



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques — Option économique

2022

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On s'intéresse au modèle proposé par Hull et White pour la détermination des primes d'assurance d'un défaut de crédit.

Lorsqu'une organisation a besoin de liquidité pour financer un projet, elle peut émettre des obligations. L'acheteur d'une obligation de valeur faciale 1 euro, de maturité m années, au taux de τ % par année donne 1 euro à l'organisation et reçoit tous les ans $\tau/100$ euro d'intérêt durant m années et 1 euro à maturité, ces versements étant a priori garantis.

Il est possible qu'avant la maturité l'organisation soit incapable d'honorer les paiements liés aux obligations vendues. On dit alors qu'elle est en défaut de paiement.

C'est sur cette possibilité que se construit un produit dérivé sous la forme d'un contrat, le CDS (credit default swap). Le souscripteur A paie à l'émetteur B une prime d'assurance annuelle de s euros par euro d'obligation assurée pendant les m années du contrat.

S'il n'y a aucun défaut de paiement jusqu'à la maturité, le souscripteur ne reçoit aucune compensation. Si un défaut survient à la date $t \in]0, m]$, B paie à A le capital $1 - \delta(t)$ euro par euro assuré, où $\delta(t)$ estime la valeur de l'obligation de valeur faciale 1 euro après le défaut. La fonction δ , définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, est appelée taux de recouvrement.

Dans tout le sujet, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La variable T , à valeurs strictement positives, désigne l'instant du défaut. Elle est à densité, avec une densité f_T strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_T sa fonction de répartition. Les densités considérées ont des limites finies à gauche et à droite en chaque point réel.

Partie 1 - Intensité de défaut

1. On suppose dans cette question f_T continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. a) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $P(T > t) > 0$.

1. b) Pour $h > 0$ et $t \geq 0$, on pose $K_{T,t}(h) = \frac{1}{h} P_{[T>t]}(T \leq t+h)$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} K_{T,t}(h)$ existe et vaut $f_T(t)/(1 - F_T(t))$.

On note désormais $\gamma_T(t) = f_T(t)/(1 - F_T(t))$.

1. c) Établir, pour tout $t \geq 0$:

$$F_T(t) = 1 - \exp \left(- \int_0^t \gamma_T(x) dx \right). \quad (1)$$

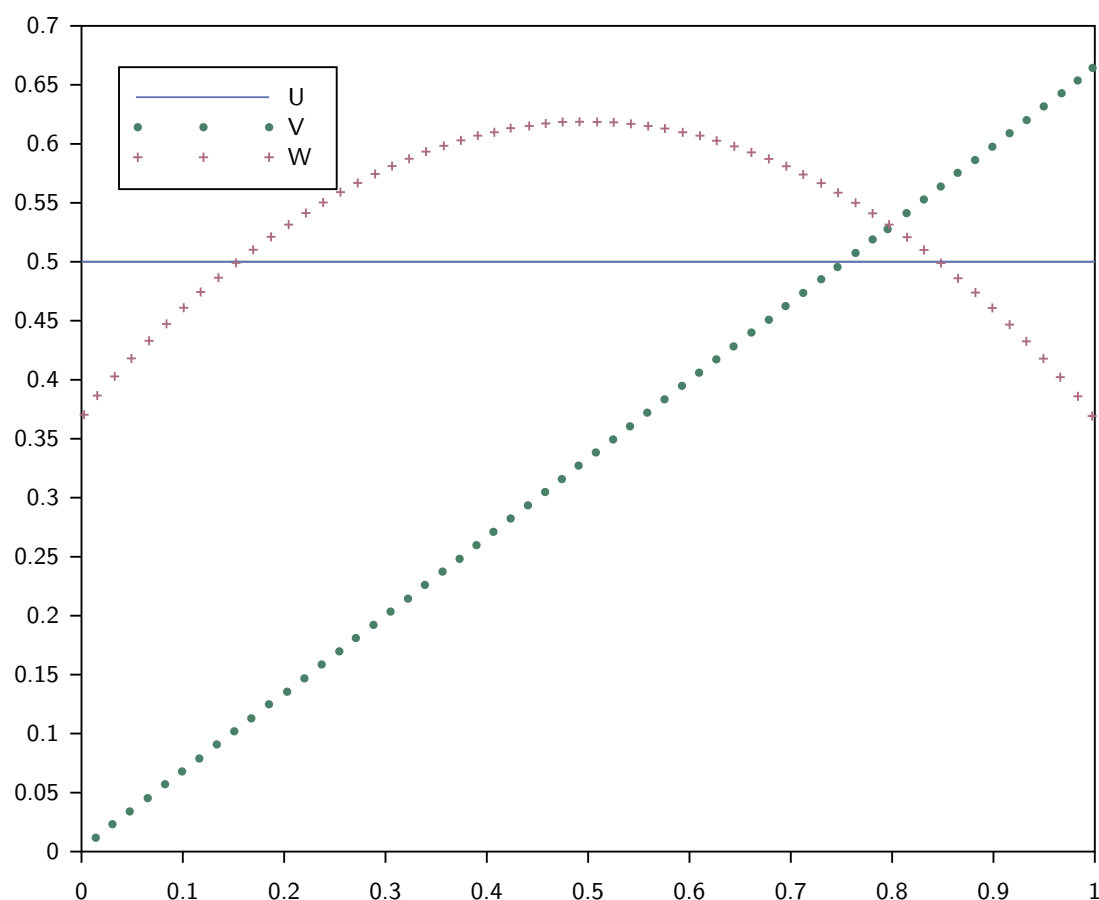
Établir aussi, pour $t \geq 0$ et $\theta \geq t$:

$$P_{[T > t]}(T \leq \theta) = 1 - \exp \left(- \int_t^\theta \gamma_T(x) dx \right).$$

Dans la suite, on suppose que F_T est donnée sur $\mathbb{R}_+$ par (1), où l'intensité de défaut γ_T est continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en un nombre fini de points, avec des limites unilatérales finies en ces points, et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \gamma_T(x) dx$ est-elle convergente ? Justifier que, pour tout $t > 0$, $F_T(t) \in]0, 1[$.

3. Pour trois organisations U , V et W , on propose les courbes d'intensité de défaut suivantes pour l'année à venir ; l'unité en abscisse est l'année.



Quelle organisation a la plus faible probabilité de défaut à échéance d'une année ? Si, au bout de neuf mois, aucune des organisations n'a fait défaut, laquelle a la plus faible probabilité de défaut à échéance des trois mois qui suivent ? Justifier graphiquement les réponses. Les positions des marqueurs sont des lectures graphiques approchées.

4. On suppose dans cette question γ_T constante de valeur $\lambda > 0$. Quelle est la loi de T ?
Quelle propriété du cours retrouve-t-on ici ? Que vaut $E(T)$?
5. On suppose dans cette question $\gamma_T(t) = \lambda t$ pour tout $t \geq 0$, où $\lambda > 0$.
5. a) Déterminer F_T et une densité de T .

5. b) Montrer que $E(T)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} \lambda t^2 \exp(-\lambda t^2/2) dt$.

5. c) En utilisant une loi normale, établir $E(T) = \sqrt{\pi/(2\lambda)}$.

6. On suppose $a \geq 2$ entier et, pour $i \in \{1, \dots, a\}$ et $t \in [i-1, i[$, $\gamma_T(t) = \gamma_i$. Par convention,

$$\sum_{k=1}^0 \gamma_k = 0.$$

6. a) Montrer que, pour ces valeurs de i et t :

$$F_T(t) = 1 - \exp(-\gamma_i(t - (i-1))) \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right).$$

6. b) En déduire, pour tout $t \in [0, a[$:

$$F_T(t) = 1 - \exp(-\gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}(t - \lfloor t \rfloor)) \exp\left(-\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \gamma_k\right). \quad (2)$$

6. c) La liste Python `gammaTab` contient $\gamma_1, \dots, \gamma_a$. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie $F_T(t)$ donnée par (2), lorsque $t \in [0, a[$. Pour $t \geq 0$, `int(t)` est sa partie entière ; `np.exp(x)` renvoie e^x . Les indices des listes commencent à zéro et la borne supérieure de range est exclue.

Python

```
import numpy as np

def F(t, gammaTab):
    produit = ...
    i = ...
```

```
for k in range(i):
    produit = produit * np.exp(-gammaTab[k])
r = 1 - np.exp(-gammaTab[i] * (...)) * produit
return r
```

Partie 2 - Modélisation du prix du CDS

On définit le modèle suivant.

L'unité de temps est l'année. Le taux r appartient à $]0, +\infty[$. Si $t_0, t \geq 0$, un euro investi sur un actif sans risque à l'instant t_0 donne un capital e^{rt} à l'instant $t_0 + t$.

A achète le CDS à B à l'instant initial 0, au prix de s euros de prime par an, pour une obligation de l'organisation C , de valeur faciale 1 euro et de maturité $m > 0$ années. Les deux intervenants investissent les sommes qu'ils échangent sur l'actif sans risque dès qu'ils les perçoivent.

A paie la prime à B en N versements identiques, où $N > 2$, aux instants $k\theta$, avec $\theta = m/N$ et $k \in \{1, \dots, N\}$. Par exemple, si $m = 4$ et $N = 16$, les paiements ont lieu tous les quarts d'année et représentent chacun le quart de la prime annuelle.

Si le défaut survient à un instant $T \in]k\theta, (k+1)\theta]$, A effectue un dernier paiement de valeur $(T - k\theta)s$ pour la période comprise entre $k\theta$ et T . En cas de défaut à t , A reçoit $1 - \delta(t)$ euro.

Pour un événement E , $\mathbf{1}_E$ désigne la variable de Bernoulli égale à 1 sur E et à 0 sur son complémentaire. Pour un intervalle J , $\mathbf{1}_J$ désigne la fonction indicatrice de J .

7. Valeur à maturité du capital versé par B à A .

7. a) Montrer que cette valeur aléatoire est :

$$U = (1 - \delta(T))e^{r(m-T)}\mathbf{1}_{[T \leq m]} = (1 - \delta(T))e^{r(m-T)}\mathbf{1}_{[0, m]}(T).$$

7. b) En déduire que U admet une espérance et :

$$E(U) = e^{rm} \int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt.$$

8. Valeur à maturité du capital versé par A à B .

8. a) Quel est le montant de la prime versée à chaque échéance ?

8. b) En déduire que, pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$, si $i\theta < T \leq (i+1)\theta$, A verse à B un capital qui vaut à maturité :

$$s \left(\theta \sum_{k=1}^i e^{r(m-k\theta)} + e^{r(m-T)}(T - i\theta) \right).$$

Calculer aussi ce capital lorsque $T \leq \theta$, puis lorsque $T > N\theta$.

8. c) En déduire que la valeur aléatoire à maturité vérifie :

$$V = s \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{r(m-k\theta)} \mathbf{1}_{[T > k\theta]} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{r(m-T)}(T - k\theta) \mathbf{1}_{[k\theta < T \leq (k+1)\theta]} \right),$$

ou encore :

$$V = s e^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} \mathbf{1}_{]k\theta, +\infty[}(T) + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-rT}(T - k\theta) \mathbf{1}_{[k\theta, (k+1)\theta]}(T) \right).$$

8. d) En conclure que V possède une espérance et :

$$E(V) = s e^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt \right).$$

9. Une prime est dite équitable si $E(U) = E(V)$. En déduire que l'unique valeur équitable est :

$$s = \frac{\int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt}{\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt}. \quad (3)$$

10. On étudie la relation (3) lorsque $N \rightarrow +\infty$. On note s_N l'expression à droite dans (3).

10. a) Soit g continue et décroissante sur $[0, m]$. En comparant $g(t)$ à ses valeurs aux extrémités de chaque intervalle $[(k-1)m/N, km/N]$, établir :

$$0 \leq \int_0^m g(t) dt - \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N g(km/N) \leq \frac{m}{N} (g(0) - g(m)).$$

En déduire la limite de

$$\frac{m}{N} \sum_{k=1}^N g(km/N)$$

lorsque $N \rightarrow +\infty$.

10. b) En déduire :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) = \int_0^m e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt.$$

10. c) Montrer, pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$:

$$0 \leq \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - km/N) f_T(t) dt \leq \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt.$$

En conclure que la somme de ces intégrales tend vers zéro, puis que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} s_N = \frac{\int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt}{\int_0^m e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt}.$$

10. d) Quelle est cette limite si T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et si δ est constante ?

Partie 3 - Cotation du CDS et intensité de défaut

On évalue l'intensité de défaut d'une organisation à partir des cotations de CDS d'obligations de maturités $1, 2, \dots, a$ années, où $a \geq 2$. Les primes annuelles cotées sont $s_1, \dots, s_a$, avec $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_a$. On reprend les notations des parties précédentes et on fait les hypothèses suivantes.

Le taux de recouvrement est constant, noté $\delta \in [0, 1[$. Pour $k \in \{1, \dots, a\}$:

$$s_k = (1 - \delta) \frac{\int_0^k e^{-rt} f_T(t) dt}{\int_0^k e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt}.$$

Sur $[0, a]$, l'intensité de défaut est définie comme à la question 6 par des réels strictement positifs $\gamma_1, \dots, \gamma_a$. On pose $A_0 = 1$ et, pour $k \in \{1, \dots, a\}$:

$$\alpha_k = r + \gamma_k, \quad A_k = A_{k-1} e^{-\alpha_k}.$$

11. Vérifier que $\gamma_1 = s_1/(1 - \delta)$.

12. a) Montrer, pour $i \in \{1, \dots, a\}$ et $t \in [i - 1, i[$:

$$e^{-rt}(1 - F_T(t)) = A_{i-1}e^{-\alpha_i(t-(i-1))}.$$

12. b) En déduire, pour $k \in \{1, \dots, a\}$:

$$\sum_{i=1}^k A_{i-1} \left(\frac{s_k}{1 - \delta} - \gamma_i \right) \int_{i-1}^i e^{-\alpha_i(t-(i-1))} dt = 0.$$

On pose, pour $k \in \{1, \dots, a\}$, $w_k = r + s_k/(1 - \delta)$ et $\theta_k = 1/w_k$.

12. c) En déduire :

$$\sum_{i=1}^k (w_k - \alpha_i) \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = 0,$$

puis :

$$\theta_k(1 - A_k) = \sum_{i=1}^k \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^k A_{i-1} \frac{1 - e^{-\alpha_i}}{\alpha_i}.$$

12. d) En conclure, pour $k \in \{2, \dots, a\}$:

$$\theta_k(1 - A_{k-1}e^{-\alpha_k}) - A_{k-1} \frac{1 - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}).$$

13. Montrer que, si $s_{k-1} = s_k$ pour $k \in \{2, \dots, a\}$, alors $\gamma_k = s_k/(1 - \delta)$.

Pour $k \in \{1, \dots, a\}$, on définit sur $]0, +\infty[$:

$$\varphi_k(t) = \theta_k(1 - A_{k-1}e^{-t}) - A_{k-1} \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

14. a) Montrer, pour tout $t > 0$:

$$\varphi'_k(t) = \frac{A_{k-1}}{t^2} ((\theta_k t^2 - t - 1)e^{-t} + 1).$$

14. b) En étudiant les variations de $t \mapsto 1 - (t + 1)e^{-t}$ sur $]0, +\infty[$, montrer que φ_k est strictement croissante sur cet intervalle.

14. c) Déterminer les limites de φ_k en 0 et en $+\infty$, et dresser son tableau de variations.

15. a) En remarquant que $\theta_k \leq \theta_{k-1}$ pour $k \in \{2, \dots, a\}$, montrer :

$$\varphi_k(w_k) \leq \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}).$$

15. b) Justifier $\varphi_k(\alpha_k) = \theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$. En déduire nécessairement $\theta_k > \theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$ et $s_k/(1 - \delta) \leq \gamma_k$.

15. c) Réciproquement, $s_1, \dots, s_k$ et r étant donnés, montrer que, si l'on a déterminé $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$, la condition $\theta_k > \theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$ suffit pour affirmer que γ_k est défini de manière unique.

16. Pour obtenir une valeur approchée des γ_k , on remplace les termes e^{-t} de $\varphi_k(t)$ par $1 - t$. On considère alors les γ_k solutions du système approché :

$$\theta_k(1 - A_{k-1}(1 - \alpha_k)) - A_{k-1} = \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}), \quad k \in \{1, \dots, a\}. \quad (4)$$

On pose $\theta_0 = 1$.

16. a) Exprimer γ_k en fonction de A_{k-1} , θ_k , θ_{k-1} et r .

16. b) Écrire un script Python qui détermine et affiche de proche en proche les γ_k solutions de (4), si a , r , δ et $s_1, \dots, s_a$ sont donnés par l'utilisateur. On suppose les données compatibles avec des intensités strictement positives. `float(input(...))`

lit un réel et `int(input(...))` un entier; `print` affiche ses arguments. La fonction `np.exp` est documentée à la question 6.

Pour $a = 7$, les cotations 0.01925, 0.0235, 0.0265, 0.0265, 0.0285, 0.03, 0.0335, respectivement pour les maturités 1, ..., 7 ans, avec $r = 3\%$ et $\delta = 30\%$, donnent la courbe d'intensité de défaut suivante.

