



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1986

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

La partie II, largement indépendante de la partie I, peut être abordée en admettant, au besoin, les résultats fournis par l'énoncé.

Question préliminaire

On considère un réel $x > 0$.

1. Calculer, en posant $t = \frac{1}{x} \tan u$,

$$I_1(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}.$$

2. Calcul d'une seconde intégrale.

- (a) Calculer, en posant $v = \cos u$,

$$I_2(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u \, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}.$$

- (b) En déduire que, lorsque $x \rightarrow 0^+$, $I_2(x) \sim -\ln x$.

Ces deux intégrales interviennent dans les questions qui suivent.

Partie I : Étude de l'application f

On définit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x \int_0^{\pi/2} \frac{u \, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}.$$

1. Une relation fonctionnelle.

- (a) Calculer $f(1)$.

- (b) Montrer que $f(x) + f(1/x)$ est indépendant de $x > 0$ et donner sa valeur. On pourra poser $u = \pi/2 - v$ dans l'intégrale donnant $f(1/x)$.

2. Détermination de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(a) Montrer que, pour $u \in [0, \pi/2]$, $u \leq \frac{\pi}{2} \sin u$.

(b) En déduire une majoration de $f(x)$ pour $0 < x < 1$, puis les deux limites demandées.

3. Dérivabilité de f .

(a) Soit ϕ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\phi(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{u \, du}{x \cos^2 u + \sin^2 u}.$$

Pour un réel $x > 0$ et un réel h tel que $0 < |h| < x/2$, on pose $A = x \cos^2 u + \sin^2 u$ et $B = h \cos^2 u$.

Utiliser la relation $\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{B}{A^2} + \frac{B^2}{A^2(A+B)}$ pour démontrer

$$\left| \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} + \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos^2 u \, du}{(x \cos^2 u + \sin^2 u)^2} \right| \leq |h| \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos^4 u \, du}{\left(\frac{x}{2} \cos^2 u + \sin^2 u\right)^3}.$$

En déduire que ϕ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$f'(x) = - \int_0^{\pi/2} \frac{u(x^2 \cos^2 u - \sin^2 u)}{(x^2 \cos^2 u + \sin^2 u)^2} \, du.$$

(c) Pour $x > 0$ fixé, quelle est la dérivée de la fonction ψ définie par

$$\psi(u) = \frac{\sin u \cos u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} ?$$

$$\text{En déduire } f'(x) = \int_0^{\pi/2} \psi(u) \, du.$$

(d) Calculer $f'(1)$, puis $f'(x)$ pour $x \neq 1$ en utilisant une primitive de ψ . La fonction f' est-elle continue en 1 ?

4. Autre expression de f .

(a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt.$$

Considérer $\int_y^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$ avec $0 < y < x$. En $t = 1$, l'intégrande est interprétée par son prolongement continu.

(b) Dresser le tableau de variation et construire la courbe représentative de f .

Partie II : Démonstration de la formule

$$\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}. \quad (2)$$

1. Calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(a) Montrer l'existence d'une unique fonction g continue sur $[0, 1]$ telle que, pour $0 < t < 1$,

$$g(t) = \frac{t \ln t}{t^2 - 1}.$$

Donner $g(0)$ et $g(1)$.

(b) Démontrer, en utilisant l'expression de f obtenue en I-4(a), que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(1) = - \sum_{p=0}^n \int_0^1 t^{2p} \ln t dt + \int_0^1 t^{2n+1} g(t) dt.$$

(c) Calculer $\int_0^1 t^{2p} \ln t \, dt$, où $p \in \mathbb{N}$.

(d) Dédurre de II-1(a) l'existence d'une constante K telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^1 t^{2n+1} g(t) \, dt \leq \frac{K}{2n+2}.$$

(e) En déduire que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

converge et donner la valeur de sa somme.

2. Une autre expression de π^2 .

(a) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

converge et calculer sa somme.

(b) En déduire la formule (2). On pourra considérer $\frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Détermination d'une valeur approchée de π^2 .

Pour $x > 0$, on pose $h(x) = \frac{2}{x(x+1)(2x+1)^2}$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$s_p = \sum_{n=1}^p \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}, \quad r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}.$$

(a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{p+1}^{+\infty} h(x) \, dx \leq r_p \leq \int_p^{+\infty} h(x) \, dx,$$

puis, en encadrant $h(x)$, que

$$\frac{1}{6(p+2)^3} \leq r_p \leq \frac{1}{6p^3}.$$

(b) Calculer une valeur approchée de s_6 à 10^{-4} près. En déduire une valeur approchée de π^2 à $5 \cdot 10^{-4}$ près.

(c) Donner l'ordre de grandeur de la valeur de p à utiliser pour obtenir, par la méthode précédente, une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près.

Partie III : Accélération de la convergence

La question III-4 peut être abordée directement : elle rappelle les résultats théoriques des questions III-1, III-2 et III-3, qui peuvent alors être admis pour cette question.

1. Démontrer que, pour tous $n, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{k=0}^q \frac{2^k k!}{(2n+1)(2n+3) \cdots (2n+2k+3)} \\ &+ \frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)^2(2n+3)(2n+5) \cdots (2n+2q+3)}. \end{aligned}$$

On pourra procéder par récurrence.

2. Calcul de

$$v_k = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2n+1)(2n+3) \cdots (2n+2k+3)},$$

pour $(k, p) \in \mathbb{N}^2$.

(a) En remarquant que

$$\frac{2(k+1)}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+1)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2k+3)},$$

simplifier, pour $N \geq p$,

$$\sum_{n=p}^N \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}.$$

(b) En déduire l'existence et la valeur de v_k .

3. Application à la détermination d'une valeur approchée de $\pi^2/8$.

(a) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, démontrer que, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^q v_k + R_q,$$

avec

$$R_q = 2^{q+1}(q+1)! \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2q+3)}.$$

(b) En majorant, pour $n \geq p$, $\frac{1}{(2n+1)^2}$ par $\frac{1}{(2p+1)(2n+1)}$, démontrer

$$0 \leq R_q \leq 2W_q, \quad W_q = \frac{q+1}{2p+1} v_q.$$

(c) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^q v_k + W_q$$

est une valeur approchée de $\pi^2/8$ à W_q près.

4. Détermination d'une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près.

(a) Écrire en Python un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près par la méthode précédente, ainsi que le plus petit entier q nécessaire à cette obtention, $p \in \mathbb{N}^*$ étant considéré comme paramètre.

On rappelle que

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^q v_k + W_q$$

est une valeur approchée de $\pi^2/8$ à W_q près, où

$$v_k = \frac{2^{k-1}k!}{k+1} \frac{1}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2p+2k+1)}, \quad W_q = \frac{q+1}{2p+1} v_q.$$

(b) Utiliser cet algorithme pour $p = 5$, $p = 10$ et $p = 15$. Donner dans chaque cas la valeur approchée de π^2 obtenue, avec toutes les décimales fournies par la machine, et la valeur de q utilisée.