



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESCP — 2026

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations, rappels et définitions spécifiques

Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour une variable aléatoire réelle Z , on note, sous réserve d'existence, $E(Z)$ son espérance, $V(Z)$ sa variance et F_Z sa fonction de répartition.

La fonction de répartition d'un couple aléatoire (X, Y) est définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = P([X \leq x] \cap [Y \leq y]).$$

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et F une fonction réelle définie sur un ensemble contenant D . On dit que F est 2-croissante sur D lorsque, pour tous $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in D$ vérifiant $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$:

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0,$$

ou, de manière équivalente :

$$F(a_1, b_2) + F(b_1, a_2) \leq F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

Si F est 2-croissante sur $\mathbb{R}^2$, on dit simplement qu'elle est 2-croissante.

On écrit $X = Y$ presque sûrement, ou $X = Y$ p.s., lorsque $P(X = Y) = 1$.

Pour un intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on note $\mathcal{F}_{(a,b)}$ l'ensemble des fonctions continues et croissantes sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissantes sur $]a, b[$, de limite nulle en a et de limite égale à 1 en b .

Pour les questions Python, on suppose les importations suivantes effectuées. Toute fonction écrite en réponse à une question peut être utilisée dans les suivantes. Un formulaire est donné à la fin du sujet.

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy.random as rd

import scipy.special as sp
```

Préliminaires

On considère un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1. Soit $g \in \mathcal{F}_{(a,b)}$. Montrer que la restriction de g à $]a, b[$ réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$.

Dans tout le problème, g^{-1} désigne la réciproque de cette restriction.

2. Soit X une variable aléatoire admettant une densité f , continue et strictement positive sur $]a, b[$ et nulle en dehors de $]a, b[$. Montrer que $F_X \in \mathcal{F}_{(a,b)}$.

I) Fonction de répartition d'un couple : propriétés et exemples

Soient (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_{(X,Y)}(t, y) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_{(X,Y)}(x, t) = 0$.

4. (a) Montrer que :

$$F_X(x) = P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([X \leq x] \cap [Y \leq n]) \right).$$

4. (b) En déduire que $F_X(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(x, r)$.

5. Montrer que $F_Y(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, y)$.

6. En déduire que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) \right) = 1.$$

7. Montrer que $F_{(X,Y)}$ est 2-croissante.

8. (a) Montrer que $F_{(X,Y)}(x, y) \leq \min(F_X(x), F_Y(y))$.

8. (b) Montrer que $F_{(X,Y)}(x, y) \geq \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0)$.

On a ainsi démontré le théorème des bornes de Fréchet-Hoeffding :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0) \leq F_{(X,Y)}(x, y) \leq \min(F_X(x), F_Y(y)).$$

Premier exemple : questions 9 à 12

Soient $]a_1, b_1[$ et $]a_2, b_2[$ deux intervalles, avec $-\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty$ pour $j \in \{1, 2\}$, et $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}_{(a_1, b_1)} \times \mathcal{F}_{(a_2, b_2)}$.

On suppose, dans cet exemple seulement, que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = \min(F_1(x), F_2(y)).$$

9. Montrer que $F_X = F_1$ et $F_Y = F_2$.

10. (a) On pose $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$. Déterminer les lois de U et V .

10. (b) Déterminer la fonction de répartition du couple (U, V) .

10. (c) Représenter dans le plan rapporté à un repère (O, i, j) l'ensemble :

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq F_{(U,V)}(x, y) \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

10. (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Montrer que :

$$P\left(U - V > \frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\left[\frac{k}{n} < U \leq \frac{k+1}{n}\right] \cap \left[V \leq \frac{k}{n}\right]\right).$$

10. (e) En déduire que $P(U \leq V) = 1$, puis que $P(U = V) = 1$.

10. (f) On suppose que $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer que $X = F_1^{-1}(F_2(Y))$ p.s.

11. On suppose que $X(\Omega) \subset]a_1, b_1[$ et $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer qu'il existe deux fonctions g et h croissantes telles que $X = g(Y)$ p.s. et $Y = h(X)$ p.s.

On dit que X et Y sont comonotones.

12. Python. On suppose que F_1 est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et F_2 celle de la loi exponentielle de paramètre 1. Écrire une fonction Python `Nuage1` représentant dans $\mathbb{R}^2$ cent réalisations du couple (X, Y) .

Deuxième exemple : questions 13 à 17

On reprend les intervalles $]a_1, b_1[$, $]a_2, b_2[$ et les fonctions $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}_{(a_1, b_1)} \times \mathcal{F}_{(a_2, b_2)}$.

On suppose, dans cet exemple seulement, que :

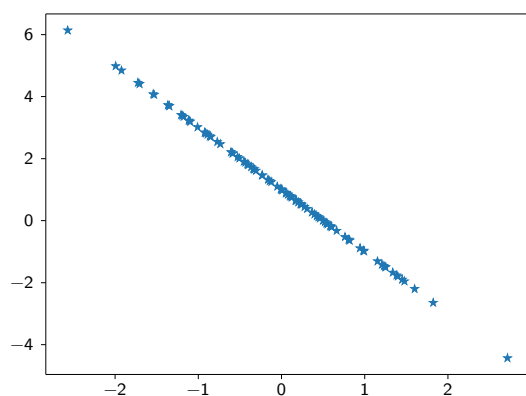
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0).$$

13. Montrer que $F_X = F_1$ et $F_Y = F_2$.

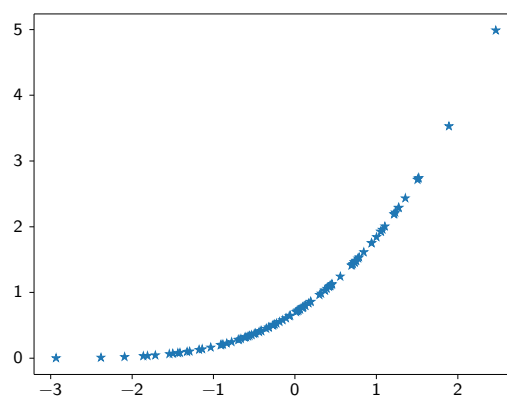
14. (a) On pose $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$. Déterminer les lois de U et $1 - V$, ainsi que la fonction de répartition du couple $(U, 1 - V)$.
14. (b) En déduire que $P(U = 1 - V) = 1$.
14. (c) On suppose que $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer que $X = F_1^{-1}(1 - F_2(Y))$ p.s.
15. On suppose que $X(\Omega) \subset]a_1, b_1[$ et $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer qu'il existe deux fonctions g et h décroissantes telles que $X = g(Y)$ p.s. et $Y = h(X)$ p.s.

On dit que X et Y sont contra-monotones.

16. Python. On suppose que F_1 est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et F_2 celle de la loi normale d'espérance 1 et de variance 4. Écrire une fonction Python `Nuage2` traçant dans $\mathbb{R}^2$ cent réalisations du couple (X, Y) .
17. Les deux graphes obtenus sont représentés ci-dessous. Expliquer quel graphe correspond à quel exemple.



(a) Nuage1 ou Nuage2 ?



(b) Nuage1 ou Nuage2 ?

II) Fonctions 2-croissantes et copules 2-dimensionnelles

Partie A : fonctions 2-croissantes

18. Soit $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \max(x, y)$, et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
18. (a) Montrer que $t \mapsto f_1(t, y_0)$ et $t \mapsto f_1(x_0, t)$ sont croissantes.
18. (b) Montrer que f_1 n'est pas 2-croissante.
19. Soit $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.
19. (a) Montrer que f_2 est 2-croissante.
19. (b) Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto f_2(t, y)$ ne soit pas croissante.
20. Que déduire des deux questions précédentes ?
21. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, 2-croissante sur $I \times J$.
21. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :
- $$\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+t) - F(x+h, y) - F(x, y+t) + F(x, y)}{ht} \right).$$
21. (b) En déduire que $\forall (x, y) \in I \times J, \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0$.
22. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
22. (a) Soient $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in I \times J$, avec $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$. Montrer que :

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) \, dx \right) dy.$$

22. (b) En déduire que F est 2-croissante sur $I \times J$ si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0.$$

23. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 2-croissante telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t, y) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(x, t) = 0.$$

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $t \mapsto F(t, y)$ et $t \mapsto F(x, t)$ sont croissantes.

Partie B : copule 2-dimensionnelle

Une copule C est une fonction réelle définie sur $[0, 1]^2$, 2-croissante sur $[0, 1]^2$, vérifiant :

$$\forall x \in [0, 1], \quad C(0, x) = C(x, 0) = 0, \quad C(1, x) = C(x, 1) = x.$$

On admet le théorème suivant : pour toute copule C , il existe un couple aléatoire (U, V) à valeurs dans $[0, 1]^2$, dont la fonction de répartition restreinte à $[0, 1]^2$ est C . On dit que (U, V) est associé à C .

Soient C une copule et (U, V) un couple associé.

24. Déterminer les lois de U et V .

25. On définit $C^* : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$C^*(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Montrer que C^* est une copule. On l'appelle copule de survie associée à C .

26. (a) Soit C une copule. Montrer que :

$$\forall v \in [0, 1], \forall u_1, u_2 \in [0, 1], \quad u_1 \leq u_2 \implies 0 \leq C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1,$$

et :

$$\forall u \in [0, 1], \forall v_1, v_2 \in [0, 1], \quad v_1 \leq v_2 \implies 0 \leq C(u, v_2) - C(u, v_1) \leq v_2 - v_1.$$

26. (b) En déduire que :

$$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2, \quad |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

26. (c) Montrer que C est continue sur $[0, 1]^2$.

III) Démonstration du théorème de Sklar et application

Partie A : le théorème

Soient $]a, b[$ et $]c, d[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $-\infty \leq c < d \leq +\infty$.

Soit (X, Y) un couple aléatoire tel que $(F_X, F_Y) \in \mathcal{F}_{(a,b)} \times \mathcal{F}_{(c,d)}$.

27. On définit $C : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$C(x, y) = \begin{cases} F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y)) & \text{si } (x, y) \in]0, 1[^2, \\ x & \text{si } y = 1, \\ y & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

27. (a) Montrer que, pour tous $(x, y) \in]0, 1[^2$:

$$C(x, y) = P([F_X(X) \leq x] \cap [F_Y(Y) \leq y]).$$

Montrer que cette formule reste valable pour tous $(x, y) \in [0, 1]^2$.

27. (b) En déduire que C est 2-croissante sur $[0, 1]^2$.

27. (c) En déduire que C est une copule.

28. Montrer qu'il existe une unique copule C telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

On dit que C est la représentation copule de $F_{(X,Y)}$. Ce résultat est le théorème de Sklar dans le cadre des hypothèses précédentes.

On admet la réciproque suivante : si C est une copule et F_1, F_2 sont deux fonctions de répartition de variables aléatoires réelles à densité, alors la fonction :

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto C(F_1(x), F_2(y))$$

est la fonction de répartition d'un couple aléatoire réel.

29. Soient C une copule, F_1, F_2 deux fonctions de répartition de variables aléatoires réelles à densité, et (X_1, X_2) un couple de fonction de répartition :

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Montrer que $F_{X_1} = F_1$ et $F_{X_2} = F_2$.

Partie B : distribution logistique bivariée de Gumbel

Soit (Z_1, Z_2) un couple aléatoire de fonction de répartition :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(Z_1, Z_2)}(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}}.$$

30. Montrer que Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires à densité et déterminer une densité de chacune.
31. Déterminer la représentation copule de $F_{(Z_1, Z_2)}$. On l'appelle copule logistique de Gumbel.

Partie C : famille des copules de Gumbel-Barnett

Soit $\theta \in [0, 1]$. On définit $C_\theta : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$C_\theta(u, v) = \begin{cases} uve^{-\theta \ln(u) \ln(v)} & \text{si } (u, v) \in]0, 1]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(u_1, v_1) \in]0, 1]^2$.

32. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(\theta) = \theta^2 \ln(u_1) \ln(v_1) - \theta(1 + \ln(u_1) + \ln(v_1)) + 1.$$

32. (a) Dresser les tableaux de variation de g selon les valeurs de :

$$\theta_* = \frac{1 + \ln(u_1) + \ln(v_1)}{2 \ln(u_1) \ln(v_1)}.$$

32. (b) Montrer que g est toujours positive.

33. Montrer que C_θ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[^2$ et est 2-croissante sur $]0, 1[^2$.

34. Montrer que C_θ est 2-croissante sur $[0, 1]^2$.

35. Montrer que C_θ est une copule.

36. Soit (X, Y) un couple aléatoire de fonction de répartition :

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-2y})e^{-\ln(1-e^{-x})\ln(1-e^{-2y})} & \text{si } (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer les lois de X et Y .

Formulaire Python

Simulations probabilistes

Python

```
import numpy.random as rd
```

`rd.random([q, r])` renvoie un tableau de dimensions $q \times r$ de réalisations indépendantes de la loi uniforme sur $[0, 1]$. `rd.random(n)` renvoie un tableau de taille n .

`rd.exponential(a, [q, r])` et `rd.exponential(a, n)` utilisent la loi exponentielle de paramètre $1/a$, pour $a > 0$.

`rd.normal(m, d, [q, r])` et `rd.normal(m, d, n)` utilisent la loi normale d'espérance m et de variance d^2 , pour $d > 0$.

`rd.uniform(a, b, [q, r])` et `rd.uniform(a, b, n)` utilisent la loi uniforme sur $[a, b]$, pour $a < b$.

Lorsque l'argument de taille est omis, ces commandes renvoient une seule réalisation.

Python

```
import scipy.special as sp
```

`sp.ndtr(x)` renvoie $\Phi(x)$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

`sp.ndtri(p)` renvoie $\Phi^{-1}(p)$ pour $0 < p < 1$.

Graphiques

Python

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(X, Y, linestyle=' ', marker='*')

plt.show()
```

`plt.plot` représente les points de coordonnées données par les tableaux X et Y .

L'argument `linestyle` précise s'ils sont reliés ; ici ils ne le sont pas. L'argument `marker` définit la forme des marqueurs ; ici ce sont des étoiles. `plt.show()` affiche le graphique.