



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1986

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Question préliminaire

Dans toute cette question, $x > 0$. Le dénominateur $x^2 \cos^2 u + \sin^2 u$ est au moins égal à $\min(x^2, 1) > 0$ sur $[0, \pi/2]$. Les deux intégrandes sont donc continues sur ce segment et leurs intégrales existent.

1. On suit le changement de variable imposé. Pour $0 \leq u \leq \beta < \pi/2$, posons $t = \tan u/x$.

Alors $\tan u = xt$, $du = x dt/(1 + x^2 t^2)$ et

$$x^2 \cos^2 u + \sin^2 u = \frac{x^2(1 + t^2)}{1 + x^2 t^2}.$$

Le changement de variable, effectué sur ce segment, donne

$$\int_0^\beta \frac{du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{1}{x} \int_0^{\tan \beta/x} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{x} \arctan(\tan \beta/x).$$

Quand $\beta \rightarrow \pi/2^-$, le membre de gauche tend vers $I_1(x)$ par continuité de l'intégrande, tandis que $\tan \beta/x \rightarrow +\infty$. Puisque $\arctan t \rightarrow \pi/2$, on conclut $I_1(x) = \pi/(2x)$.

2. Calcul de I_2 .

(a) Le changement de variable $v = \cos u$, avec $dv = -\sin u du$, transforme les bornes 0 et $\pi/2$ en 1 et 0. Il donne

$$I_2(x) = \int_0^1 \frac{dv}{1 + (x^2 - 1)v^2}.$$

Si $x = 1$, l'intégrande vaut 1, donc $I_2(1) = 1$.

Si $0 < x < 1$, posons $c = \sqrt{1 - x^2} \in]0, 1[$. La décomposition

$$\frac{1}{1 - c^2 v^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - cv} + \frac{1}{1 + cv} \right)$$

donne une primitive $(2c)^{-1} \ln((1 + cv)/(1 - cv))$. Les arguments des logarithmes sont positifs sur $[0, 1]$. Ainsi

$$I_2(x) = \frac{1}{2c} \ln \frac{1+c}{1-c} = \frac{1}{c} \ln \frac{1+c}{x},$$

car $(1-c)(1+c) = x^2$ et $x > 0$.

Si $x > 1$, posons $d = \sqrt{x^2 - 1} > 0$. La primitive $\arctan(dv)/d$ donne $I_2(x) = \arctan d/d$.

Ces trois expressions couvrent tous les réels $x > 0$.

(b) Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $c = \sqrt{1-x^2} \rightarrow 1$ et $-\ln x \rightarrow +\infty$. L'expression précédente donne

$$\frac{I_2(x)}{-\ln x} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\ln(1+c)}{-\ln x} \right) \rightarrow 1,$$

car $\ln(1+c) \rightarrow \ln 2$. Ainsi $I_2(x) \sim -\ln x$.

Partie I : Étude de f

Pour $x > 0$, l'intégrande définissant $f(x)$ est continue sur $[0, \pi/2]$, avec un dénominateur strictement positif. La fonction f est donc bien définie, et $f(x) > 0$.

1. Relation fonctionnelle.

(a) Pour $x = 1$, le dénominateur vaut 1. Par conséquent $f(1) = \int_0^{\pi/2} u \, du = \pi^2/8$.

(b) On réécrit d'abord

$$f(1/x) = x \int_0^{\pi/2} \frac{u \, du}{\cos^2 u + x^2 \sin^2 u}.$$

Le changement de variable affine $u = \pi/2 - v$, avec $\cos u = \sin v$ et $\sin u = \cos v$, donne

$$f(1/x) = x \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi/2 - v) \, dv}{x^2 \cos^2 v + \sin^2 v}.$$

En ajoutant l'intégrale de $f(x)$ et en utilisant la linéarité, on obtient

$$f(x) + f(1/x) = \frac{\pi x}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dv}{x^2 \cos^2 v + \sin^2 v} = \frac{\pi x}{2} I_1(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

La somme est donc constante sur $]0, +\infty[$.

2. Limites aux extrémités.

(a) Méthode 1 — Concavité du sinus.

Sur $[0, \pi/2]$, la dérivée seconde du sinus est $-\sin u \leq 0$, donc le sinus est concave. Son graphe est au-dessus de la corde joignant $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$. Cela donne $\sin u \geq 2u/\pi$, soit $u \leq (\pi/2) \sin u$.

Méthode 2 — Variations du quotient $\sin u/u$.

Pour $u > 0$, la dérivée de ce quotient a le signe de $u \cos u - \sin u$. Posons $j(u) = \sin u - u \cos u$. On a $j(0) = 0$ et $j'(u) = u \sin u \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$. Ainsi $j(u) \geq 0$ et $\sin u/u$ est décroissant sur $]0, \pi/2]$. Il est donc au moins égal à sa valeur en $\pi/2$, qui est $2/\pi$. L'inégalité en découle pour $u > 0$ et vaut aussi en 0.

La première méthode exprime une propriété géométrique de concavité; la seconde utilise seulement le signe de dérivées.

(b) Comme le dénominateur est strictement positif, l'inégalité précédente peut être intégrée. Pour $0 < x < 1$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\pi x}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u \, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\pi x}{2} I_2(x).$$

L'équivalent préliminaire donne $x I_2(x) \sim -x \ln x$, et $-x \ln x \rightarrow 0$ par croissance comparée. L'encadrement entraîne $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

La relation de I-1(b) s'écrit $f(x) = \pi^2/4 - f(1/x)$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $1/x \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi^2/4$.

3. Dérivabilité.

(a) On établit la dérivabilité par l'identité algébrique demandée, sans invoquer de dérivation sous l'intégrale. Pour $x > 0$ fixé et $0 < |h| < x/2$, les trois quantités

$$A = x \cos^2 u + \sin^2 u, \quad A + B = (x + h) \cos^2 u + \sin^2 u, \quad C = \frac{x}{2} \cos^2 u + \sin^2 u$$

sont strictement positives. En outre, $A \geq C$ et $A + B \geq C$, puisque $x + h > x/2$.

En multipliant l'identité de l'énoncé par u , puis en divisant par h , on obtient

$$\frac{u}{h} \left(\frac{1}{A+B} - \frac{1}{A} \right) = -\frac{u \cos^2 u}{A^2} + h \frac{u \cos^4 u}{A^2(A+B)}.$$

Tous les intégrandes sont continus sur le segment. La linéarité puis l'inégalité triangulaire donnent

$$\left| \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} + \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos^2 u}{A^2} du \right| \leq |h| \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos^4 u}{A^2(A+B)} du \leq |h| \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos^4 u}{C^3} du.$$

C'est l'inégalité demandée. Pour en tirer une limite, posons $m = \min(x/2, 1) > 0$.

Comme $C \geq m$ et $0 \leq \cos^4 u \leq 1$, la dernière intégrale est au plus égale à

$$m^{-3} \int_0^{\pi/2} u du = \pi^2/(8m^3), \text{ indépendamment de } h.$$

Le membre de droite tend donc vers 0 quand $h \rightarrow 0$. Le taux d'accroissement possède une limite et

$$\phi'(x) = - \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos^2 u du}{(x \cos^2 u + \sin^2 u)^2}.$$

Le réel $x > 0$ étant quelconque, ϕ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) On a $f(x) = x\phi(x^2)$. La dérivabilité de ϕ établie en (a), les règles du produit et de la composition donnent

$$f'(x) = \phi(x^2) + 2x^2\phi'(x^2).$$

En regroupant les deux intégrales sur un dénominateur commun $D(u)^2$, où

$D(u) = x^2 \cos^2 u + \sin^2 u$, on obtient

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{u(D(u) - 2x^2 \cos^2 u)}{D(u)^2} du = - \int_0^{\pi/2} \frac{u(x^2 \cos^2 u - \sin^2 u)}{(x^2 \cos^2 u + \sin^2 u)^2} du.$$

Ainsi f est dérivable sur tout son domaine, avec la formule demandée.

(c) Fixons $x > 0$. Le dénominateur D ne s'annule pas, donc ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment. Comme $D'(u) = 2(1 - x^2) \sin u \cos u$, la dérivation du quotient donne

$$\psi'(u) = \frac{(\cos^2 u - \sin^2 u)D(u) - 2(1 - x^2) \sin^2 u \cos^2 u}{D(u)^2}.$$

En développant le numérateur, il devient

$$x^2 \cos^4 u + (x^2 - 1) \sin^2 u \cos^2 u - \sin^4 u = x^2 \cos^2 u - \sin^2 u,$$

où l'on utilise $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$. Ainsi $\psi'(u) = (x^2 \cos^2 u - \sin^2 u)/D(u)^2$.

La formule de (b) est donc $f'(x) = - \int_0^{\pi/2} u \psi'(u) du$. Une intégration par parties sur ce segment donne

$$f'(x) = -[u\psi(u)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \psi(u) du.$$

Les deux valeurs de bord de ψ sont nulles, car $\sin 0 = 0$ et $\cos(\pi/2) = 0$. Il reste

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \psi(u) du.$$

(d) Pour $x = 1$, $\psi(u) = \sin u \cos u$. La primitive $\sin^2 u/2$ donne $f'(1) = 1/2$.

Pour $x \neq 1$, on a $D'(u) = 2(1 - x^2) \sin u \cos u$. Comme $D(u) > 0$, une primitive de ψ est $\ln D(u)/(2(1 - x^2))$. Ainsi

$$f'(x) = \frac{\ln D(\pi/2) - \ln D(0)}{2(1 - x^2)} = \frac{0 - \ln(x^2)}{2(1 - x^2)} = \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$$

Pour la continuité en 1, on factorise $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. La définition de la dérivée du logarithme en 1 donne $\ln x / (x - 1) \rightarrow 1$. Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} = f'(1).$$

La fonction f' est donc continue en 1, et elle l'est sur le reste de $]0, +\infty[$ par son expression explicite. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine.

4. Autre expression et courbe.

(a) Précision locale de l'énoncé adapté : l'intégrande en $t = 1$ est prolongée par la valeur $1/2$, conformément à I-3(d). Notons $F(t) = \ln t / (t^2 - 1)$ pour $t \neq 1$ et $F(1) = 1/2$. La fonction F est continue sur $]0, +\infty[$ et $F = f'$.

Pour $0 < y < x$, le théorème fondamental du calcul intégral, applicable car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y, x]$, donne

$$\int_y^x F(t) dt = f(x) - f(y).$$

Par I-2(b), $f(y) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0^+$. Le membre de droite possède donc une limite finie. Cela justifie la convergence de l'intégrale impropre en 0 et donne

$$f(x) = \int_0^x F(t) dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt,$$

avec le prolongement annoncé en 1.

(b) Pour $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ et $x^2 - 1 < 0$, donc $f'(x) > 0$. Pour $x > 1$, ces deux quantités sont positives, donc $f'(x) > 0$ également. Enfin, $f'(1) = 1/2 > 0$. La fonction est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$1/2$	0
$f(x)$	0	$\nearrow \pi^2/8$	$\nearrow \pi^2/4$

Les limites de f sont celles de I-2(b). Pour la dérivée, la formule explicite donne

$f'(x) \rightarrow +\infty$ en 0^+ et $f'(x) \rightarrow 0$ à l'infini, par croissance comparée du logarithme et des puissances.

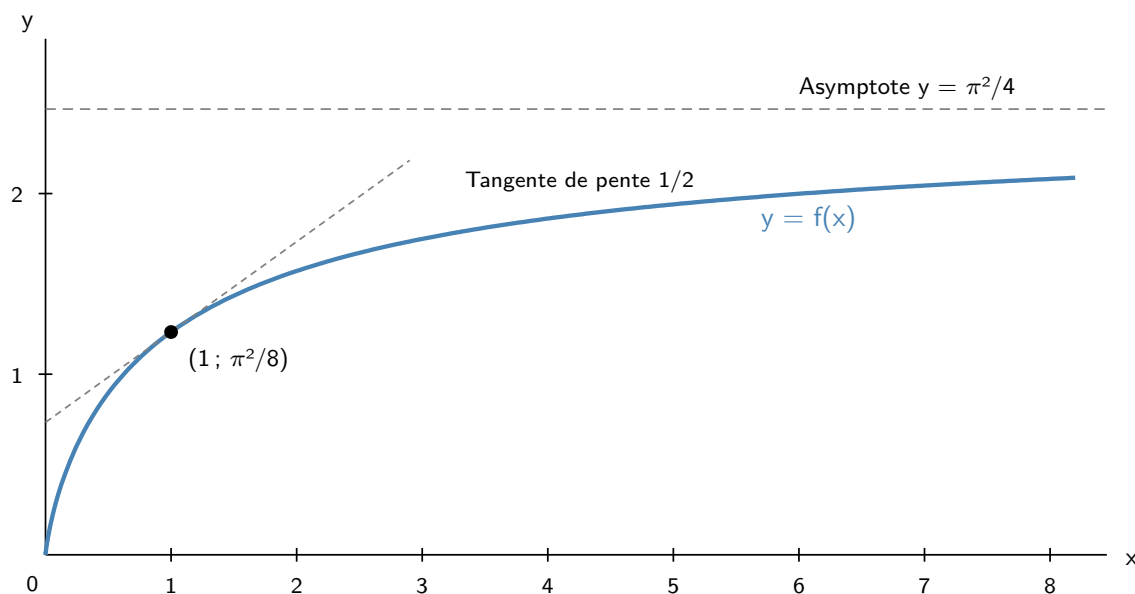
Le tracé peut être précisé par la concavité. Si $0 < x < y$, la formule de I-3(c) montre, pour $0 < u < \pi/2$,

$$\frac{\sin u \cos u}{y^2 \cos^2 u + \sin^2 u} < \frac{\sin u \cos u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}.$$

En intégrant, on obtient $f'(y) < f'(x)$. La dérivée est donc strictement décroissante et f est concave.

Le prolongement par $f(0) = 0$ est continu. Comme f' est décroissante, pour $0 < y < x$ on a $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t) dt \geq (x - y)f'(x)$. En faisant tendre y vers 0, il vient $f(x)/x \geq f'(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Le graphe possède donc une demi-tangente verticale à l'origine.

À l'infini, la droite $y = \pi^2/4$ est une asymptote horizontale; le graphe reste en dessous, car f est strictement croissante vers cette limite. En $(1, \pi^2/8)$, la tangente a pour équation $y = \pi^2/8 + (x - 1)/2$.



Partie II : Une série donnant π^2

1. Somme des inverses des carrés impairs.

(a) Sur $]0, 1[$, les fonctions du quotient sont continues et $t^2 - 1 \neq 0$. En 0, $t \ln t \rightarrow 0$ par croissance comparée, tandis que $t^2 - 1 \rightarrow -1$, donc $g(t) \rightarrow 0$.

En 1, on écrit $g(t) = \frac{t}{t+1} \frac{\ln t}{t-1}$. La dérivabilité du logarithme en 1 donne $\ln t/(t-1) \rightarrow 1$, donc $g(t) \rightarrow 1/2$.

En posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1/2$, on obtient un prolongement continu sur $[0, 1]$. Ce prolongement est unique, car la continuité impose les deux valeurs limites aux extrémités. De plus, $g(t) > 0$ sur $]0, 1[$, puisque son numérateur et son dénominateur sont tous deux négatifs, et $g \geq 0$ sur $[0, 1]$.

(b) Fixons $n \in \mathbb{N}$. La formule géométrique finie donne, pour $0 < t < 1$,

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{p=0}^n t^{2p} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}.$$

En multipliant par $-\ln t$, on obtient

$$\frac{\ln t}{t^2 - 1} = - \sum_{p=0}^n t^{2p} \ln t + t^{2n+1} g(t).$$

Pour justifier l'intégration jusqu'aux extrémités, chaque terme $t^{2p} |\ln t|$ est majoré par $-\ln t$ sur $]0, 1[$. Cette dernière fonction est intégrable en 0, puisque sa primitive $t(1 - \ln t)$ tend vers 0 en 0, et $\int_0^1 -\ln t \, dt = 1$. L'intégrale du membre de gauche converge par I-4(a). Enfin, $t^{2n+1} g(t)$ est continue sur $[0, 1]$.

On peut donc intégrer l'identité sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, puis faire tendre ε vers 0. La somme comporte un nombre fini de termes, ce qui permet d'utiliser la linéarité sans échange de

somme infinie et d'intégrale. On conclut

$$f(1) = - \sum_{p=0}^n \int_0^1 t^{2p} \ln t \, dt + \int_0^1 t^{2n+1} g(t) \, dt.$$

- (c) L'intégrale converge absolument par la majoration utilisée en (b). Pour $0 < \varepsilon < 1$, on effectue l'intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$, en prenant comme primitive de t^{2p} la fonction $t^{2p+1}/(2p+1)$:

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{2p} \ln t \, dt = \left[\frac{t^{2p+1} \ln t}{2p+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{2p+1} \int_{\varepsilon}^1 t^{2p} \, dt.$$

Le terme en 1 est nul. Le terme en ε tend vers 0, car $2p+1 > 0$ et $\varepsilon^{2p+1} \ln \varepsilon \rightarrow 0$.

L'intégrale de la puissance tend vers $1/(2p+1)$. Ainsi

$$\int_0^1 t^{2p} \ln t \, dt = -\frac{1}{(2p+1)^2} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

- (d) La fonction continue g atteint son maximum sur le segment $[0, 1]$. Notons $K = \max_{[0,1]} g$, qui est fini et positif. Comme $0 \leq g(t) \leq K$, la positivité et la croissance de l'intégrale donnent

$$0 \leq \int_0^1 t^{2n+1} g(t) \, dt \leq K \int_0^1 t^{2n+1} \, dt = \frac{K}{2n+2}.$$

Cette borne tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

- (e) En reportant (c) dans (b), on obtient

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{(2p+1)^2} = f(1) - \int_0^1 t^{2n+1} g(t) \, dt.$$

Le dernier terme tend vers 0 par (d). Les sommes partielles de la série convergent donc

vers $f(1) = \pi^2/8$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

La preuve utilise une identité finie et un reste explicitement majoré.

2. La formule (2).

(a) Pour tout $N \geq 1$, la décomposition $1/(n(n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$ donne la somme télescopique

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Ces sommes partielles tendent vers 1, donc la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n(n+1)) = 1.$$

(b) On suit l'indication de l'énoncé. En mettant sur un dénominateur commun,

$$\frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{4n(n+1) - (2n+1)^2}{n(n+1)(2n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2} = \frac{2}{n(n+1)} - \frac{8}{(2n+1)^2}.$$

Les deux séries du membre de droite convergent par (a) et II-1(e). La linéarité des séries

convergentes donne donc la convergence de la série de gauche et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2} = 2 - 8 \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) = 10 - \pi^2.$$

Le terme $n = 0$ de la série des carrés impairs vaut 1, ce qui explique sa soustraction. On conclut à la formule (2) :

$$\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}.$$

3. Approximation par la formule (2).

(a) La fonction h est positive et continue sur $]0, +\infty[$. Chacun des facteurs positifs x , $x+1$ et $(2x+1)^2$ de son dénominateur est strictement croissant; leur produit l'est donc aussi, et h est strictement décroissante.

Pour $x > 0$, on a $x+1 \geq x$ et $2x+1 \geq 2x$, d'où $h(x) \leq 1/(2x^4)$. Ainsi l'intégrale de h converge à l'infini par comparaison à une intégrale de puissance. La série des $h(n)$ converge par II-2(b).

Pour $n \geq p+1$, la décroissance donne

$$\int_n^{n+1} h(x) dx \leq h(n) \leq \int_{n-1}^n h(x) dx.$$

En sommant de $n = p+1$ à N , puis en faisant tendre N vers l'infini dans les intégrales et la série convergentes, on obtient

$$\int_{p+1}^{+\infty} h(x) dx \leq r_p \leq \int_p^{+\infty} h(x) dx.$$

Pour affiner ces bornes, $x \leq x+1$ et $2x+1 \leq 2(x+1)$ donnent aussi $h(x) \geq 1/(2(x+1)^4)$. Ainsi

$$\frac{1}{2(x+1)^4} \leq h(x) \leq \frac{1}{2x^4}.$$

En intégrant la première borne de $p + 1$ à l'infini et la seconde de p à l'infini, on conclut

$$\frac{1}{6(p+2)^3} \leq r_p \leq \frac{1}{6p^3} \quad (p \geq 1).$$

(b) La somme des six termes vaut

$$s_6 = \frac{1}{9} + \frac{1}{75} + \frac{1}{294} + \frac{1}{810} + \frac{1}{1815} + \frac{1}{3549} = \frac{263600452}{2029052025} = 0,1299131065 \dots$$

On peut donc prendre $s_6 \simeq 0,1299$, avec une erreur inférieure à $5 \cdot 10^{-5}$, et donc inférieure à 10^{-4} .

La formule (2) donne $\pi^2 = 10 - s_6 - r_6$. Pour obtenir la précision demandée, on utilise les deux bornes du reste :

$$\frac{1}{3072} \leq r_6 \leq \frac{1}{1296}.$$

Le milieu de cet intervalle vaut $m_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3072} + \frac{1}{1296} \right) = 0,0005485628858 \dots$, et sa demi-largeur vaut

$$E_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1296} - \frac{1}{3072} \right) = 0,0002230420524 \dots$$

La valeur $10 - 0,1299 - m_6 = 9,8695514371 \dots$ approche donc π^2 avec une erreur au plus égale à $5 \cdot 10^{-5} + E_6 < 2,74 \cdot 10^{-4}$. En arrondissant à 9,8696, on ajoute moins de $5 \cdot 10^{-5}$ à cette erreur. Ainsi

$$\pi^2 \simeq 9,8696 \quad \text{à } 5 \cdot 10^{-4} \text{ près.}$$

La seule approximation $10 - s_6$ ne serait pas suffisante avec la borne supérieure du reste ; le choix du milieu de l'encadrement fournit la précision demandée.

(c) Méthode 1 — Milieu de l'encadrement, comme en (b).

Si s_p est calculée avec une précision suffisante, on approche π^2 par $10 - s_p - m_p$, où

$$m_p = \frac{1}{12} (p^{-3} + (p+2)^{-3}). \text{ L'erreur de troncature est majorée par}$$

$$E_p = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{(p+2)^3} \right) = \frac{6p^2 + 12p + 8}{12p^3(p+2)^3} \sim \frac{1}{2p^4}.$$

Pour une erreur de l'ordre de 10^{-6} , cela conduit à $p \simeq (1/(2 \cdot 10^{-6}))^{1/4} \simeq 26,6$. On doit donc utiliser environ 27 termes, c'est-à-dire quelques dizaines de termes.

Une garantie simple s'obtient par l'inégalité des accroissements finis appliquée à t^{-3} sur $[p, p+2]$: $p^{-3} - (p+2)^{-3} \leq 6/p^4$. Ainsi $E_p \leq 1/(2p^4)$, et $p = 27$ donne $E_p < 9,41 \cdot 10^{-7}$. En contrôlant aussi les arrondis à moins de $5 \cdot 10^{-8}$, on obtient une erreur totale inférieure à 10^{-6} . L'encadrement exact donne même $E_{26} < 9,46 \cdot 10^{-7}$, contre $E_{25} > 1,10 \cdot 10^{-6}$.

Méthode 2 — Approximation directe par $10 - s_p$.

Si l'on choisit simplement $10 - s_p$, son erreur vaut r_p et est majorée par $1/(6p^3)$. La condition $1/(6p^3) \leq 10^{-6}$ donne $p \geq (10^6/6)^{1/3} \simeq 55,03$. On prend donc $p = 56$, avec une précision suffisante pour les sommes et l'affichage.

La première approche exploite les deux bornes du reste et réduit le nombre de termes ; la seconde utilise seulement sa borne supérieure. La méthode de (b) est la première.

Partie III : Accélération de la convergence

1. On établit l'identité par récurrence sur q , pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Tous les dénominateurs sont strictement positifs.

Pour alléger les écritures, notons

$$a_k(n) = \frac{2^k k!}{\prod_{j=0}^{k+1} (2n + 2j + 1)}, \quad T_q(n) = \frac{2^{q+1} (q+1)!}{(2n+1)^2 \prod_{j=1}^{q+1} (2n + 2j + 1)}.$$

Pour $q = 0$, on a

$$a_0(n) + T_0(n) = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2}{(2n+1)^2(2n+3)} = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Supposons l'identité vraie au rang q . En ajoutant un facteur au produit du dénominateur, on obtient

$$T_{q+1}(n) = T_q(n) \frac{2(q+2)}{2n+2q+5}.$$

Par conséquent

$$T_q(n) - T_{q+1}(n) = T_q(n) \frac{2n+1}{2n+2q+5} = \frac{2^{q+1}(q+1)!}{\prod_{j=0}^{q+2} (2n+2j+1)} = a_{q+1}(n).$$

Ainsi $T_q(n) = a_{q+1}(n) + T_{q+1}(n)$. En remplaçant le reste dans l'identité au rang q , on obtient

$$1/(2n+1)^2 = \sum_{k=0}^{q+1} a_k(n) + T_{q+1}(n),$$

qui est l'identité au rang suivant.

La récurrence conclut donc, pour tous $n, q \in \mathbb{N}$, à la formule demandée.

2. Somme de la série définissant v_k .

(a) Posons

$$P_k(n) = \prod_{j=0}^k (2n+2j+1).$$

Le second terme de la différence de l'énoncé vaut $1/P_k(n+1)$, tandis que le premier vaut $1/P_k(n)$. La différence s'écrit

$$\frac{1}{P_k(n)} - \frac{1}{P_k(n+1)} = \frac{(2n+2k+3) - (2n+1)}{\prod_{j=0}^{k+1} (2n+2j+1)} = \frac{2(k+1)}{\prod_{j=0}^{k+1} (2n+2j+1)}.$$

La somme télescopique, pour $N \geq p$, est donc

$$\sum_{n=p}^N \frac{1}{\prod_{j=0}^{k+1} (2n+2j+1)} = \frac{1}{2(k+1)} \left(\frac{1}{P_k(p)} - \frac{1}{P_k(N+1)} \right).$$

Autrement dit, elle vaut

$$\frac{1}{2(k+1)} \left(\frac{1}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2p+2k+1)} - \frac{1}{(2N+3)(2N+5)\cdots(2N+2k+3)} \right).$$

(b) Quand $N \rightarrow +\infty$, $P_k(N+1) \geq (2N+3)^{k+1} \rightarrow +\infty$, car $k+1 \geq 1$. Le dernier terme de (a) tend donc vers 0.

En multipliant l'égalité de (a) par $2^{k-1}k!$, les sommes partielles définissant v_k convergent et donnent

$$v_k = \frac{2^{k-1}k!}{k+1} \frac{1}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2p+2k+1)}.$$

Cette formule vaut aussi pour $k=0$, avec $v_0 = 1/(2(2p+1))$, et pour $p=0$. L'existence de la série est établie par la limite explicite de ses sommes partielles.

3. Approximation de $\pi^2/8$.

(a) Rectification locale : dans cette égalité, la borne supérieure p imprimée au-dessus de la somme des v_k est remplacée par q . La décomposition de III-1 porte en effet sur les indices $0 \leq k \leq q$, et le reste est R_q .

Fixons $p \geq 1$ et $q \geq 0$. La formule de II-1(e) donne

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Dans la seconde somme, appliquons d'abord III-1 pour $p \leq n \leq N$ et sommions ces identités finies :

$$\sum_{n=p}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{k=0}^q \sum_{n=p}^N a_k(n) + \sum_{n=p}^N T_q(n).$$

Les séries des $a_k(n)$ convergent par III-2. De plus, III-1 et la positivité des $a_k(n)$ montrent $0 \leq T_q(n) \leq 1/(2n+1)^2$. La série des $T_q(n)$ converge donc par comparaison avec la série convergente de II-1(e).

On peut ainsi faire tendre N vers l'infini. La somme sur k est finie ; le passage à la limite donne

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^q v_k + R_q,$$

où

$$R_q = \sum_{n=p}^{+\infty} T_q(n) = 2^{q+1}(q+1)! \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2q+3)}.$$

Toutes les séries utilisées sont convergentes ; aucun échange de deux sommes infinies n'est nécessaire.

(b) Pour $n \geq p$, on a $2n+1 \geq 2p+1 > 0$, donc

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{(2p+1)(2n+1)}.$$

En multipliant par les facteurs positifs restants du terme de R_q , puis en sommant les inégalités, on obtient

$$0 \leq R_q \leq \frac{2^{q+1}(q+1)!}{2p+1} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3) \cdots (2n+2q+3)}.$$

La somme du membre de droite est $v_q/(2^q q!)$. Ainsi

$$0 \leq R_q \leq \frac{2(q+1)}{2p+1} v_q = 2W_q, \text{ avec } W_q = (q+1)v_q/(2p+1).$$

(c) Notons

$$B_{p,q} = \sum_{n=0}^{p-1} 1/(2n+1)^2 + \sum_{k=0}^q v_k.$$

La question (a) donne $\pi^2/8 = B_{p,q} + R_q$, et (b) donne $0 \leq R_q \leq 2W_q$.

Le milieu de cet intervalle est W_q , donc $|R_q - W_q| \leq W_q$. On en déduit

$$\left| \frac{\pi^2}{8} - (B_{p,q} + W_q) \right| \leq W_q.$$

La quantité indiquée dans le sujet est donc une valeur approchée de $\pi^2/8$ à W_q près.

4. Algorithme et résultats numériques.

(a) Question adaptée au programme actuel : l'algorithme demandé est rédigé en Python. Le paramètre p est un entier strictement positif.

Pour approcher π^2 , on multiplie l'approximation de (c) par 8. La borne d'erreur de troncature est donc $8W_q$, et l'arrêt doit se faire dès que $8W_q \leq 10^{-6}$.

On évite de recalculer les factorielles et les produits en utilisant la formule explicite de III-2(b). Elle donne

$$v_0 = \frac{1}{2(2p+1)}, \quad \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{2(k+1)^2}{(k+2)(2p+2k+3)}.$$

En effet, le quotient des factorielles apporte $k + 1$, le quotient des facteurs $1/(k + 1)$ apporte $(k + 1)/(k + 2)$, le quotient des puissances apporte 2, et le produit du dénominateur apporte le nouveau facteur $2p + 2k + 3$.

On a également

$$\frac{W_{q+1}}{W_q} = \frac{q+2}{q+1} \frac{v_{q+1}}{v_q} = \frac{2(q+1)}{2p+2q+3} < 1.$$

Ainsi les bornes W_q sont strictement décroissantes. Pour justifier la terminaison, comme $p \geq 1$, $2p + 2q + 3 \geq 2q + 5 > 2q + 4$, d'où $W_{q+1} \leq \frac{q+1}{q+2} W_q$. Par récurrence, $0 < W_q \leq W_0/(q+1)$, donc $W_q \rightarrow 0$.

L'algorithme suivant parcourt les indices dans l'ordre croissant à partir de 0. Le premier indice qui satisfait l'arrêt est donc le plus petit indice certifié par la borne $8W_q$. Il ne s'agit pas nécessairement du plus petit indice pour l'erreur réelle, qui n'est pas connue par l'encadrement seul.

Python

```
def approx_pi2(p):
    base = 0.0
    for n in range(p):
        base = base + 1.0 / (2 * n + 1)**2

    q = 0
    v = 1.0 / (2 * (2 * p + 1))
    somme = v
    W = v / (2 * p + 1)

    while 8 * W > 10**(-6):
        v = v * 2 * (q + 1)**2 / ((q + 2) * (2 * p + 2 * q + 3))
        q = q + 1
        somme = somme + v
        W = (q + 1) * v / (2 * p + 1)

    valeur = 8 * (base + somme + W)
    return valeur, q, 8 * W
```

La variable base contient la somme des termes impairs d'indices 0 à $p - 1$, conformément à la borne exclusive de $\text{range}(p)$. À chaque test de la boucle, v vaut v_q , somme vaut

$$\sum_{k=0}^q v_k,$$

et W vaut W_q . Le calcul du nouveau terme utilise l'ancien indice ; l'indice est ensuite augmenté, puis la somme et la borne sont mises à jour.

La fonction renvoie successivement l'approximation de π^2 , l'indice q et la borne $8W_q$. Aucun import n'est nécessaire. La boucle peut ne pas être exécutée si $q = 0$ suffit.

La garantie théorique concerne les opérations exactes. Les trois exécutions de (b) ont aussi été contrôlées par un calcul rationnel exact des mêmes sommes et bornes : les différences dues aux nombres flottants sont inférieures à 10^{-13} et les arrêts restent valides. Elles sont négligeables devant la marge disponible sous 10^{-6} dans ces trois cas.

(b) Le code précédent a été exécuté pour les trois paramètres demandés. Les valeurs ci-dessous reprennent toutes les décimales de l'affichage usuel des résultats flottants.

p	q	Valeur approchée de π^2	Borne $8W_q$
5	16	9,869603645146519	$8,356526385386754 \cdot 10^{-7}$
10	6	9,869603704625113	$9,074623840973385 \cdot 10^{-7}$
15	4	9,869603747497544	$9,59001999584726 \cdot 10^{-7}$

Pour vérifier la minimalité de ces indices, la relation entre deux bornes donne $W_{q-1} = W_q(2p + 2q + 1)/(2q)$. Dans les trois cas, les bornes précédentes $8W_{q-1}$ valent respectivement environ $1,123 \cdot 10^{-6}$, $2,496 \cdot 10^{-6}$ et $4,675 \cdot 10^{-6}$; elles dépassent toutes 10^{-6} . Les indices du tableau sont donc les premiers indices admissibles.

Chaque borne finale est inférieure à 10^{-6} , avec une marge supérieure à $4 \cdot 10^{-8}$, ce qui reste très supérieur aux écarts d'arrondi contrôlés. Les trois valeurs fournies approchent donc π^2 à 10^{-6} près.

Relevé des adaptations

- I-4(a) : précision du prolongement continu de $\ln t/(t^2 - 1)$ en $t = 1$, de valeur $1/2$, afin de rendre l'intégrale non ambiguë pour $x \geq 1$.
- III-3(a) : la borne supérieure imprimée p de la somme des v_k est rectifiée en q , conformément à III-1 et aux formules de III-3(c) et III-4.
- III-4(a) : l'algorithme est demandé et fourni en Python, conformément au référentiel informatique.