



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESCP — 2026

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaires

1. La fonction g est continue et strictement croissante sur $]a, b[$; elle y est donc injective.

Pour $x \in]a, b[$, choisissons $s, t \in]a, b[$ tels que $s < x < t$. Comme g prend ses valeurs dans $[0, 1]$, la stricte croissance donne $0 \leq g(s) < g(x) < g(t) \leq 1$. Ainsi $g(x) \in]0, 1[$.

Soit $u \in]0, 1[$. Les limites aux extrémités permettent de choisir $s < t$ dans $]a, b[$ tels que $g(s) < u < g(t)$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur $[s, t]$ fournit un antécédent de u . Il est unique par stricte croissance.

La restriction de g est donc une bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$. Sa réciproque g^{-1} est continue et strictement croissante par le théorème de la bijection.

Si a est fini, la continuité et la croissance globale imposent $g(x) = 0$ pour $x \leq a$. Si b est fini, elles imposent $g(x) = 1$ pour $x \geq b$. En particulier, pour tout réel x , $0 < g(x) < 1$ si et seulement si $x \in]a, b[$. Cette observation servira pour les transformations de variables.

2. Par les propriétés d'une variable à densité, F_X est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$.

Sur $]a, b[$, la continuité de f et le théorème fondamental du calcul intégral donnent $F'_X = f$. Donc F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Pour $a < x < y < b$:

$$F_X(y) - F_X(x) = \int_x^y f(t) dt > 0,$$

car f est continue et strictement positive sur $[x, y]$. La fonction F_X est donc strictement croissante sur $]a, b[$.

La densité étant nulle en dehors de $]a, b[$ et son intégrale totale valant 1, les limites de F_X aux extrémités a et b sont respectivement 0 et 1. Pour des extrémités infinies, ce sont les limites usuelles d'une fonction de répartition; pour des extrémités finies, cela découle de la continuité et de l'absence de masse à l'extérieur de l'intervalle. Ainsi $F_X \in \mathcal{F}_{(a,b)}$.

I) Fonction de répartition d'un couple : propriétés et exemples

3. Les inclusions d'événements donnent :

$$0 \leq F_{(X,Y)}(t, y) \leq F_X(t), \quad 0 \leq F_{(X,Y)}(x, t) \leq F_Y(t).$$

Les fonctions de répartition marginales tendent vers 0 en $-\infty$. Le théorème d'encadrement donne donc les deux limites demandées.

4. (a) Chaque réalisation de Y , variable aléatoire réelle, est un réel fini. Il existe donc, pour chaque $\omega \in \Omega$, un entier naturel n tel que $Y(\omega) \leq n$. Par conséquent :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [Y \leq n] = \Omega.$$

En intersectant avec $[X \leq x]$, puis en prenant les probabilités :

$$F_X(x) = P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([X \leq x] \cap [Y \leq n]) \right).$$

4. (b) Les événements $A_n = [X \leq x] \cap [Y \leq n]$ sont croissants. La continuité croissante des probabilités donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(x, n) = P \left(\bigcup_n A_n \right) = F_X(x).$$

Pour tout réel $r \geq 0$, si $n = \lfloor r \rfloor$, alors :

$$F_{(X,Y)}(x, n) \leq F_{(X,Y)}(x, r) \leq F_{(X,Y)}(x, n+1).$$

Lorsque $r \rightarrow +\infty$, les deux bornes tendent vers $F_X(x)$. Ainsi

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(x, r) = F_X(x).$$

5. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Les événements $B_n = [X \leq n] \cap [Y \leq y]$ sont croissants et leur réunion est $[Y \leq y]$. La continuité croissante donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(n, y) = F_Y(y).$$

Pour $n \leq t < n+1$, la croissance en première variable donne $F_{(X,Y)}(n, y) \leq F_{(X,Y)}(t, y) \leq F_{(X,Y)}(n+1, y)$. Par encadrement :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, y) = F_Y(y).$$

6. Pour chaque réel t , la question 4 donne $\lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) = F_X(t)$. Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1.$$

De même, la question 5 donne :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, r) \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} F_Y(r) = 1.$$

On calcule ici séparément deux limites successives ; aucune permutation de limites n'est utilisée.

7. Soient $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$. En soustrayant les probabilités d'événements emboîtés, on obtient d'abord :

$$F_{(X,Y)}(b_1, b_2) - F_{(X,Y)}(a_1, b_2) = P(a_1 < X \leq b_1, Y \leq b_2).$$

De même :

$$F_{(X,Y)}(b_1, a_2) - F_{(X,Y)}(a_1, a_2) = P(a_1 < X \leq b_1, Y \leq a_2).$$

La différence vaut donc :

$$\begin{aligned} & F_{(X,Y)}(b_1, b_2) - F_{(X,Y)}(a_1, b_2) - F_{(X,Y)}(b_1, a_2) + F_{(X,Y)}(a_1, a_2) \\ &= P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) \geq 0. \end{aligned}$$

C'est exactement la 2-croissance.

8. (a) Posons $A = [X \leq x]$ et $B = [Y \leq y]$. Les inclusions $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donnent :

$$F_{(X,Y)}(x, y) \leq F_X(x), \quad F_{(X,Y)}(x, y) \leq F_Y(y).$$

D'où $F_{(X,Y)}(x, y) \leq \min(F_X(x), F_Y(y))$.

8. (b) La formule du crible donne :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq F_X(x) + F_Y(y) - 1.$$

Une probabilité est également positive ou nulle. Ainsi :

$$F_{(X,Y)}(x, y) \geq \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0).$$

9. Chaque $F_j \in \mathcal{F}_{(a_j, b_j)}$ tend vers 1 en $+\infty$: si b_j est fini, F_j vaut 1 à partir de b_j ; sinon c'est la limite imposée en $b_j = +\infty$.

La question 4 donne, pour tout x :

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \min(F_1(x), F_2(y)) = \min(F_1(x), 1) = F_1(x).$$

La question 5 donne de même $F_Y(y) = \min(1, F_2(y)) = F_2(y)$. Ainsi $F_X = F_1$ et $F_Y = F_2$.

10. (a) Pour $u \in]0, 1[$, la question 1 et la croissance de F_1 donnent l'équivalence, pour tout réel z :

$$F_1(z) \leq u \iff z \leq F_1^{-1}(u).$$

En effet, sur $]a_1, b_1[$, c'est la stricte croissance ; à l'extérieur, les seules valeurs possibles sont 0 et 1. D'après la question 9 :

$$P(U \leq u) = F_X(F_1^{-1}(u)) = F_1(F_1^{-1}(u)) = u.$$

Comme $U \in [0, 1]$, on a $F_U(u) = 0$ pour $u < 0$ et $F_U(u) = 1$ pour $u \geq 1$. Pour $u = 0$, les événements $[U \leq 1/n]$ décroissent vers $[U \leq 0]$; leurs probabilités tendent vers 0, donc $F_U(0) = 0$.

Ainsi $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Le même raisonnement avec F_2 donne $V \sim \mathcal{U}([0, 1])$. En particulier $P(0 < U < 1) = P(0 < V < 1) = 1$, et ces variables n'ont pas d'atomes.

10. (b) Pour $u, v \in]0, 1[$, les équivalences de la question précédente donnent :

$$F_{(U,V)}(u, v) = F_{(X,Y)}(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) = \min(u, v).$$

Posons $T(t) = 0$ si $t \leq 0$, $T(t) = t$ si $0 < t < 1$, et $T(t) = 1$ si $t \geq 1$. C'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Si une coordonnée est négative ou nulle, la probabilité conjointe est nulle. Si une coordonnée est supérieure ou égale à 1, son événement est certain et la probabilité

conjointe est la fonction de répartition de l'autre variable. En tenant compte aussi des bords 0 et 1, on obtient pour tous réels u, v :

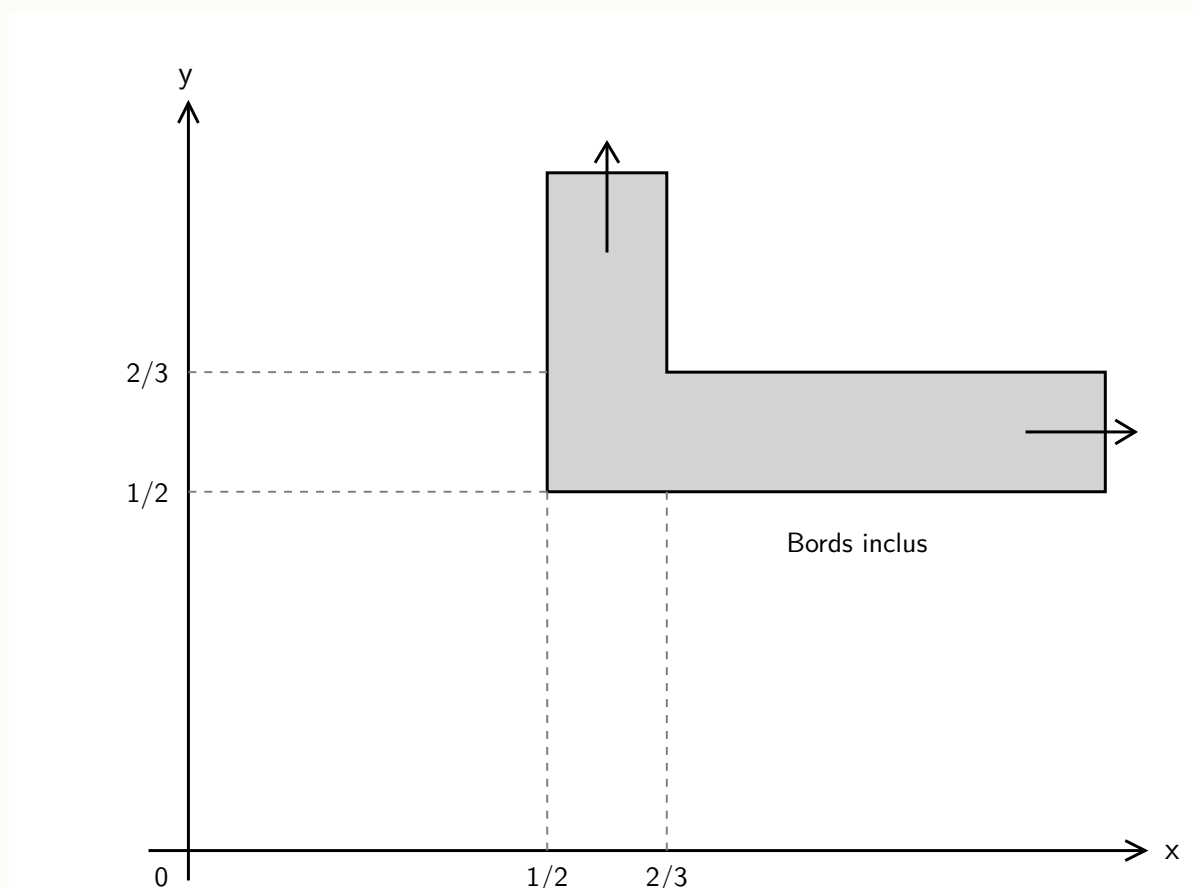
$$F_{(U,V)}(u, v) = \min(T(u), T(v)).$$

10. (c) Puisque $T(t) \geq 1/2$ équivaut à $t \geq 1/2$, la première inégalité impose $x \geq 1/2$ et $y \geq 1/2$. Puisque $2/3 < 1$, la seconde équivaut à $x \leq 2/3$ ou $y \leq 2/3$.

L'ensemble cherché est donc :

$$\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right] \times \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty \right[\times \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right] \right).$$

Il s'agit de deux bandes fermées de largeur $1/6$, l'une verticale et l'autre horizontale, ayant le carré $[1/2, 2/3]^2$ en commun. Elles se prolongent vers le haut et vers la droite. Tous les bords sont inclus.



10. (d) Si $U - V > 1/n$, alors $V \geq 0$ implique $U > 1/n$. Puisque $U \leq 1$, il existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $k/n < U \leq (k+1)/n$. Pour ce k :

$$V < U - \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n}.$$

Ainsi :

$$[U - V > 1/n] \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} \left(\left[\frac{k}{n} < U \leq \frac{k+1}{n} \right] \cap \left[V \leq \frac{k}{n} \right] \right).$$

La majoration de la probabilité d'une réunion finie par la somme des probabilités donne l'inégalité demandée.

10. (e) Pour $1 \leq k \leq n-1$, la formule de la question 10(b) donne :

$$P\left(\frac{k}{n} < U \leq \frac{k+1}{n}, V \leq \frac{k}{n}\right) = F_{(U,V)}\left(\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right) - F_{(U,V)}\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} - \frac{k}{n} = 0.$$

La question 10(d) implique donc $P(U - V > 1/n) = 0$ pour tout $n \geq 2$. Or :

$$[U > V] = \bigcup_{n \geq 2} [U - V > 1/n].$$

Ces événements sont croissants ; par continuité croissante, $P(U > V) = 0$, donc $P(U \leq V) = 1$.

La fonction de répartition de (U, V) est symétrique. En échangeant U et V dans le même raisonnement, on obtient $P(V \leq U) = 1$. L'intersection de ces deux événements a probabilité 1 ; ainsi $P(U = V) = 1$.

Méthode 2 — Achever avec l'espérance

Une fois $U \leq V$ presque sûrement établi grâce à 10(d), posons $W = V - U$. Cette variable est positive ou nulle presque sûrement et bornée, donc elle admet une espérance. Par linéarité et puisque les deux marginales sont uniformes :

$$E(W) = E(V) - E(U) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Pour chaque $n \geq 1$, l'inégalité de Markov donne $P(W \geq 1/n) \leq nE(W) = 0$. Comme $[W > 0] = \bigcup_{n \geq 1} [W \geq 1/n]$, la continuité croissante des probabilités donne $P(W > 0) = 0$. Ainsi $U = V$ presque sûrement. Cette méthode utilise l'égalité des moyennes pour transformer l'ordre presque sûr en égalité.

- 10.** (f) Par hypothèse, $F_2(Y)$ appartient à $]0, 1[$ pour toute réalisation; $F_1^{-1}(F_2(Y))$ est donc bien défini sur tout Ω .

Sur l'événement de probabilité 1 où $F_1(X) = F_2(Y)$, on a $0 < F_1(X) < 1$, ce qui implique $X \in]a_1, b_1[$ par la question 1. On peut donc appliquer F_1^{-1} :

$$X = F_1^{-1}(F_2(Y)) \text{ p.s.}$$

- 11.** Définissons sur les intervalles où elles sont utilisées :

$$g :]a_2, b_2[\rightarrow]a_1, b_1[, \quad g(y) = F_1^{-1}(F_2(y)),$$

$$h :]a_1, b_1[\rightarrow]a_2, b_2[, \quad h(x) = F_2^{-1}(F_1(x)).$$

Chaque fonction est strictement croissante, car elle est composée de deux fonctions

strictement croissantes. La question 10(e), puis l'application des réciproques, donnent $X = g(Y)$ p.s. et $Y = h(X)$ p.s. Ainsi X et Y sont comonotones.

12. La fonction de répartition exponentielle vaut $F_2(y) = 1 - e^{-y}$ pour $y > 0$. Son inverse sur $]0, 1[$ est :

$$F_2^{-1}(u) = -\ln(1 - u).$$

On peut simuler $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, puis poser $Y = -\ln(1 - \Phi(X))$. Pour la stabilité numérique, l'identité $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$, issue de la symétrie de la loi normale centrée réduite, donne $Y = -\ln(\Phi(-X))$.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import scipy.special as sp
import matplotlib.pyplot as plt

def Nuage1():
    X = rd.normal(0, 1, 100)
    Y = -np.log(sp.ndtr(-X))
    plt.plot(X, Y, linestyle=' ', marker='*')
    plt.show()
    return X, Y
```

X contient cent tirages de la loi normale centrée réduite. $\text{sp.ndtr}(-X)$ applique Φ coefficient par coefficient ; Y est obtenu par la transformation ci-dessus. Aucun second tirage indépendant n'est effectué : la dépendance recherchée est conservée.

Pour vérifier la loi conjointe, $F_2(Y) = \Phi(X)$; donc, pour $y > 0$:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq \min(x, \Phi^{-1}(F_2(y)))) = \min(\Phi(x), F_2(y)).$$

Pour $y \leq 0$, les deux membres sont nuls. Le code simule bien le premier exemple. Le tracé ne constitue pas une preuve ; le calcul précédent justifie la construction. Ce code a été exécuté avec un affichage non interactif ; les tableaux obtenus ont cent coefficients finis et les relations de transformation ont été contrôlées numériquement.

13. La question 4 donne :

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) = \max(F_1(x), 0) = F_1(x).$$

De même, la question 5 donne $F_Y(y) = \max(F_2(y), 0) = F_2(y)$. Ainsi $F_X = F_1$ et $F_Y = F_2$.

14. (a) La démonstration de 10(a) utilise seulement les lois marginales et leur appartenance aux classes $\mathcal{F}$. Elle s'applique ici et donne $U, V \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Pour $0 \leq v \leq 1$, puisque V n'a pas d'atomes :

$$P(1 - V \leq v) = P(V \geq 1 - v) = 1 - P(V < 1 - v) = 1 - (1 - v) = v.$$

Avec les valeurs 0 sous 0 et 1 au-dessus de 1, cela prouve $1 - V \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Pour $u, v \in]0, 1[$, les inversions donnent :

$$F_{(U,V)}(u, v) = \max(u + v - 1, 0).$$

L'absence d'atomes de V permet de remplacer $V < 1 - v$ par $V \leq 1 - v$ dans une probabilité, même en intersectant avec un autre événement. Par conséquent :

$$\begin{aligned} F_{(U, 1-V)}(u, v) &= P(U \leq u, V \geq 1 - v) = u - F_{(U,V)}(u, 1 - v) = u - \max(u - v, 0) \\ &= \min(u, v). \end{aligned}$$

Aux bords, puis en dehors du carré, les mêmes règles qu'en 10(b) s'appliquent. Pour tous réels u, v :

$$F_{(U, 1-V)}(u, v) = \min(T(u), T(v)),$$

où T est la fonction de répartition uniforme définie en 10(b).

14. (b) Le couple $(U, 1 - V)$ a exactement la fonction de répartition étudiée en 10(b). La démonstration de 10(d)-(e), appliquée à ce couple, donne :

$$P(U = 1 - V) = 1.$$

14. (c) Comme $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$, on a $1 - F_2(Y) \in]0, 1[$ partout. Sur l'événement de probabilité 1 où $F_1(X) = 1 - F_2(Y)$, la valeur $F_1(X)$ est intérieure à $]0, 1[$. Cela impose $X \in]a_1, b_1[$ et permet l'inversion :

$$X = F_1^{-1}(1 - F_2(Y)) \text{ p.s.}$$

15. Définissons :

$$g :]a_2, b_2[\rightarrow]a_1, b_1[, \quad g(y) = F_1^{-1}(1 - F_2(y)),$$

$$h :]a_1, b_1[\rightarrow]a_2, b_2[, \quad h(x) = F_2^{-1}(1 - F_1(x)).$$

La fonction $y \mapsto 1 - F_2(y)$ est strictement décroissante, et F_1^{-1} est strictement croissante ; leur composée g est donc strictement décroissante. Le même raisonnement vaut pour h .

L'égalité $F_1(X) = 1 - F_2(Y)$ presque sûre, obtenue en 14(b), donne après inversion $X = g(Y)$ p.s. et $Y = h(X)$ p.s. Les variables sont contra-monotones.

16. Pour la loi normale d'espérance 1 et de variance 4, on a :

$$F_2(y) = \Phi\left(\frac{y-1}{2}\right).$$

D'après la question 14(b), $\Phi(X) = 1 - \Phi((Y-1)/2) = \Phi(-(Y-1)/2)$ presque sûrement. La stricte croissance de Φ donne :

$$Y = 1 - 2X \text{ p.s.}$$

Python

```
import numpy.random as rd

import matplotlib.pyplot as plt

def Nuage2():
    X = rd.normal(0, 1, 100)
    Y = 1 - 2 * X
    plt.plot(X, Y, linestyle=' ', marker='*')
    plt.show()
    return X, Y
```

X est un tableau de cent tirages normaux centrés réduits ; Y est la transformation affine décroissante imposée. Elle a la loi normale d'espérance 1 et de variance 4.

Pour vérifier la loi conjointe, $Y \leq y$ équivaut à $X \geq (1-y)/2$. Si $(1-y)/2 > x$, la probabilité est nulle ; sinon elle vaut, par continuité de la loi normale :

$$\Phi(x) - \Phi((1-y)/2) = \Phi(x) + \Phi((y-1)/2) - 1.$$

Ainsi $F_{(X,Y)}(x, y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0)$. Le code a été exécuté avec un affichage non interactif; la taille des tableaux et l'identité $Y = 1 - 2X$ ont été vérifiées.

17. Le panneau (a) représente des points alignés sur une droite décroissante d'ordonnée à l'origine 1 et de pente -2 . Il correspond à Nuage2, puisque $Y = 1 - 2X$.

Le panneau (b) représente une relation croissante et non affine, avec des ordonnées positives. Il correspond à Nuage1, puisque $Y = -\ln(\Phi(-X))$. La croissance se déduit de celle de Φ : quand X augmente, $\Phi(-X)$ diminue et $-\ln(\Phi(-X))$ augmente.

II) Fonctions 2-croissantes et copules 2-dimensionnelles

Partie A : fonctions 2-croissantes

18. (a) Pour $s \leq t$, on a $\max(s, y_0) \leq \max(t, y_0)$: chacun des nombres s et y_0 est inférieur ou égal à $\max(t, y_0)$. Ainsi $t \mapsto f_1(t, y_0)$ est croissante. Par symétrie de $\max(x, y)$, $t \mapsto f_1(x_0, t)$ est également croissante.

18. (b) Prenons $(a_1, a_2) = (0, 0)$ et $(b_1, b_2) = (1, 1)$. L'accroissement rectangulaire vaut :

$$f_1(1, 1) - f_1(0, 1) - f_1(1, 0) + f_1(0, 0) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0.$$

La fonction f_1 n'est donc pas 2-croissante.

19. (a) Si $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$:

$$\begin{aligned} f_2(b_1, b_2) - f_2(a_1, b_2) - f_2(b_1, a_2) + f_2(a_1, a_2) &= b_1 b_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 a_2 \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi f_2 est 2-croissante sur $\mathbb{R}^2$.

19. (b) Pour $y = -1$, la fonction $t \mapsto f_2(t, -1) = -t$ est strictement décroissante. Elle n'est donc pas croissante.
20. La croissance séparée dans chaque variable n'implique pas la 2-croissance, comme le montre f_1 . Réciproquement, la 2-croissance n'implique pas la croissance séparée, comme le montre f_2 . Les deux propriétés ne sont donc pas équivalentes et aucune n'implique l'autre en général.
21. (a) Fixons $h \neq 0$. On réécrit le quotient sous la forme :

$$\frac{1}{h} \left(\frac{F(x+h, y+t) - F(x+h, y)}{t} - \frac{F(x, y+t) - F(x, y)}{t} \right).$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^2$, les dérivées partielles existent. Lorsque $t \rightarrow 0$, l'expression tend vers :

$$\frac{\partial_2 F(x+h, y) - \partial_2 F(x, y)}{h}.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, ce dernier quotient tend vers la dérivée par rapport à la première variable de $\partial_2 F$, soit $\partial_{1,2}^2 F(x, y)$. On obtient exactement la limite successive demandée, sans échanger les limites.

21. (b) Fixons $(x, y) \in I \times J$. Comme I, J sont ouverts, pour $h, t > 0$ assez petits les quatre sommets du rectangle appartiennent à $I \times J$. La 2-croissance donne :

$$F(x+h, y+t) - F(x+h, y) - F(x, y+t) + F(x, y) \geq 0.$$

Le dénominateur ht est strictement positif. Pour chaque petit $h > 0$, le passage à la limite $t \rightarrow 0^+$ conserve cette positivité. Le passage ensuite à la limite $h \rightarrow 0^+$ et la question 21(a) donnent $\partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0$.

22. (a) Pour chaque $y \in [a_2, b_2]$, la fonction $x \mapsto \partial_2 F(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a_1, b_1]$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne :

$$\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) \, dx = \partial_2 F(b_1, y) - \partial_2 F(a_1, y).$$

En intégrant cette égalité en y , puis en appliquant de nouveau le même théorème :

$$\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) \, dx \right) dy = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

Cela prouve l'identité. Les intégrales sont des intégrales successives de fonctions continues sur des segments ; aucune permutation d'intégrales ni aucun théorème d'intégration multiple n'est nécessaire. Si un segment est réduit à un point, les deux membres sont nuls.

22. (b) Si F est 2-croissante, la question 21(b) donne $\partial_{1,2}^2 F \geq 0$ sur $I \times J$.

Réciproquement, si $\partial_{1,2}^2 F \geq 0$ sur $I \times J$, l'intégrale intérieure de 22(a) est positive ou nulle pour chaque y , et son intégrale extérieure l'est également. Tout accroissement rectangulaire est donc positif ou nul. Cela prouve la 2-croissance et l'équivalence demandée.

23. Fixons $x_1 \leq x_2$ et $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $s \leq y$, la 2-croissance donne :

$$F(x_2, y) - F(x_1, y) \geq F(x_2, s) - F(x_1, s).$$

Par hypothèse, les deux termes du membre de droite tendent vers 0 quand $s \rightarrow -\infty$. Ainsi $F(x_2, y) - F(x_1, y) \geq 0$, ce qui prouve la croissance en première variable.

Fixons ensuite $y_1 \leq y_2$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour $s \leq x$, la 2-croissance donne :

$$F(x, y_2) - F(x, y_1) \geq F(s, y_2) - F(s, y_1).$$

En faisant tendre s vers $-\infty$, on obtient $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$. La fonction est donc croissante séparément dans les deux variables sous les hypothèses de cette question.

Partie B : copule 2-dimensionnelle

Résultat admis dans cette version adaptée : si C est une copule, il existe un couple (U, V) à valeurs dans $[0, 1]^2$ dont la fonction de répartition restreinte à ce carré est C . Ce résultat, déjà admis dans le sujet original, permet d'utiliser les propriétés probabilistes établies dans la partie I pour étudier les copules.

24. Puisque $V \leq 1$ partout, pour $u \in [0, 1]$:

$$F_U(u) = P(U \leq u, V \leq 1) = C(u, 1) = u.$$

Comme $U \in [0, 1]$, la fonction de répartition vaut 0 pour $u < 0$ et 1 pour $u > 1$. C'est celle de $\mathcal{U}([0, 1])$. Symétriquement $F_V(v) = C(1, v) = v$ sur $[0, 1]$, donc $V \sim \mathcal{U}([0, 1])$ également.

25. Méthode 1 — Vérifier la définition

Pour $u, v \in [0, 1]$, les conditions aux bords de C donnent :

$$C^*(0, v) = v - 1 + C(1, 1 - v) = 0, \quad C^*(u, 0) = u - 1 + C(1 - u, 1) = 0,$$

$$C^*(1, v) = v + C(0, 1 - v) = v, \quad C^*(u, 1) = u + C(1 - u, 0) = u.$$

Soient $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$ dans $[0, 1]$. Les termes affines s'annulent dans l'accroissement rectangulaire de C^* , qui vaut :

$$C(1 - b_1, 1 - b_2) - C(1 - a_1, 1 - b_2) - C(1 - b_1, 1 - a_2) + C(1 - a_1, 1 - a_2).$$

Cette quantité est l'accroissement de C sur le rectangle dont le sommet inférieur est $(1 - b_1, 1 - b_2)$ et le sommet supérieur $(1 - a_1, 1 - a_2)$. Elle est positive ou nulle par 2-croissance de C . Ainsi C^* est une copule.

Méthode 2 — Identifier une fonction de répartition

Prenons un couple (U, V) associé à C . La question 24 montre que ses marginales sont uniformes, donc sans atomes. Pour $u, v \in [0, 1]$, le crible appliqué aux événements complémentaires donne :

$$\begin{aligned} P(1 - U \leq u, 1 - V \leq v) &= P(U \geq 1 - u, V \geq 1 - v) \\ &= 1 - P(U < 1 - u) - P(V < 1 - v) + P(U < 1 - u, V < 1 - v) \\ &= 1 - (1 - u) - (1 - v) + C(1 - u, 1 - v) = C^*(u, v). \end{aligned}$$

Le remplacement des inégalités strictes par des inégalités larges ne modifie aucune probabilité, car les événements $[U = 1 - u]$ et $[V = 1 - v]$ sont négligeables. Le couple $(1 - U, 1 - V)$ a des marginales uniformes. Sa fonction de répartition est 2-croissante par 7 et vérifie les conditions aux bords. Sa restriction C^* est donc une copule.

26. (a) Appliquons la 2-croissance au rectangle $[u_1, u_2] \times [0, v]$. Puisque $C(u, 0) = 0$:

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \geq 0.$$

Appliquons-la ensuite au rectangle $[u_1, u_2] \times [v, 1]$. Comme $C(u, 1) = u$:

$$u_2 - u_1 - C(u_2, v) + C(u_1, v) \geq 0.$$

En réunissant les deux inégalités :

$$0 \leq C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1.$$

Pour $v_1 \leq v_2$, les rectangles $[0, u] \times [v_1, v_2]$ et $[u, 1] \times [v_1, v_2]$, avec $C(0, v) = 0$ et $C(1, v) = v$, donnent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure :

$$0 \leq C(u, v_2) - C(u, v_1) \leq v_2 - v_1.$$

26. (b) En échangeant si besoin les deux valeurs d'une même coordonnée dans 26(a), on obtient :

$$|C(u_2, v) - C(u_1, v)| \leq |u_2 - u_1|, \quad |C(u, v_2) - C(u, v_1)| \leq |v_2 - v_1|.$$

On décompose :

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1) = C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1).$$

L'inégalité triangulaire et les deux majorations donnent :

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

26. (c) Fixons $(u_0, v_0) \in [0, 1]^2$ et $\varepsilon > 0$. Si $|u - u_0| < \varepsilon/2$ et $|v - v_0| < \varepsilon/2$, la question précédente donne $|C(u, v) - C(u_0, v_0)| < \varepsilon$.

Cela prouve la continuité sur le carré, y compris en ses points de bord en considérant uniquement les points du domaine. On peut aussi écrire, par Cauchy-Schwarz :

$$|C(u, v) - C(u_0, v_0)| \leq \sqrt{2} \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}.$$

III) Démonstration du théorème de Sklar et application

Partie A : le théorème

27. (a) Posons $U = F_X(X)$ et $V = F_Y(Y)$. Pour $x, y \in]0, 1[$, les équivalences justifiées en 10(a) donnent :

$$[U \leq x] = [X \leq F_X^{-1}(x)], \quad [V \leq y] = [Y \leq F_Y^{-1}(y)].$$

Donc :

$$P(U \leq x, V \leq y) = F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y)) = C(x, y).$$

La même transformation marginale qu'en 10(a) donne $U, V \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Pour $y = 1$, on a $P(U \leq x, V \leq 1) = F_U(x) = x = C(x, 1)$. Pour $x = 1$, on a symétriquement la valeur y .

Si $x = 0$ ou $y = 0$, la probabilité est nulle, puisque $U, V \geq 0$ et $P(U = 0) = P(V = 0) = 0$. Cela correspond à la valeur 0 prévue dans la définition. Au point $(1, 1)$, les deux expressions au bord valent 1. La formule est donc valable sur tout $[0, 1]^2$.

27. (b) D'après 27(a), C est la restriction au carré de la fonction de répartition du couple (U, V) . La question 7 montre que cette fonction est 2-croissante sur $\mathbb{R}^2$, donc C est 2-croissante sur $[0, 1]^2$.
27. (c) La définition de C et 27(a) donnent $C(0, x) = C(x, 0) = 0$ ainsi que $C(1, x) = C(x, 1) = x$ pour $x \in [0, 1]$. Avec la 2-croissance établie en 27(b), ces égalités prouvent que C est une copule.

28. Existence

Prenons la copule construite en 27. Pour $x \in]a, b[$ et $y \in]c, d[$, les valeurs $F_X(x), F_Y(y)$ appartiennent à $]0, 1[$. La définition donne :

$$C(F_X(x), F_Y(y)) = F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(F_X(x)), F_Y^{-1}(F_Y(y))) = F_{(X,Y)}(x, y).$$

Il reste à vérifier les cas où une marginale prend la valeur 0 ou 1. Si $F_X(x) = 0$ ou $F_Y(y) = 0$, la borne supérieure de 8(a) impose $F_{(X,Y)}(x, y) = 0$, et les conditions aux bords de C donnent également $C(F_X(x), F_Y(y)) = 0$.

Si $F_X(x) = 1$, l'événement $[X \leq x]$ a probabilité 1 ; donc $F_{(X,Y)}(x, y) = F_Y(y) = C(1, F_Y(y))$. Si $F_Y(y) = 1$, on obtient de même $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) = C(F_X(x), 1)$. Ces cas couvrent tous les réels x, y . L'identité est donc établie sur $\mathbb{R}^2$.

Unicité

Soit D une autre copule donnant la même représentation. Pour $u, v \in]0, 1[$, prenons $x = F_X^{-1}(u)$ et $y = F_Y^{-1}(v)$. Alors :

$$D(u, v) = F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)) = C(u, v).$$

Les deux fonctions coïncident donc à l'intérieur du carré. Elles coïncident également sur son bord, car toute copule y vérifie les mêmes conditions. Ainsi $D = C$ sur $[0, 1]^2$.

Rectification de la réciproque énoncée après la question 28 : l'expression correcte est $C(F_1(x), F_2(y))$, et non $C(F_1(x), F_2(x))$.

Résultat admis dans cette version adaptée : si C est une copule et F_1, F_2 sont deux fonctions de répartition de variables à densité, alors $(x, y) \mapsto C(F_1(x), F_2(y))$ est la fonction de répartition d'un couple réel. Cette réciproque est admise dans le sujet original ; elle assure notamment l'existence du couple considéré en 29.

29. Pour $x_1 \in \mathbb{R}$, la question 4 et la continuité de C établie en 26 donnent :

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(F_1(x_1), 1) = F_1(x_1).$$

On utilise ici la limite $F_2(x_2) \rightarrow 1$ de toute fonction de répartition. De même, par la question 5 :

$$F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(1, F_2(x_2)) = F_2(x_2).$$

Ainsi les marginales du couple construit sont exactement F_1 et F_2 .

Partie B : distribution logistique bivariée de Gumbel

30. En faisant tendre la seconde coordonnée vers $+\infty$, puis la première, les questions 4 et 5 donnent :

$$F_{Z_1}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad F_{Z_2}(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}.$$

Posons $L(t) = (1 + e^{-t})^{-1}$. La fonction L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$L'(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} > 0.$$

Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont 0 et 1. Par le lien entre fonction de répartition continûment dérivable et densité, les deux variables sont à densité, avec une même densité :

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La normalisation peut être vérifiée sans changement de variable : pour $A < B$,

$$\int_A^B f(t) dt = L(B) - L(A), \text{ qui tend vers 1 lorsque } A \rightarrow -\infty \text{ et } B \rightarrow +\infty.$$

31. La question 30 montre que $L \in \mathcal{F}_{(-\infty, +\infty)}$, ce qui permet d'utiliser 27 et 28. Pour $u \in]0, 1[$, la résolution de $L(x) = u$ donne :

$$e^{-x} = \frac{1-u}{u}, \quad L^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right).$$

Ainsi, pour $u, v \in]0, 1[$:

$$C(u, v) = \frac{1}{1 + (1-u)/u + (1-v)/v} = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

Si $(u, v) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$, le dénominateur est strictement positif :

$u + v - uv = u + v(1-u)$, qui ne peut s'annuler que si $u = v = 0$. La formule donne les bonnes valeurs au bord : $C(u, 0) = C(0, v) = 0$, $C(u, 1) = u$ et $C(1, v) = v$. Finalement :

$$C(u, v) = \begin{cases} \frac{uv}{u + v - uv} & \text{si } (u, v) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (u, v) = (0, 0). \end{cases}$$

Il s'agit de l'unique copule logistique de Gumbel recherchée. Son existence comme copule découle de 27, appliquée au couple donné dans le sujet.

Partie C : famille des copules de Gumbel-Barnett

32. (a) Posons $A = -\ln(u_1) > 0$ et $B = -\ln(v_1) > 0$. Alors :

$$g(\theta) = AB\theta^2 + (A + B - 1)\theta + 1, \quad g'(\theta) = 2AB\theta + A + B - 1 = 2AB(\theta - \theta_*),$$

avec $\theta_* = (1 - A - B)/(2AB)$. Le facteur $2AB$ est strictement positif. Les signes de g' sont donc ceux de $\theta - \theta_*$.

Si $\theta_* \leq 0$, g est strictement croissante sur $[0, 1]$; lorsque $\theta_* = 0$, la dérivée s'annule seulement en 0.

θ	0		1
$g'(\theta)$		+	
$g(\theta)$	1	$\nearrow$	$AB + A + B$

Si $0 < \theta_* < 1$, g est strictement décroissante sur $[0, \theta_*]$ puis strictement croissante sur $[\theta_*, 1]$.

θ	0		θ_*		1
$g'(\theta)$		—	0	+	
$g(\theta)$	1	$\searrow$	$g(\theta_*)$	$\nearrow$	$AB + A + B$

La valeur au minimum est :

$$g(\theta_*) = 1 - \frac{(1 - A - B)^2}{4AB}.$$

Si $\theta_* \geq 1$, g est strictement décroissante sur $[0, 1]$; lorsque $\theta_* = 1$, sa dérivée s'annule seulement en 1.

θ	0	1
$g'(\theta)$		—
$g(\theta)$	1	$\searrow$ $AB + A + B$

Ces tableaux, avec les précisions sur les dérivées aux extrémités, couvrent aussi les cas limites $\theta_* = 0$ et $\theta_* = 1$.

32. (b) Méthode 1 — Décomposition en termes positifs

Pour $\theta \in [0, 1]$:

$$g(\theta) = (1 - \theta) + \theta(A + B) + \theta^2 AB.$$

Les trois termes sont positifs ou nuls. Si $0 \leq \theta < 1$, le premier est strictement positif. Si $\theta = 1$, le deuxième vaut $A + B > 0$. Ainsi $g(\theta) > 0$ sur tout $[0, 1]$.

Méthode 2 — Exploiter le minimum du tableau

Si $\theta_* \leq 0$, le minimum est $g(0) = 1 > 0$. Si $\theta_* \geq 1$, le minimum est $g(1) = AB + A + B > 0$.

Si $0 < \theta_* < 1$, posons $s = 1 - A - B$. L'hypothèse équivaut à $0 < s < 2AB$. Alors $s^2/(4AB) < AB$. Comme $A + B < 1$ et $(A - B)^2 \geq 0$, on a :

$$AB \leq \frac{(A + B)^2}{4} < \frac{1}{4}.$$

Donc $g(\theta_*) = 1 - s^2/(4AB) > 1 - AB > 3/4 > 0$. Puisque $g(\theta) \geq g(\theta_*)$, la positivité est établie aussi dans ce dernier cas.

33. Sur $]0, 1[^2$, les fonctions logarithme, exponentielle et produit sont de classe $\mathcal{C}^2$. Par composition et produit, C_θ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ouvert.

Posons $E(u, v) = e^{-\theta \ln(u) \ln(v)}$. On a :

$$\partial_1 C_\theta(u, v) = vE(u, v)(1 - \theta \ln(v)),$$

car $\partial_1 E(u, v) = -\theta \ln(v)E(u, v)/u$.

Pour calculer la dérivée mixte, on utilise $\partial_2(vE) = E(1 - \theta \ln(u))$ et $\partial_2(1 - \theta \ln(v)) = -\theta/v$. D'où :

$$\begin{aligned} \partial_{1,2}^2 C_\theta(u, v) &= E(u, v) [(1 - \theta \ln(u))(1 - \theta \ln(v)) - \theta] \\ &= E(u, v) [\theta^2 \ln(u) \ln(v) - \theta(1 + \ln(u) + \ln(v)) + 1]. \end{aligned}$$

Le facteur E est strictement positif. Le crochet est $g(\theta)$ de la question 32 avec $u_1 = u$, $v_1 = v$, et il est strictement positif. Ainsi $\partial_{1,2}^2 C_\theta(u, v) > 0$ sur $]0, 1[^2$. Par le critère démontré en 22(b), C_θ est 2-croissante sur cet ouvert.

34. Pour étendre la 2-croissance au bord, on établit d'abord la continuité sur le carré. Lorsque $u, v > 0$, on a $\ln(u) \ln(v) \geq 0$ et $\theta \geq 0$. Par conséquent :

$$0 \leq C_\theta(u, v) \leq uv.$$

L'inégalité reste vraie sur les axes, où $C_\theta = 0$ par définition. Si (u, v) tend vers un point dont une coordonnée est nulle, le majorant uv tend vers 0 : la fonction est continue en ce point par encadrement.

En tout point du carré dont les deux coordonnées sont strictement positives, y compris lorsqu'une coordonnée vaut 1, la formule logarithmique est la restriction d'une fonction continue définie sur $]0, +\infty[^2$. Ainsi C_θ est continue sur tout $[0, 1]^2$.

Soient $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$ dans $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, posons :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n+2}, \quad T_n(t) = \varepsilon_n + (1 - 2\varepsilon_n)t.$$

La fonction T_n est strictement croissante, envoie $[0, 1]$ dans $]0, 1[$ et tend vers l'identité. On peut donc appliquer la 2-croissance intérieure au rectangle de sommets $(T_n(a_1), T_n(a_2))$ et $(T_n(b_1), T_n(b_2))$:

$$C_\theta(T_n(b_1), T_n(b_2)) - C_\theta(T_n(a_1), T_n(b_2)) - C_\theta(T_n(b_1), T_n(a_2)) + C_\theta(T_n(a_1), T_n(a_2)) \geq 0.$$

Par la continuité établie ci-dessus, chaque terme tend vers sa valeur au sommet correspondant du rectangle initial. Le passage à la limite conserve l'inégalité. Donc C_θ est 2-croissante sur $[0, 1]^2$.

35. La 2-croissance sur le carré est acquise par 34. Sur les axes, $C_\theta(0, v) = C_\theta(u, 0) = 0$ par définition. Pour $u, v > 0$, puisque $\ln(1) = 0$:

$$C_\theta(u, 1) = u, \quad C_\theta(1, v) = v.$$

Ces identités restent valables aux extrémités nulles par la définition sur les axes. Les conditions définissant une copule sont toutes vérifiées. Ainsi C_θ est une copule pour tout $\theta \in [0, 1]$, y compris $\theta = 0$ et $\theta = 1$.

36. Méthode 1 — Lire les marginales par passage à la limite

Si $x \leq 0$, $F_{(X,Y)}(x, y) = 0$ pour tout y , donc $F_X(x) = 0$. Si $x > 0$, lorsque $y \rightarrow +\infty$, $1 - e^{-2y} \rightarrow 1$ et $\ln(1 - e^{-2y}) \rightarrow 0$. La question 4 donne :

$$F_X(x) = (1 - e^{-x}) \times 1 \times e^0 = 1 - e^{-x}.$$

De même, si $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$. Si $y > 0$, on fait tendre x vers $+\infty$ et la question 5 donne $F_Y(y) = 1 - e^{-2y}$.

Ce sont les fonctions de répartition des lois exponentielles de paramètres 1 et 2 respectivement. Ainsi :

$$X \sim \mathcal{E}(1), \quad Y \sim \mathcal{E}(2).$$

Méthode 2 — Reconnaître la représentation copule

Posons $F_1(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $F_1(x) = 1 - e^{-x}$ pour $x > 0$. Posons $F_2(y) = 0$ pour $y \leq 0$ et $F_2(y) = 1 - e^{-2y}$ pour $y > 0$. Ce sont les fonctions de répartition de $\mathcal{E}(1)$ et $\mathcal{E}(2)$.

La fonction du sujet s'écrit $F_{(X,Y)}(x,y) = C_1(F_1(x), F_2(y))$: pour des coordonnées positives, c'est exactement la formule de C_θ avec $\theta = 1$; si une coordonnée est négative ou nulle, une marginale vaut 0 et C_1 vaut 0.

D'après 35, C_1 est une copule. La question 29 identifie alors les marginales comme F_1 et F_2 , ce qui donne de nouveau $X \sim \mathcal{E}(1)$ et $Y \sim \mathcal{E}(2)$.

Relevé des adaptations

28. Rectification de la réciproque admise : $C(F_1(x), F_2(x))$ est remplacé par $C(F_1(x), F_2(y))$. La deuxième coordonnée doit intervenir pour définir la fonction de répartition conjointe annoncée.

12 et 16, formulaire associé. La commande imprimée `rd.uniform` est rectifiée en `rd.uniform`, nom réel de la commande NumPy. La commande supplémentaire

sp.ndtri est conservée avec sa définition fournie dans le sujet original. Les simulations proposées dans le corrigé n'en ont pas besoin.

17. La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les positions vectorielles des cent marqueurs de chacun des deux panneaux sont conservées, y compris les points superposés, ainsi que les cadres, graduations et légendes.

10(c). La région demandée est représentée dans le corrigé par un SVG calculé à partir des bornes exactes $1/2$ et $2/3$; les bandes sont prolongées visuellement jusqu'au bord de la fenêtre et les flèches indiquent leur extension infinie.