



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1984

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, a et b sont deux réels tels que $a < b$. On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel réel des fonctions indéfiniment dérivables sur $[a, b]$, les dérivées aux extrémités étant prises au sens unilatéral.

Id désigne l'application identité de $\mathcal{C}$. L'endomorphisme de dérivation δ associe à $f \in \mathcal{C}$ sa dérivée : $\delta(f) = f'$. L'endomorphisme de primitivation u associe à f sa primitive qui s'annule en a :

$$u(f)(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

On pose $\delta^0 = u^0 = \text{Id}$ et, pour $k \geq 1$,

$$\delta^k = \delta \circ \delta^{k-1}, \quad u^k = u \circ u^{k-1}.$$

Un polynôme unitaire est un polynôme non nul dont le coefficient du monôme de plus haut degré est 1.

Pour $f, g \in \mathcal{C}$, on pose

$$(f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt = u(fg)(b).$$

Lorsque $(f | g) = 0$, on dit que f et g sont orthogonaux, ou que f s'orthogonalise à g .

Partie I

1. Montrer que, si P est un polynôme, $u^k(P)$ est un polynôme pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si P est de degré p , quel est le degré de $u^k(P)$? Montrer que $(x - a)^k$ divise $u^k(P)(x)$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $h(x) = (b - x)^p$. Quelles sont les racines de $\delta^k(h)$ pour $k \in \mathbb{N}$?
3. (a) Préciser $\delta \circ u$.
3. (b) Soit $\tau = u \circ \delta - \delta \circ u$. Quel est le rang de τ ? Préciser les éléments de son noyau.

Soient $f_1(x) = \sin(x - a)$ et $f_2(x) = \cos(x - a)$. Donner $\tau(f_1)$, $\tau(f_2)$ et $\tau^2(f_2) = (\tau \circ \tau)(f_2)$.

4. À tout $(f, g) \in \mathcal{C}^2$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on associe la fonction

$$\varphi = \sum_{k=0}^p (-1)^k \delta^k(f) u^{k+1}(g).$$

4. (a) Montrer que $\delta(\varphi)$ se réduit à une somme de deux termes.

4. (b) Exprimer

$$u(fg - (-1)^{p+1} \delta^{p+1}(f) u^{p+1}(g)).$$

4. (b) i. Quand f est quelconque dans $\mathcal{C}$.

4. (b) ii. Quand f est un polynôme de degré inférieur ou égal à p .

4. (b) iii. Quand $f = h$, avec $p \geq 1$.

5. Calculer $\varphi(a)$.

6. Pour $f = h$, montrer que $\varphi(b)$ se réduit à un terme.

7. Supposons que g soit orthogonal à tout polynôme de degré $p < n$.

7. (a) Que vaut alors $u^{p+1}(g)(b)$, pour $0 \leq p < n$?

7. (b) On suppose en outre que g est un polynôme unitaire de degré n .

7. (b) i. Préciser les racines de $u^n(g)$ avec leur ordre de multiplicité.

7. (b) ii. Combien y a-t-il de racines de g appartenant à $]a, b[$?

Partie II

1. Soit $K(x) = (x - a)(x - b) = (x - s)^2 - \ell^2$. Préciser s et ℓ^2 .
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M(x) = (x - a)^n(x - b)^n = K(x)^n$ et $S = \delta^n(M)$.

2. (a) Calculer

$$(x - a)(x - b)M'(x) - n(2x - a - b)M(x).$$

2. (b) Calculer

$$(x - a)(x - b)S''(x) + (2x - a - b)S'(x).$$

Partie III

On définit v sur $\mathcal{C}$ par

$$v(f)(x) = (x - a)(x - b)f''(x) + (2x - a - b)f'(x), \quad x \in [a, b].$$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.
2. En donner des valeurs propres.
3. Montrer que les polynômes 1 et $x \mapsto 3(x - s)^2 - \ell^2$ sont deux vecteurs propres de v ; donner leurs valeurs propres.
4. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire, vecteur propre de v associé à la valeur propre 12. Préciser ce polynôme.
5. Soient deux polynômes unitaires de même degré n , vecteurs propres de v . Quelle est la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent ?

6. On suppose maintenant qu'existent :

$\lambda \notin \mathbb{Z}$, valeur propre de v associée à un vecteur propre $G \in \mathcal{C}$;

$x_0 \in [a, b]$ tel que $G(x_0) = 2\lambda \neq 0$.

On prend $\lambda > 0$ et l'on pose

$$Q(x) = q(x - \alpha)(\beta - x) + 1, \quad q > 0, \quad [\alpha, \beta] \subset [a, b].$$

6. (a) Montrer que G est orthogonal à tout polynôme.

6. (b) Montrer que l'on peut choisir q tel que $Q(a) \geq 0$ et $Q(b) \geq 0$.

6. (c) Montrer que l'on peut choisir $\alpha < \beta$ tels que $G(x) > \lambda$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$.

Quelle est alors la valeur minimale de $Q(x)$ sur

$$\left[\frac{3\alpha + \beta}{4}, \frac{\alpha + 3\beta}{4} \right] \subset [\alpha, \beta] ?$$

6. (d) Quelle est la limite de la suite de terme général

$$\int_a^b Q(x)^n G(x) dx$$

lorsque Q vérifie les propriétés des questions (b) et (c) ?

6. (e) Montrer que l'hypothèse $\lambda \notin \mathbb{Z}$ conduit à une contradiction et conclure.

6. (f) Montrer qu'il existe $n + 1$ polynômes $A_0, A_1, \dots, A_n$, de degrés inférieurs ou égaux à n , vecteurs propres de v associés à des valeurs propres distinctes, tels que

$$(A_k | A_k) = 1, \quad 0 \leq k \leq n.$$

On pourra choisir A_k de degré k et de coefficient de x^k strictement positif.

6. (g) Soient $f \in \mathcal{C}$ et $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, soit $n + 1$ nombres distincts.

Montrer qu'il existe de manière unique $n + 1$ constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ telles que

$$\psi = f - \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k$$

s'annule en $x_0, \dots, x_n$. On pose

$$B = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k.$$

6. (h) Comparer les polynômes T et U , de degrés inférieurs ou égaux à n , qui rendent respectivement

$$(T - f \mid T - f) \quad \text{et} \quad (U - \psi \mid U - \psi)$$

minimaux.