



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques — Option économique

2022

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 1 - Intensité de défaut

1. a) Pour $t \geq 0$, $P(T > t) = \int_t^{+\infty} f_T(u) du$. Prenons un point $u_0 > t : f_T(u_0) > 0$ et, par continuité, f_T reste strictement positive sur un petit segment de longueur non nulle autour de u_0 , contenu dans $]t, +\infty[$. Son intégrale y est strictement positive. Ainsi $1 - F_T(t) > 0$. Pour $t = 0$, on a même $P(T > 0) = 1$.

1. b) L'événement $[T > t] \cap [T \leq t + h]$ est $[t < T \leq t + h]$. Le conditionnement est défini par 1.a), donc :

$$K_{T,t}(h) = \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h(1 - F_T(t))}.$$

La continuité de f_T en t donne la dérivée de F_T en t , à droite pour $t = 0$, égale à $f_T(t)$. La limite cherchée vaut donc $f_T(t)/(1 - F_T(t))$.

1. c) Posons $S(t) = 1 - F_T(t) > 0$. La fonction $\ln S$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec $S'(t) = -f_T(t)$, donc $(\ln S)' = -\gamma_T$. Puisque $T > 0$, $S(0) = 1$. L'intégration sur $[0, t]$ donne :

$$\ln S(t) = - \int_0^t \gamma_T(x) dx.$$

Après exponentiation, on obtient (1). Pour $\theta \geq t$, le même calcul entre t et θ donne :

$$P(T > \theta \mid T > t) = \frac{S(\theta)}{S(t)} = \exp \left(- \int_t^\theta \gamma_T(x) dx \right).$$

En prenant l'événement complémentaire sous la probabilité conditionnelle, on obtient la formule demandée, y compris si $\theta = t$.

2. Question adaptée au programme actuel : les limites unilatérales finies précisées dans le sujet maintiennent les densités et les intégrales locales dans le cadre du programme. Pour tout $t < +\infty$, la fonction γ_T est intégrable sur $[0, t]$ en découpant aux éventuels points de discontinuité. Pour $t > 0$, son intégrale y est strictement positive : un point de continuité de $]0, t[$ existe et fournit un petit segment où elle est strictement positive. Ainsi :

$$0 < \exp \left(- \int_0^t \gamma_T(x) dx \right) < 1,$$

ce qui prouve $0 < F_T(t) < 1$. Comme $F_T(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, (1) impose

$\int_0^t \gamma_T \rightarrow +\infty$. En effet, si ces intégrales croissantes avaient une limite finie L , $1 - F_T(t)$ tendrait vers $e^{-L} > 0$. L'intégrale sur $[0, +\infty[$ diverge donc vers $+\infty$.

3. L'application $u \mapsto 1 - e^{-u}$ est strictement croissante. La probabilité de défaut avant un an est donc classée comme l'aire sous l'intensité sur $[0, 1]$. Sur la figure, l'aire de V est la plus faible : elle vaut graphiquement environ 0.33, contre 0.50 pour U et environ 0.54 pour W . C'est donc V qui a la plus faible probabilité de défaut à un an.

Conditionnellement à l'absence de défaut au bout de neuf mois, soit à $t = 0.75$, il faut comparer les aires sur $[0.75, 1]$, et non les seules ordonnées finales. Les lectures graphiques donnent environ 0.146 pour V , 0.125 pour U et 0.119 pour W . L'aire sous W est la plus faible : sa partie sous la droite de U après le croisement compense sa petite partie au-dessus au début de la période. C'est donc W qui a la plus faible probabilité conditionnelle de défaut durant le dernier trimestre. Ces valeurs sont des estimations graphiques, pas des données exactes de loi.

4. Pour $t \geq 0$, (1) donne $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$; pour $t < 0$, $F_T(t) = 0$. Ainsi T suit la loi exponentielle de paramètre λ . La formule conditionnelle de 1.c) devient :

$$P(T \leq t + u \mid T > t) = 1 - e^{-\lambda u} = P(T \leq u), \quad u \geq 0.$$

On retrouve l'absence de mémoire. La loi exponentielle possède une espérance égale à $1/\lambda$.

5. a) L'intégrale de l'intensité sur $[0, t]$ vaut $\lambda t^2/2$. Par conséquent :

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t^2/2} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable hors de 0. Une densité est :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \lambda t e^{-\lambda t^2/2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Elle a des limites finies à gauche et à droite en chaque point, notamment une limite nulle en 0.

5. b) Puisque $T > 0$, l'existence de son espérance équivaut à la convergence de

$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t^2/2} dt$. Pour $t \geq 1$, le rapport de l'intégrande à $1/t^2$ est $\lambda t^4 e^{-\lambda t^2/2}$, qui tend vers zéro par croissance comparée ; ainsi l'intégrande est majoré à partir d'un certain rang par $1/t^2$, d'intégrale convergente. Sur chaque segment il est continu. L'intégrale converge et le transfert donne exactement la formule demandée.

5. c) Méthode 1 — Moment d'ordre deux d'une normale

Soit Z de loi normale de moyenne 0 et de variance $1/\lambda$. Sa densité est $q(t) = \sqrt{\lambda/(2\pi)} e^{-\lambda t^2/2}$. Puisque $E(Z^2) = 1/\lambda$ et que $t^2 q(t)$ est paire :

$$\int_0^{+\infty} t^2 q(t) dt = \frac{1}{2\lambda}.$$

Ainsi :

$$E(T) = \lambda \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \int_0^{+\infty} t^2 q(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}.$$

Méthode 2 — Intégration par parties et masse d'une normale

Sur $[0, b]$, intégrer par parties avec $u(t) = t$ et $v'(t) = \lambda t e^{-\lambda t^2/2}$, donc $v(t) = -e^{-\lambda t^2/2}$, donne :

$$\int_0^b \lambda t^2 e^{-\lambda t^2/2} dt = -b e^{-\lambda b^2/2} + \int_0^b e^{-\lambda t^2/2} dt.$$

Le premier terme tend vers zéro par croissance comparée. La densité q ci-dessus est paire et de masse totale 1, donc son intégrale sur $[0, +\infty[$ vaut $1/2$. Après passage à la limite, on retrouve $E(T) = \sqrt{2\pi/\lambda}/2 = \sqrt{\pi/(2\lambda)}$. La première méthode utilise la variance normale, la seconde la normalisation de sa densité.

6. a) Pour $t \in [i-1, i[$, Chasles donne :

$$\int_0^t \gamma_T(x) dx = \sum_{k=1}^{i-1} \int_{k-1}^k \gamma_k dx + \int_{i-1}^t \gamma_i dx = \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k + \gamma_i(t - (i-1)).$$

Les valeurs éventuelles aux bornes ne changent pas l'intégrale. L'insertion dans (1) donne la formule, avec la convention de somme vide pour $i = 1$.

6. b) L'unique entier i tel que $t \in [i-1, i[$ est $i = \lfloor t \rfloor + 1$. Remplacer i par cette valeur dans 6.a) donne (2), notamment pour t entier et pour $t = 0$.

6. c) Code adapté en Python. L'indice Python i vaut $\lfloor t \rfloor$; les coefficients des périodes entièrement écoulées sont alors `gammaTab[0]` à `gammaTab[i-1]`.

Python

```
import numpy as np

def F(t, gammaTab):
    produit = 1
    i = int(t)
    for k in range(i):
        produit = produit * np.exp(-gammaTab[k])
    r = 1 - np.exp(-gammaTab[i] * (t - i)) * produit
    return r
```

Le produit vide vaut 1 lorsque $0 \leq t < 1$. Si t est entier, l'exponentielle de la période courante vaut 1, conformément à (2). La fonction est utilisée pour $0 \leq t < a$, ce qui assure que `gammaTab[i]` existe.

Partie 2 - Modélisation du prix du CDS

7. a) Si $T \leq m$, B verse à l'instant T le capital $1 - \delta(T)$, immédiatement investi pendant $m - T$ années. Sa valeur à maturité est $(1 - \delta(T))e^{r(m-T)}$. Si $T > m$, aucun capital n'est versé. Comme $T > 0$, les deux écritures avec indicatrices données dans le sujet décrivent exactement ces cas.
7. b) La continuité de δ sur le segment $[0, m]$ la rend bornée. Pour $T \leq m$, $e^{r(m-T)} \leq e^{rm}$; donc $|U|$ est bornée. Plus directement, l'intégrale de transfert est absolument convergente puisque, pour un certain $C < +\infty$:

$$\int_0^m |1 - \delta(t)| e^{r(m-t)} f_T(t) dt \leq C e^{rm} \int_0^m f_T(t) dt < +\infty.$$

Le transfert, avec une fonction continue par morceaux à cause de l'indicatrice, donne la formule de $E(U)$. Cette justification reste valable même sans supposer ici $\delta(t) < 1$.

8. a) Chaque versement régulier représente une durée θ au taux annuel s ; il vaut donc $s\theta = sm/N$ euros.
8. b) Si $i\theta < T \leq (i+1)\theta$, les i échéances précédentes ont chacune versé $s\theta$, aux dates $k\theta$, $1 \leq k \leq i$. Leurs valeurs à maturité sont $s\theta e^{r(m-k\theta)}$. Le dernier paiement, effectué à T , vaut $s(T - i\theta)$ et devient $s(T - i\theta)e^{r(m-T)}$. La somme est celle demandée.

Si $T \leq \theta$, aucune échéance régulière n'a précédé le défaut : le capital à maturité vaut $sTe^{r(m-T)}$. Si $T > N\theta = m$, il n'y a aucun défaut pendant le contrat : les N versements réguliers donnent

$$s\theta \sum_{k=1}^N e^{r(m-k\theta)}.$$

8. c) Pour chaque k , le versement régulier à $k\theta$ est compté lorsque $T > k\theta$. Si $T \leq m$, un seul des intervalles $]k\theta, (k+1)\theta]$, $0 \leq k \leq N-1$, contient T et fournit le versement

de régularisation. En additionnant ces contributions, on obtient la première formule de V . La seconde résulte de la factorisation de e^{rm} et de l'écriture des événements comme indicatrices de fonctions de T .

Les bornes sont cohérentes même si $T = k\theta$: le paiement de la période achevée est alors compté dans la régularisation de l'intervalle précédent, et non dans le paiement régulier d'indicatrice $[T > k\theta]$.

8. d) Il n'y a qu'un nombre fini de termes. Les premières contributions sont bornées ; pour les secondes, sur l'intervalle correspondant, $0 \leq T - k\theta \leq \theta$ et $e^{r(m-T)} \leq e^{rm}$, donc chaque contribution est également bornée en valeur absolue. Le transfert est absolument convergent pour chacune d'elles. Par linéarité :

$$E(\mathbf{1}_{[T > k\theta]}) = 1 - F_T(k\theta),$$

$$E\left(e^{-rT}(T - k\theta)\mathbf{1}_{[k\theta, (k+1)\theta]}(T)\right) = \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}(t - k\theta)f_T(t) dt.$$

Ces deux identités donnent exactement la formule de $E(V)$.

9. Question adaptée au programme actuel : la convention d'équité est explicitée dans l'énoncé. Notons D_N le dénominateur de (3). Tous ses termes sont positifs ou nuls. Par 2, $1 - F_T(k\theta) > 0$ pour chaque k , et $\theta > 0$, donc sa première somme est strictement positive : $D_N > 0$. Les espérances de 7.b) et 8.d) sont égales si et seulement si :

$$\int_0^m (1 - \delta(t))e^{-rt}f_T(t) dt = sD_N.$$

La division par $D_N > 0$ donne (3) et établit l'unicité de la valeur réelle équitable. Dans le cas économique $0 \leq \delta(t) \leq 1$, cette valeur est positive ou nulle ; cette restriction de signe n'est pas nécessaire à l'égalité des espérances demandée.

10. a) Question adaptée au programme actuel : on établit une comparaison de rectangles pour les fonctions continues décroissantes, suffisante pour la fonction de 10.b), au lieu d'invoquer un théorème général sur les sommes de Riemann.

Pour $t \in [(k-1)\theta, k\theta]$, la décroissance donne $g(k\theta) \leq g(t) \leq g((k-1)\theta)$. Après intégration sur cet intervalle, puis sommation de $k = 1$ à N , on obtient :

$$\theta \sum_{k=1}^N g(k\theta) \leq \int_0^m g(t) dt \leq \theta \sum_{k=1}^N g((k-1)\theta).$$

La différence entre la somme de droite et celle de gauche est télescopique : elle vaut $\theta(g(0) - g(m))$. C'est la majoration annoncée. Puisque $\theta = m/N \rightarrow 0$, l'encadrement donne la limite $\int_0^m g(t) dt$.

10. b) La fonction $S = 1 - F_T$ est continue, strictement positive et décroissante. Si $u < v$, alors $e^{-rv} \leq e^{-ru}$ et $S(v) \leq S(u)$; les facteurs étant positifs, $e^{-rv}S(v) \leq e^{-ru}S(u)$. Ainsi $g(t) = e^{-rt}(1 - F_T(t))$ est continue et décroissante sur $[0, m]$. L'application de 10.a) donne la limite demandée.

10. c) Sur l'intervalle d'intégration, $0 \leq t - km/N \leq m/N$; de plus $0 < e^{-rt} \leq 1$ et $f_T(t) \geq 0$. Leur produit est donc compris entre 0 et $(m/N)f_T(t)$, d'où l'inégalité après intégration. La somme des termes est majorée par :

$$\frac{m}{N} \int_0^m f_T(t) dt = \frac{m}{N} F_T(m) \leq \frac{m}{N} \rightarrow 0.$$

Avec 10.b), le dénominateur D_N tend vers $D = \int_0^m e^{-rt}(1 - F_T(t)) dt$. L'intégrande est continue et strictement positive, donc $D > 0$. Le numérateur ne dépend pas de N et le passage à la limite dans le quotient donne la formule du sujet.

10. d) Pour la loi exponentielle, $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ et $1 - F_T(t) = e^{-\lambda t}$ sur $[0, m]$. Le numérateur vaut $(1 - \delta)\lambda \int_0^m e^{-(r+\lambda)t} dt$ et le dénominateur vaut cette même intégrale, strictement positive. La limite est donc $(1 - \delta)\lambda$.

Partie 3 - Cotation du CDS et intensité de défaut

11. Sur $[0, 1[$, $1 - F_T(t) = e^{-\gamma_1 t}$ et $f_T(t) = \gamma_1 e^{-\gamma_1 t}$, sauf éventuellement aux bornes qui ne changent pas les intégrales. Ainsi :

$$s_1 = (1 - \delta) \frac{\gamma_1 \int_0^1 e^{-(r+\gamma_1)t} dt}{\int_0^1 e^{-(r+\gamma_1)t} dt} = (1 - \delta) \gamma_1.$$

L'intégrale simplifiée est strictement positive et $1 - \delta > 0$, donc $\gamma_1 = s_1 / (1 - \delta)$. Les hypothèses impliquent $s_1 > 0$, puis $s_k > 0$ pour tout k , par croissance des cotations.

12. a) Par récurrence dans la définition de A_i ,

$$A_{i-1} = \exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j\right) = \exp\left(-r(i-1) - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j\right).$$

La formule de 6.a) donne donc :

$$e^{-rt}(1 - F_T(t)) = e^{-rt - \sum_{j < i} \gamma_j - \gamma_i(t - (i-1))} = A_{i-1} e^{-(r+\gamma_i)(t - (i-1))}.$$

Comme $\alpha_i = r + \gamma_i$, c'est l'égalité demandée. On note aussi que $A_i > 0$, et $A_i < 1$ pour $i \geq 1$.

12. b) L'égalité définissant s_k se réécrit :

$$\int_0^k e^{-rt} \left(\frac{s_k}{1 - \delta} (1 - F_T(t)) - f_T(t) \right) dt = 0.$$

Sur $]i-1, i[$, la dérivation de 6.a) donne $f_T(t) = \gamma_i(1 - F_T(t))$. On découpe l'intégrale aux entiers, puis on utilise 12.a). On obtient la somme demandée, les valeurs aux points de découpe n'affectant pas l'intégration.

12. c) Comme $\alpha_i > 0$, une primitive donne :

$$A_{i-1} \int_{i-1}^i e^{-\alpha_i(t-(i-1))} dt = A_{i-1} \frac{1 - e^{-\alpha_i}}{\alpha_i} = \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i}.$$

De plus $s_k/(1 - \delta) - \gamma_i = w_k - \alpha_i$. L'insertion dans 12.b) donne la première somme nulle. En la développant :

$$w_k \sum_{i=1}^k \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} - \sum_{i=1}^k (A_{i-1} - A_i) = 0.$$

La seconde somme vaut $A_0 - A_k = 1 - A_k$. Comme $w_k > 0$, on divise par w_k pour obtenir la première égalité contenant θ_k . La dernière égalité utilise à nouveau $A_i = A_{i-1}e^{-\alpha_i}$.

12. d) Écrivons la formule de 12.c) aux rangs k et $k - 1$, puis soustrayons. Il reste :

$$\theta_k(1 - A_k) - \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}) = A_{k-1} \frac{1 - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k}.$$

Remplacer A_k par $A_{k-1}e^{-\alpha_k}$ et réorganiser donne l'identité annoncée.

13. Si $s_{k-1} = s_k$, alors $w_{k-1} = w_k$ et $\theta_{k-1} = \theta_k$. L'égalité de 12.d) devient, après soustraction des termes communs :

$$A_{k-1}(1 - e^{-\alpha_k}) \left(\theta_k - \frac{1}{\alpha_k} \right) = 0.$$

On a $A_{k-1} > 0$, $\alpha_k > 0$ et donc $1 - e^{-\alpha_k} > 0$. Il vient $\theta_k = 1/\alpha_k$, soit $\alpha_k = w_k$. Par définition, $\gamma_k = \alpha_k - r = s_k/(1 - \delta)$.

14. a) Sur $]0, +\infty[$, les fonctions intervenant sont dérivables et le dénominateur est non nul. En dérivant le quotient :

$$\left(\frac{1 - e^{-t}}{t} \right)' = \frac{te^{-t} - (1 - e^{-t})}{t^2} = \frac{(t + 1)e^{-t} - 1}{t^2}.$$

Donc $\varphi'_k(t) = \theta_k A_{k-1} e^{-t} - A_{k-1}((t + 1)e^{-t} - 1)/t^2$, ce qui se regroupe sous la forme demandée.

14. b) Posons $q(t) = 1 - (t + 1)e^{-t}$, également définie en 0. On a $q(0) = 0$ et $q'(t) = te^{-t} > 0$ pour $t > 0$. Donc $q(t) > 0$ pour $t > 0$. Le crochet de 14.a) s'écrit $q(t) + \theta_k t^2 e^{-t} > 0$. Comme $A_{k-1}/t^2 > 0$, $\varphi'_k(t) > 0$ et φ_k est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

14. c) Par la dérivabilité de $t \mapsto e^{-t}$ en 0, $(1 - e^{-t})/t \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0^+$. Donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_k(t) = \theta_k(1 - A_{k-1}) - A_{k-1}.$$

À l'infini, $e^{-t} \rightarrow 0$ et $(1 - e^{-t})/t \rightarrow 0$, donc $\varphi_k(t) \rightarrow \theta_k$. La fonction est continue et strictement croissante ; elle ne prend aucune de ses deux valeurs limites.

t	0^+	$+\infty$
$\varphi'_k(t)$	+	+
$\varphi_k(t)$	L_k	$\nearrow \theta_k$

Ici $L_k = \theta_k(1 - A_{k-1}) - A_{k-1}$. La première case de la dernière ligne est une limite et non une valeur en 0.

15. a) Pour $k \geq 2$, $s_k \geq s_{k-1}$ et $1 - \delta > 0$, donc $w_k \geq w_{k-1} > 0$ et $\theta_k \leq \theta_{k-1}$. Puisque $1/w_k = \theta_k$, une simplification directe donne :

$$\varphi_k(w_k) = \theta_k(1 - A_{k-1}e^{-w_k}) - A_{k-1}\theta_k(1 - e^{-w_k}) = \theta_k(1 - A_{k-1}).$$

Comme $0 < A_{k-1} < 1$, multiplier $\theta_k \leq \theta_{k-1}$ par $1 - A_{k-1} > 0$ donne le résultat.

15. b) La première égalité est exactement 12.d), avec la définition de φ_k . Par 14.c), toute valeur de φ_k est strictement inférieure à θ_k . En particulier :

$$\theta_{k-1}(1 - A_{k-1}) = \varphi_k(\alpha_k) < \theta_k.$$

Par 15.a), $\varphi_k(w_k) \leq \varphi_k(\alpha_k)$. La stricte croissance de φ_k impose $w_k \leq \alpha_k$. Après soustraction de r , on obtient $s_k/(1 - \delta) \leq \gamma_k$.

15. c) Les valeurs précédemment déterminées fixent $A_{k-1} \in]0, 1[$. Posons $c = \theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$. Par 15.a), $\varphi_k(w_k) \leq c$, tandis que l'hypothèse de cette question donne $c < \theta_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_k(t)$. Il existe donc un réel $b \geq w_k$ tel que $\varphi_k(b) > c$.

Sur le segment $[w_k, b]$, la fonction est continue. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit $\alpha_k \in [w_k, b]$ avec $\varphi_k(\alpha_k) = c$. Sa stricte croissance assure l'unicité, même sur tout $]0, +\infty[$. Enfin $w_k = r + s_k/(1 - \delta) > r$, donc $\gamma_k = \alpha_k - r > 0$. L'équation de 12.d) est ainsi satisfaite par une unique intensité positive, ce qui prouve l'affirmation.

16. a) Le système approché (4) se réécrit :

$$\theta_k(1 - A_{k-1}) + \theta_k A_{k-1} \alpha_k - A_{k-1} = \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}).$$

Les quantités θ_k et A_{k-1} sont strictement positives. On peut donc isoler α_k , puis soustraire r :

$$\gamma_k = \frac{1}{\theta_k} - r + \left(\frac{\theta_{k-1}}{\theta_k} - 1 \right) \left(\frac{1}{A_{k-1}} - 1 \right).$$

Pour $k = 1$, $A_0 = 1$ fait disparaître le dernier terme et redonne $\gamma_1 = s_1/(1 - \delta)$, indépendamment de la convention $\theta_0 = 1$. La linéarisation définit le système approché demandé; elle ne fournit pas de garantie générale sur l'erreur pour des paramètres quelconques.

16. b) Code adapté en Python. À l'entrée de l'étape k , A représente A_{k-1} et θ_prec représente θ_{k-1} . On calcule θ_k , puis γ_k , avant de mettre à jour $A_k = A_{k-1} \exp(-(r + \gamma_k))$. Cette mise à jour conserve la définition de A_k : seule l'équation donnant l'intensité a été linéarisée.

Python

```
import numpy as np

a = int(input("Nombre de maturites a = "))
r = float(input("Taux r, en valeur decimale = "))
delta = float(input("Recouvrement delta, en valeur decimale = "))
s = [float(input("Prime annuelle = ")) for k in range(a)]
A = 1.0
```

```
theta_prec = 1.0
gammaTab = []
for k in range(a):
    theta = 1 / (r + s[k] / (1 - delta))
    gamma = 1 / theta - r + (theta_prec / theta - 1) * (1 / A - 1)
    gammaTab.append(gamma)
    print(k + 1, gamma)
    A = A * np.exp(-(r + gamma))
    theta_prec = theta
```

Le script suppose $a \geq 2$, $r > 0$, $0 \leq \delta < 1$ et les données compatibles annoncées dans le sujet. Les valeurs de l'exemple sont saisies comme $r = 0.03$ et $\delta = 0.30$, sans les multiplier une seconde fois par 100. L'exécution du calcul sur ces données donne, arrondies à six décimales :

Période	Intensité approchée
[0, 1[	0.027500
[1, 2[	0.039821
[2, 3[	0.047011
[3, 4[	0.037857
[4, 5[	0.053886
[5, 6[	0.055818
[6, 7[	0.085990

Ces hauteurs correspondent à l'escalier de l'énoncé. La baisse entre les troisième et quatrième années est cohérente avec les deux cotations égales : 13 donne alors $\gamma_4 = s_4 / (1 - \delta) = 0.0265 / 0.7$. Les fonctions de 6.c) et le calcul de 16.b) ont été exécutés sur des cas numériques, y compris aux bornes entières pour 6.c). Ces calculs vérifient l'implémentation et ne remplacent pas les démonstrations.

Relevé des adaptations

Préambule et question 2 : précision des limites unilatérales finies pour les densités et l'intensité aux points de discontinuité, afin de rester dans le cadre officiel des densités et d'assurer l'intégrabilité locale utilisée dans (1).

Question 3 : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les lectures de points et d'aires sont explicitement approchées ; aucune formule exacte des deux nuages n'est ajoutée.

Question 6.c) : Code adapté en Python, avec conversion des indices et maintien des blancs à compléter. Les commandes utiles sont documentées dans l'énoncé.

Question 9 : la convention d'équité est explicitée comme l'égalité des espérances des capitaux à maturité.

Question 10.a) : le rappel d'un théorème général sur les sommes de Riemann est remplacé par un encadrement élémentaire de rectangles pour une fonction continue décroissante, applicable à 10.b). Les questions suivantes et la limite visée sont conservées.

Question 16.b) : Code adapté en Python. Les taux sont saisis sous forme décimale et l'hypothèse de compatibilité des données avec le système approché est explicitée. La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original ; ses hauteurs sont recalculées à partir des paramètres et de l'équation (4), puis comparées aux valeurs mesurées sur l'original.