,

$$P_n(2) \geq \frac{(4\sqrt{2})^n}{2n+1}.$$

Les deux membres sont positifs ; en élevant au carré puis en inversant,

$$\frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)} \leq \frac{2n+1}{(4\sqrt{2})^{2n}} = \frac{2n+1}{32^n}.$$

Ainsi

$$0 < \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)} \leq \frac{2n+1}{32^n}.$$

Cette dernière borne tend vers zéro. Elle est plus petite que celle de III.1.b dès $n \geq 1$: le rapport des deux bornes vaut $(2n+1)^2/(2 \cdot 8^n)$, inférieur à 1 au rang 1 et décroissant, puisque son rapport de deux termes successifs est $((2n+3)/(2n+1))^2/8 \leq 25/72 < 1$.

La suite fournit donc des approximations rationnelles croissantes, toutes strictement inférieures à $\ln 2$, avec l'erreur garantie ci-dessus.

III.5. Tableau numérique

On calcule les valeurs sans déterminer les racines. Les récurrences de III.3 donnent

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = \frac{9 \times 3 - 1}{2} = 13,$$

$$p_3 = \frac{15 \times 13 - 2 \times 3}{3} = 63, \quad p_4 = \frac{21 \times 63 - 3 \times 13}{4} = 321,$$

et

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = \frac{9 \times 2}{2} = 9,$$

$$q_3 = \frac{15 \times 9 - 2 \times 2}{3} = \frac{131}{3}, \quad q_4 = \frac{21 \times (131/3) - 3 \times 9}{4} = \frac{445}{2}.$$

Les quotients $u_n = q_n/p_n$ donnent les fractions du tableau. Elles sont irréductibles : les algorithmes d'Euclide donnent

$$\gcd(2, 3) = \gcd(9, 13) = \gcd(131, 189) = \gcd(445, 642) = 1.$$

On choisit comme majorant exact $m_n = 1/((2n + 1)p_n^2)$, fourni par III.4.c. Les décimales de u_n sont arrondies à douze chiffres après la virgule ; elles servent à lire l'approximation, tandis que les fractions restent les valeurs exactes.

n	u_n irréductible	Valeur décimale approchée de u_n	Majorant exact m_n de $\ln 2 - u_n$
1	$2/3$	0,666666666667	$1/27$
2	$9/13$	0,692307692308	$1/845$
3	$131/189$	0,693121693122	$1/27783$
4	$445/642$	0,693146417445	$1/927369$

L'encadrement de l'erreur résulte de III.4.c ; les majorants du tableau sont exacts.

Relevé des adaptations

I.7.a : explicitation du prolongement polynomial de Q_n à $\mathbb{R}$, après la preuve de son existence. La définition initiale pour $x > 1$ est conservée. Cette précision de domaine rend légitimes les évaluations $Q_n(x_i)$ utilisées à partir de II.1.d, avec simplification du quotient au point $t = x_i$. Aucune question n'est supprimée ni aucun résultat admis ajouté.