



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

1984

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

On travaille sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$. Les produits de fonctions sont des produits ponctuels. Les puissances de δ , u et τ désignent des compositions d'endomorphismes.

Partie I

1. Développons le polynôme autour de a . Si P est non nul de degré p , il existe des réels $c_0, \dots, c_p$, avec $c_p \neq 0$, tels que

$$P(x) = \sum_{j=0}^p c_j (x-a)^j.$$

Comme $u((x-a)^j) = (x-a)^{j+1}/(j+1)$, une récurrence sur k et la linéarité de l'intégrale donnent

$$u^k(P)(x) = \sum_{j=0}^p c_j \frac{j!}{(j+k)!} (x-a)^{j+k}.$$

L'expression est un polynôme. Son coefficient de plus haut degré est $c_p p! / (p+k)! \neq 0$; donc

$$\deg(u^k(P)) = p+k.$$

Chaque terme est divisible par $(x-a)^k$, ce qui prouve

$$(x-a)^k \mid u^k(P)(x).$$

Pour $k=0$, on retrouve P , et la divisibilité par 1 est automatique. Si $P=0$, toutes les primitives successives sont nulles; elles sont divisibles par $(x-a)^k$, mais on ne leur attribue pas de degré.

2. Pour $0 \leq k \leq p$, la dérivation successive donne

$$\delta^k(h)(x) = (-1)^k \frac{p!}{(p-k)!} (b-x)^{p-k}.$$

Pour $k < p$, l'unique racine est b , de multiplicité $p - k$. Pour $k = p$, la dérivée est la constante non nulle $(-1)^p p!$: elle n'a aucune racine.

Pour $k > p$, $\delta^k(h)$ est le polynôme nul. Tous les points de $[a, b]$ sont alors des zéros de la fonction, mais on ne définit pas leur multiplicité comme pour un polynôme non nul.

3. (a) Toute fonction $f \in \mathcal{C}$ est continue. Le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$\delta(u(f))(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

L'égalité vaut sur le segment, avec les dérivées unilatérales aux extrémités. Ainsi

$$\delta \circ u = \text{Id}.$$

3. (b) Pour $f \in \mathcal{C}$, le même théorème donne

$$u(\delta(f))(x) = \int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

En utilisant la question (a),

$$\tau(f)(x) = f(x) - f(a) - f(x) = -f(a).$$

Ainsi $\tau(f)$ est une fonction constante. Réciproquement, pour tout réel c , la fonction constante $f = -c$ satisfait $\tau(f) = c$. L'image de τ est donc exactement l'espace des fonctions constantes, de dimension 1 :

$$\text{rg}(\tau) = 1, \quad \text{Ker } \tau = \{f \in \mathcal{C} : f(a) = 0\}.$$

Puisque $f_1(a) = 0$ et $f_2(a) = 1$,

$$\tau(f_1) = 0, \quad \tau(f_2) = -1.$$

Enfin, τ envoie la constante -1 sur la constante 1 , donc

$$\tau^2(f_2) = 1.$$

Plus généralement, $\tau^2 = -\tau$; en effet, $\tau(\tau(f)) = -\tau(f)(a) = f(a)$.

4. Pour $f, g \in \mathcal{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, on considère

$$\varphi = \sum_{k=0}^p (-1)^k f^{(k)} u^{k+1}(g).$$

4. (a) La somme est finie et chacun de ses termes est dérivable. La règle du produit et $\delta \circ u = \text{Id}$ donnent

$$\varphi' = \sum_{k=0}^p (-1)^k f^{(k+1)} u^{k+1}(g) + \sum_{k=0}^p (-1)^k f^{(k)} u^k(g).$$

Dans la première somme, posons $j = k + 1$. Les termes d'indices $1, \dots, p$ s'annulent avec ceux de la deuxième somme, puisqu'ils ont des signes opposés. Restent seulement l'indice 0 de la deuxième somme et l'indice $p + 1$ de la première :

$$\delta(\varphi) = fg + (-1)^p f^{(p+1)} u^{p+1}(g) = fg - (-1)^{p+1} \delta^{p+1}(f) u^{p+1}(g).$$

L'identité est aussi valable pour $p = 0$: c'est alors directement la dérivée de $f u(g)$.

4. (b) La primitivation de l'égalité précédente est justifiée par la continuité des fonctions concernées.

4. (b) i. Pour une fonction f quelconque, le théorème fondamental donne

$$u(fg - (-1)^{p+1} f^{(p+1)} u^{p+1}(g))(x) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

C'est l'unique primitive de l'intégrande qui s'annule en a .

4. (b) ii. Si f est un polynôme de degré au plus p , ou le polynôme nul, alors $f^{(p+1)} = 0$.

Ainsi

$$u(fg)(x) = \varphi(x) - \varphi(a) = \sum_{k=0}^p (-1)^k f^{(k)}(x) u^{k+1}(g)(x) - \varphi(a).$$

4. (b) iii. Ici $p \geq 1$, conformément à la définition de h en question 2. Comme h est de degré p , la formule précédente s'applique. Les dérivées calculées en question 2 donnent

$$u(hg)(x) = \sum_{k=0}^p \frac{p!}{(p-k)!} (b-x)^{p-k} u^{k+1}(g)(x) - \varphi(a).$$

Les deux facteurs $(-1)^k$ se compensent. Cette formule exprime la primitive du produit sans dériver g .

5. Pour tout $k \geq 0$, $u^{k+1}(g) = u(u^k(g))$ est, par définition, une primitive qui s'annule en a . Chaque terme de $\varphi(a)$ contient donc le facteur nul $u^{k+1}(g)(a)$:

$$\varphi(a) = 0.$$

Toutes les identités de la question 4.(b) peuvent dès lors être écrites sans leur terme $-\varphi(a)$.

6. Pour $f = h$, les dérivées $h^{(k)}(b)$ sont nulles lorsque $k < p$. La seule dérivée non nulle dans la somme est $h^{(p)}(b) = (-1)^p p!$. Ainsi

$$\varphi(b) = (-1)^p h^{(p)}(b) u^{p+1}(g)(b) = p! u^{p+1}(g)(b).$$

En combinant les questions 4.(b) iii et 5, on obtient en particulier

$$\int_a^b (b-t)^p g(t) dt = p! u^{p+1}(g)(b).$$

7. On suppose désormais que g est orthogonal à tous les polynômes de degré strictement inférieur à n .

7. (a) Pour $1 \leq p < n$, le polynôme $t \mapsto (b - t)^p$ est de degré p . Son orthogonalité avec g et la question 6 donnent

$$p! u^{p+1}(g)(b) = \int_a^b (b - t)^p g(t) dt = 0.$$

Comme $p! > 0$, $u^{p+1}(g)(b) = 0$.

Pour $p = 0 < n$, on utilise directement l'orthogonalité avec la constante 1 :

$$u(g)(b) = \int_a^b g(t) dt = 0.$$

Ainsi, pour tous les indices concernés,

$$u^{p+1}(g)(b) = 0, \quad 0 \leq p < n.$$

7. (b) On suppose de plus que g est un polynôme unitaire de degré n .

7. (b) i. Posons $F = u^n(g)$. Pour $n \geq 1$, la question 1 donne $\deg F = 2n$ et $(x - a)^n \mid F(x)$.

La relation $\delta \circ u = \text{Id}$ permet de simplifier successivement les compositions :

$$F^{(j)} = u^{n-j}(g), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Pour $0 \leq j < n$, la question 7.(a), avec $p = n - j - 1$, donne $F^{(j)}(b) = 0$. Par la formule de Taylor pour les polynômes, l'annulation des dérivées d'ordres $0, \dots, n - 1$ en b implique $(x - b)^n \mid F(x)$.

Les racines a et b sont distinctes. Les deux divisibilités donnent donc

$$F(x) = c(x - a)^n(x - b)^n.$$

On peut le justifier par les multiplicités des racines : elles sont au moins n en chacun des deux points, ce qui épuise le degré $2n$. La question 1, appliquée au coefficient dominant 1 de g , donne $c = n!/(2n)!$. Ainsi

$$u^n(g)(x) = \frac{n!}{(2n)!}(x - a)^n(x - b)^n.$$

Les seules racines sont a et b , chacune de multiplicité exactement n .

Si $n = 0$, $g = 1$ et $u^0(g) = 1$: il n'y a aucune racine. La formule ci-dessus reste vraie avec les puissances d'exposant nul.

7. (b) ii. Pour $n \geq 1$, nous allons établir que g possède exactement n racines distinctes dans $]a, b[$, toutes simples.

Méthode 1 — Applications successives du théorème de Rolle.

D'après la question précédente, $F = u^n(g)$ possède les racines a et b de multiplicité n , et $F^{(n)} = g$.

Montrons par récurrence que, pour $0 \leq r \leq n$, $F^{(r)}$ possède au moins r racines distinctes dans $]a, b[$. Pour $r = 0$, cette assertion ne demande aucune racine intérieure.

Supposons $0 \leq r < n$ et choisissons r racines intérieures distinctes, rangées dans l'ordre. Les points a et b sont encore des racines de $F^{(r)}$, puisque leur multiplicité initiale est $n > r$. Entre les $r + 2$ points ainsi rangés, le théorème de Rolle fournit une racine de $F^{(r+1)}$ dans chacun des $r + 1$ intervalles ouverts disjoints. Les fonctions sont polynomiales, donc continues et dérivables sur les segments nécessaires.

La récurrence est établie. Pour $r = n$, $g = F^{(n)}$ possède au moins n racines intérieures distinctes. Comme son degré est n , il en possède exactement n . Chacune est simple : une multiplicité supérieure à 1 ferait dépasser le degré.

Méthode 2 — Orthogonalité et changements de signe.

Soient $r_1, \dots, r_m$ les racines intérieures de g dont la multiplicité est impaire, c'est-à-dire les racines où g change de signe. Le nombre de ces racines est fini et $m \leq n$. Posons

$$R(x) = \prod_{j=1}^m (x - r_j),$$

avec $R = 1$ si $m = 0$. Le produit gR ne change pas de signe sur $]a, b[$. En effet, aux racines r_j , sa multiplicité devient paire ; les autres racines intérieures de g ont déjà une multiplicité paire. Entre deux racines, un polynôme continu non nul garde un signe constant.

Le polynôme gR n'est pas nul. Il a donc un signe constant sur le segment et une valeur non nulle en au moins un point intérieur. Par continuité, son intégrale est strictement positive ou strictement négative :

$$\int_a^b g(x)R(x) dx \neq 0.$$

Si $m < n$, l'hypothèse d'orthogonalité, appliquée au polynôme R de degré m , imposerait au contraire cette intégrale nulle. Donc $m = n$. Le degré de g étant n , ses n racines sont toutes simples et appartiennent à $]a, b[$.

La première méthode exploite la formule de primitivation et Rolle ; la seconde explique directement pourquoi l'orthogonalité force les changements de signe. Pour $n = 0$, $g = 1$ possède bien 0 racine intérieure.

Partie II

1. En développant les deux expressions de K ,

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab,$$

$$(x - s)^2 - \ell^2 = x^2 - 2sx + s^2 - \ell^2.$$

L'identification des coefficients donne

$$s = \frac{a + b}{2}, \quad \ell^2 = s^2 - ab = \frac{(b - a)^2}{4}.$$

On peut choisir $\ell = (b - a)/2 > 0$. En particulier,

$$K'(x) = 2x - a - b = 2(x - s), \quad K''(x) = 2.$$

2. On fixe $n \geq 1$, $M = K^n$ et $S = M^{(n)}$.

2. (a) Par la règle de dérivation d'une puissance polynomiale,

$$M' = nK^{n-1}K'.$$

Ainsi

$$KM' - nK'M = nK^n K' - nK'K^n = 0.$$

L'expression demandée est donc identiquement nulle, y compris aux points a et b ; aucune division par K n'a été effectuée.

2. (b) Dérivons $n + 1$ fois l'identité $KM' - nK'M = 0$. Tous les facteurs sont polynomiaux, donc la formule de Leibniz s'applique à cet ordre.

Comme les dérivées de K d'ordre supérieur à 2 sont nulles,

$$(KM')^{(n+1)} = KM^{(n+2)} + (n+1)K'M^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}K''M^{(n)}.$$

Comme K' est de degré 1,

$$(K'M)^{(n+1)} = K'M^{(n+1)} + (n+1)K''M^{(n)}.$$

Avec $S = M^{(n)}$ et $K'' = 2$, l'égalité des dérivées devient

$$KS'' + (n+1)K'S' + n(n+1)S - nK'S' - 2n(n+1)S = 0.$$

En regroupant,

$$KS'' + K'S' = n(n+1)S.$$

Par conséquent,

$$(x-a)(x-b)S''(x) + (2x-a-b)S'(x) = n(n+1)S(x).$$

Le polynôme M est unitaire de degré $2n$. Sa dérivée S est donc de degré n , avec coefficient dominant $(2n)!/n!$, et n'est pas nulle.

Partie III

1. Pour $f \in \mathcal{C}$, les dérivées f' et f'' sont encore indéfiniment dérivables sur $[a, b]$. Les coefficients K et K' sont des polynômes. Leurs produits avec ces dérivées, puis leur somme, appartiennent donc à $\mathcal{C}$.

La dérivation et la multiplication par une fonction fixée sont linéaires : pour $f, g \in \mathcal{C}$ et $\mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$v(\mu f + \nu g) = \mu v(f) + \nu v(g).$$

Ainsi v est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}$. On retiendra aussi la forme utile

$$v(f) = K f'' + K' f' = (K f')'.$$

2. Pour tout entier $k \geq 1$, la partie II donne

$$v(\delta^k(K^k)) = k(k+1)\delta^k(K^k).$$

Le polynôme $\delta^k(K^k)$ est non nul, de degré k . Donc $k(k+1)$ est une valeur propre de v .

De plus, $v(1) = 0$ et la fonction constante 1 est non nulle. La valeur 0 est donc aussi une valeur propre.

On a ainsi obtenu les valeurs propres

$$\lambda_k = k(k+1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Elles sont toutes distinctes, puisque $\lambda_{k+1} - \lambda_k = 2k + 2 > 0$. Il n'est pas encore nécessaire d'affirmer que cette liste est exhaustive.

3. Pour le polynôme constant 1, ses deux premières dérivées sont nulles : $v(1) = 0$. Il est donc vecteur propre de valeur propre 0.

Posons $y = x - s$ et $H(x) = 3y^2 - \ell^2$. Alors $H' = 6y$, $H'' = 6$, $K = y^2 - \ell^2$ et $K' = 2y$. Par conséquent,

$$v(H) = 6(y^2 - \ell^2) + 12y^2 = 18y^2 - 6\ell^2 = 6H.$$

Comme H est un polynôme non nul de degré 2, il est vecteur propre de valeur propre 6.

4. La valeur 12 correspond à $k = 3$ dans la question 2. Calculons un vecteur propre unitaire.

Pour $y = x - s$, on a $v(y) = 2y$ et

$$v(y^3) = (y^2 - \ell^2)6y + 2y \cdot 3y^2 = 12y^3 - 6\ell^2y.$$

Ainsi, pour $P = y^3 + cy$,

$$v(P) = 12y^3 + (-6\ell^2 + 2c)y.$$

L'égalité $v(P) = 12P$ est satisfaite si et seulement si $-6\ell^2 + 2c = 12c$, soit $c = -3\ell^2/5$. Le polynôme cherché est donc

$$P(x) = (x - s)^3 - \frac{3}{5}\ell^2(x - s).$$

Il est unitaire de degré 3, donc non nul, et le calcul vérifie explicitement $v(P) = 12P$.

On peut aussi le retrouver directement par la construction de la question 2 : la troisième dérivée de $(y^2 - \ell^2)^3$ est $120y^3 - 72\ell^2y$; sa division par 120 donne le même polynôme.

5. Commençons par déterminer la valeur propre d'un polynôme non nul de degré m . Si son coefficient dominant est $c \neq 0$, le coefficient de x^m dans $v(P)$ est

$$c(m(m-1) + 2m) = cm(m+1).$$

En effet, les coefficients dominants de K et K' sont respectivement 1 et 2. Pour $m = 0$, $v(P) = 0$, et la même formule donne 0.

Ainsi, si $v(P) = \mu P$, l'identification du coefficient dominant impose

$$\mu = m(m+1).$$

Soient maintenant P et R les deux polynômes unitaires de degré n de l'énoncé. Leurs valeurs propres sont toutes deux $n(n+1)$. Par linéarité,

$$v(P - R) = n(n+1)(P - R).$$

Si $P - R$ était non nul, son degré serait un entier $m < n$, puisque les coefficients dominants de P et R sont égaux. L'identification précédente imposerait $m(m+1) = n(n+1)$, impossible : pour $m < n$,

$$n(n+1) - m(m+1) = (n-m)(n+m+1) > 0.$$

Donc $P = R$. Comme ce polynôme est non nul, l'espace qu'ils engendrent est une droite : $\dim \text{Vect}(P, R) = 1$.

6. On raisonne d'abord sous les hypothèses de l'énoncé : $v(G) = \lambda G$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $\lambda > 0$ et $G(x_0) = 2\lambda$. Les questions (a) à (e) montreront que ces hypothèses ne peuvent pas être satisfaites. Les questions (f) à (h) concernent ensuite les vecteurs propres polynomiaux, dont l'existence est déjà démontrée.

6. (a) Établissons l'identité de symétrie nécessaire. Pour $F, H \in \mathcal{C}$, les fonctions sont suffisamment régulières pour intégrer par parties sur $[a, b]$. Puisque $K(a) = K(b) = 0$,

$$(v(F) | H) = \int_a^b (KF')' H = [KF' H]_a^b - \int_a^b KF' H' = - \int_a^b KF' H'.$$

L'expression est symétrique en F, H , donc

$$(v(F) | H) = (F | v(H)).$$

Pour $k \geq 1$, posons

$$R_k = \frac{k!}{(2k)!} \delta^k(K^k), \quad R_0 = 1.$$

D'après la partie II, R_k est unitaire de degré k et $v(R_k) = k(k+1)R_k$. Appliquons l'identité de symétrie à $F = G$ et $H = R_k$:

$$\lambda(G | R_k) = (v(G) | R_k) = (G | v(R_k)) = k(k+1)(G | R_k).$$

Comme λ n'est pas un entier, $\lambda \neq k(k+1)$ pour tout $k \geq 0$. Ainsi

$$(G \mid R_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pour tout entier $m \geq 0$, les polynômes $R_0, \dots, R_m$ ont des degrés distincts $0, \dots, m$. Ils sont linéairement indépendants : dans une combinaison nulle, le terme de degré maximal non nul ne pourrait pas être compensé par les autres. Ils sont au nombre de $m+1$, qui est la dimension de $\mathbb{R}_m[X]$; ils en forment donc une base.

Tout polynôme P est une combinaison linéaire finie de ces vecteurs propres. La linéarité de l'intégrale donne finalement

$$(G \mid P) = 0 \quad \text{pour tout polynôme } P.$$

6. (b) Fixons $a \leq \alpha < \beta \leq b$. On a

$$Q(a) = 1 - q(\alpha - a)(\beta - a),$$

$$Q(b) = 1 - q(b - \alpha)(b - \beta).$$

Posons

$$L = \max((\alpha - a)(\beta - a), (b - \alpha)(b - \beta)) \geq 0.$$

Si $L > 0$, tout choix $0 < q \leq 1/L$ rend les deux valeurs positives ou nulles. Si $L = 0$, elles valent toutes deux 1, quel que soit $q > 0$. Dans tous les cas, le choix demandé est possible.

Pour la suite, précisons deux conséquences. Le polynôme Q est concave, car $Q'' = -2q < 0$. Ses valeurs sur le segment sont au moins le minimum de ses valeurs aux extrémités ; ainsi $Q(x) \geq 0$ sur $[a, b]$.

En dehors de $[\alpha, \beta]$, le produit $(x - \alpha)(\beta - x)$ est négatif ou nul. Par conséquent,

$$0 \leq Q(x) \leq 1 \quad \text{sur } [a, \alpha] \cup [\beta, b].$$

Sur $[\alpha, \beta]$, ce produit est positif ou nul, donc $Q(x) \geq 1$.

6. (c) Puisque $G(x_0) = 2\lambda > \lambda$ et G est continue sur $[a, b]$, il existe un voisinage relatif de x_0 dans lequel $G(x) > \lambda$.

On peut choisir un segment de longueur strictement positive $[\alpha, \beta]$ contenu dans ce voisinage et dans $[a, b]$. Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, on choisit un segment adjacent à cette extrémité ; sinon on peut choisir un segment autour de x_0 . On obtient dans tous les cas

$$a \leq \alpha < \beta \leq b, \quad G(x) > \lambda \quad (x \in [\alpha, \beta]).$$

On choisit ensuite $q > 0$ comme en question (b) pour ce segment.

Posons $d = \beta - \alpha > 0$. Sur le segment central demandé, la variable $z = x - \alpha$ parcourt $[d/4, 3d/4]$, et

$$(x - \alpha)(\beta - x) = z(d - z) = \frac{d^2}{4} - \left(z - \frac{d}{2}\right)^2.$$

La plus grande valeur de $(z - d/2)^2$ sur ce segment est $d^2/16$, atteinte aux deux extrémités. Le minimum du produit vaut donc $3d^2/16$, et celui de Q est

$$m = 1 + \frac{3q(\beta - \alpha)^2}{16} > 1.$$

Il est atteint aux points $(3\alpha + \beta)/4$ et $(\alpha + 3\beta)/4$.

6. (d) L'intégrande est continu pour chaque entier n , donc l'intégrale existe. Posons

$$M_G = \max_{[a, b]} |G|, \text{ qui est fini par continuité sur un segment.}$$

Sur $[a, \alpha] \cup [\beta, b]$, la question (b) donne $0 \leq Q^n \leq 1$. La contribution de ces deux segments est donc minorée par $-M_G(b - a)$.

Sur $[\alpha, \beta]$, $G > \lambda > 0$ et $Q \geq 1$, donc l'intégrande est positif. Sur le segment central J , de longueur $(\beta - \alpha)/2$, on a même $Q \geq m > 1$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_J Q(x)^n G(x) dx \geq \lambda \frac{\beta - \alpha}{2} m^n.$$

En décomposant l'intégrale par la relation de Chasles et en conservant cette contribution positive, on obtient

$$\int_a^b Q(x)^n G(x) dx \geq \lambda \frac{\beta - \alpha}{2} m^n - M_G(b - a).$$

Comme $m > 1$ et $\lambda(\beta - \alpha)/2 > 0$, le membre de droite tend vers $+\infty$. Par comparaison,

$$\int_a^b Q(x)^n G(x) dx \longrightarrow +\infty.$$

La preuve utilise une minoration explicite ; elle n'échange aucune limite avec une intégrale.

6. (e) Pour chaque entier n , Q^n est un polynôme. La question (a) impose donc

$$\int_a^b Q(x)^n G(x) dx = (G | Q^n) = 0.$$

Cette suite constante nulle ne peut pas tendre vers $+\infty$, contrairement à la question (d). Les hypothèses conduisent à une contradiction : v ne peut pas posséder de valeur propre non entière positive.

Pour conclure sans restriction de signe, reprenons l'identité d'intégration par parties de (a). Pour tout vecteur propre réel non nul G ,

$$\lambda(G | G) = (v(G) | G) = \int_a^b (x-a)(b-x)(G'(x))^2 dx \geq 0.$$

De plus, $(G | G) > 0$. En effet, G est continue et non nulle, donc son carré est strictement positif sur un sous-segment de longueur positive. Ainsi $\lambda \geq 0$. Une valeur propre non entière serait donc strictement positive.

Le choix $G(x_0) = 2\lambda$ ne restreint pas non plus le raisonnement : un vecteur propre non nul possède un point x_0 où $G(x_0) \neq 0$; le multiplier par $2\lambda/G(x_0)$ conserve sa valeur propre et réalise cette normalisation.

On conclut que toutes les valeurs propres réelles de v sont des entiers naturels.

On peut préciser la conclusion avec le même argument. La question (a) utilise en réalité uniquement $\lambda \neq k(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si un entier positif λ n'appartenait pas à cette liste, elle donnerait encore l'orthogonalité à tous les polynômes, puis la même contradiction. La valeur 0 appartient déjà à la liste, et les valeurs négatives ont été exclues ci-dessus. Comme toutes les valeurs de la liste existent par la question 2,

$$\{\text{valeurs propres réelles de } v\} = \{k(k+1) : k \in \mathbb{N}\}.$$

6. (f) Conservons les polynômes unitaires R_k de la question (a). Pour $i \neq j$, la symétrie de v donne

$$i(i+1)(R_i | R_j) = (v(R_i) | R_j) = (R_i | v(R_j)) = j(j+1)(R_i | R_j).$$

Les valeurs propres étant distinctes, $(R_i | R_j) = 0$.

Chaque R_k est un polynôme non nul. Par continuité, l'intégrale de son carré est strictement positive. Définissons

$$A_k = \frac{R_k}{\sqrt{(R_k | R_k)}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Ces polynômes satisfont

$$v(A_k) = k(k+1)A_k, \quad (A_k | A_k) = 1.$$

Ils sont de degrés respectifs $0, \dots, n$ et leur coefficient dominant est strictement positif, puisque R_k est unitaire et le dénominateur positif. Ils sont deux à deux orthogonaux; ainsi $(A_0, \dots, A_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire intégral.

Pour justifier ce dernier terme, sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application $(P, R) \mapsto \int_a^b PR$ est symétrique et bilinéaire; sa positivité définie résulte du même argument de continuité pour tout polynôme non nul. Les propriétés euclidiennes utilisées portent donc sur un espace de dimension finie.

6. (g) Les conditions $\psi(x_j) = 0$ équivalent à

$$B(x_j) = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq n,$$

avec $B \in \mathbb{R}_n[X]$. Il s'agit de déterminer le polynôme d'interpolation aux points donnés.

Méthode 1 — Application linéaire d'évaluation.

Considérons

$$E : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad E(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n)).$$

Cette application est linéaire. Si $E(P) = 0$, P possède les $n + 1$ racines distinctes $x_0, \dots, x_n$. Un polynôme non nul de degré au plus n ne peut pas avoir autant de racines, donc $P = 0$. Ainsi E est injective.

Les espaces de départ et d'arrivée ont tous deux dimension $n + 1$. Le théorème du rang montre que E est aussi surjective, donc bijective. Il existe un unique B tel que $E(B) = (f(x_0), \dots, f(x_n))$.

Comme $(A_0, \dots, A_n)$ est une base, B possède une unique décomposition

$$B = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k.$$

Les constantes cherchées existent donc et sont uniques. L'orthonormalité donne aussi $\alpha_k = (B \mid A_k)$.

Méthode 2 — Construction explicite des polynômes d'interpolation.

Pour $0 \leq j \leq n$, posons

$$L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq r \leq n \\ r \neq j}} \frac{x - x_r}{x_j - x_r}.$$

Tous les dénominateurs sont non nuls puisque les points sont distincts. Chaque L_j est de degré n et satisfait $L_j(x_j) = 1$, tandis que $L_j(x_i) = 0$ pour $i \neq j$. Par conséquent,

$$B(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_j(x)$$

est de degré au plus n et vérifie toutes les conditions $B(x_i) = f(x_i)$.

Si deux polynômes les vérifiaient, leur différence aurait $n + 1$ racines distinctes tout en étant de degré au plus n , donc serait nulle. Le polynôme construit est ainsi unique. Sa décomposition dans la base (A_k) fournit les uniques α_k .

La première méthode démontre l'existence et l'unicité par la dimension ; la seconde fournit une formule pour calculer effectivement B . Dans les deux cas, $\psi = f - B$ s'annule aux points imposés.

6. (h) Nous allons établir l'existence et l'unicité des deux polynômes minimisants, puis leur relation.

Pour $0 \leq k \leq n$, posons $t_k = (f | A_k)$ et

$$T = \sum_{k=0}^n t_k A_k.$$

Ces coefficients existent, car les intégrandes sont continues sur $[a, b]$. Pour chaque j ,

$$(f - T | A_j) = (f | A_j) - t_j = 0.$$

Ainsi $f - T$ est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour un polynôme quelconque H de cet espace,

$$H - f = (H - T) + (T - f).$$

En développant le carré intégral, le terme croisé s'annule par orthogonalité :

$$(H - f | H - f) = (T - f | T - f) + (H - T | H - T).$$

Le second terme est positif ou nul, et nul seulement si $H = T$, par positivité définie sur les polynômes. Le polynôme T est donc l'unique minimisant.

De même, le polynôme

$$U = \sum_{k=0}^n (\psi | A_k) A_k$$

est l'unique minimisant de $(H - \psi \mid H - \psi)$ parmi les polynômes de degré au plus n .

Or $\psi = f - B$ et

$$B = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k.$$

L'orthonormalité donne

$$(\psi \mid A_k) = (f \mid A_k) - (B \mid A_k) = t_k - \alpha_k.$$

En sommant,

$$U = T - B, \quad \text{donc} \quad T = B + U.$$

Les deux résidus sont même identiques :

$$U - \psi = (T - B) - (f - B) = T - f.$$

Les valeurs minimales des deux problèmes sont donc égales. Le polynôme B réalise l'interpolation aux points imposés ; T réalise la meilleure approximation pour l'intégrale du carré de l'erreur. Leur différence $U = T - B$ est la meilleure approximation polynomiale du résidu d'interpolation ψ .

Relevé des adaptations

Partie I, question 4.(b) iii. La condition $p \geq 1$ est explicitée lorsque $f = h$, car h est défini en question 2 pour $p \in \mathbb{N}^*$. Le cas $p = 0$ nécessaire en question 7.(a) est traité directement par l'orthogonalité à la constante 1, sans utiliser une définition de h hors de son domaine.