



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques — Option économique

2021

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.

La partie 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle. Les parties 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question 17, la partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

Partie 1 - Loïs composées

On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$;
- une variable aléatoire Y sur cet espace, à valeurs dans J ;
- une famille $(X_t)_{t \in J}$ de variables aléatoires sur cet espace, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes de Y , telles que, pour tout $t \in J$, X_t suit la loi $\mu(t)$, où $\mu(t)$ désigne une loi de probabilité de paramètre t .

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = t \implies Z(\omega) = X_t(\omega),$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$. On considère dans cette partie une telle variable Z .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction $f_k : J \rightarrow [0, 1]$ par $f_k(t) = P(X_t = k)$.

1. Un exemple avec Python. On considère le script suivant, dans lequel `rd.random()` simule un réel uniforme sur $[0, 1[$ et les appels successifs utilisent des tirages indépendants. La fonction `print` affiche son argument.

Python

```
import numpy.random as rd
```

```
def X(t):
```

```
    r = 1
```

```
while rd.random() > ...:
    r = ...
return r

Y = rd.random()
Z = ...
print(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $J =]0, 1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont l'instruction correspondante est une simulation, compléter le script pour que Z soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$. Le cas exceptionnel où le générateur fournit exactement 0 sera écarté en tirant à nouveau Y jusqu'à obtenir $0 < Y < 1$.

Cas où Y est discrète

On suppose dans les questions 2 et 3 que Y est discrète.

2. a) Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P([Z = k] \cap [Y = y]) = f_k(y)P(Y = y),$$

et, si $P(Y = y) \neq 0$, que $P_{[Y=y]}(Z = k) = f_k(y)$.

2. b) En déduire :

$$P(Z = k) = E(f_k(Y)). \quad (1)$$

2. c) Un exemple où $J = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et la loi de Y est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$P(Y = n) = np^2(1 - p)^{n-1}.$$

Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p .

3. On suppose que, pour tout $t \in J$, $E(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $E(g(Y))$ existe.

3. a) Montrer :

$$E(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) P(Y = y) \right).$$

3. b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $E(Z)$ existe et que :

$$E(Z) = E(g(Y)). \quad (2)$$

On admet que, pour les lois composées considérées dans ce problème, les résultats des questions 2 et 3, en particulier (1) et (2) avec leurs hypothèses d'existence, restent vrais lorsque Y n'est pas discrète.

4. Un premier exemple. On suppose $J =]0, 1[$, que X_t suit la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

4. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

4. b) Que vaut $E(X_t)$ en fonction de t ? Si l'on note g cette fonction, que peut-on dire de $E(g(Y))$?

5. Un deuxième exemple. On suppose $J = [0, +\infty[$, que X_t suit la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.

Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est celle de la variable aléatoire nulle.

5. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Z = k) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda e^{-(\lambda+1)t} dt = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx.$$

5. b) En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx = 1.$$

5. c) Déterminer la loi de Z . Reconnaitre la loi de $Z + 1$.

5. d) En déduire $E(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'égalité (2) ?

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $d + 1$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $n + d$;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d + 1)$ -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_d)$, généralement dépendant de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, α_k est la contagiosité de tout individu infecté k jours plus tôt. Ce coefficient détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

On suppose $\alpha_k \in]0, 1[$ pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ et on note

$$\alpha = \sum_{k=0}^d \alpha_k$$

la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute sa période de contagiosité.

On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$. Toutes les variables suivantes sont définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- R_n est le nombre de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là ;
on suppose que son espérance existe et on pose $r_n = E(R_n)$;
- Z_n est le nombre total d'individus infectés, donc devenant contagieux, le n -ième jour ;
en particulier, $Z_0 = 1$;
- I_n est la contagiosité globale de la population le n -ième jour, définie par

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k}. \quad (*)$$

On suppose enfin que I_n et R_n sont indépendantes et que, si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, alors Z_{n+1} suit la loi composée $\mathcal{P}(Y_n)$, au sens de la partie 1. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que de celles de R_n et de I_n .

6. Donner une justification de (*).

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(I_n)$ existe. Montrer que $E(Y_n)$ existe et, en utilisant un résultat de la partie 1, que $E(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n E(I_n)$.

7. b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = E(Z_n)$ existe et vérifie :

$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}. \quad (3)$$

8. Programmation de z_n avec Python. On suppose que $r_n = (n+2)/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\Delta = (\alpha_0 \cdots \alpha_d)$.

Écrire une fonction Python d'en-tête `def z(Delta, n)` : qui calcule z_n si `Delta` est une liste représentant Δ et `n` un entier naturel. L'élément `Delta[k]` représente α_k .

9. Soient $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'événements telles que $P(U_n) \rightarrow 1$ et $P(V_n) \rightarrow 1$. Montrer que $P(U_n \cap V_n) \rightarrow 1$.

On rappelle qu'un événement A est presque sûr lorsque $P(A) = 1$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$. On note B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

10. a) Montrer que $P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

10. b) En distinguant les cas où $P(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0])$ est nulle ou non, établir que, pour tout entier $p \geq d$,

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right),$$

puis que $P(A_n) = P(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0])$.

10. c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $P(Z_n = 0) \rightarrow 1$.

10. d) Montrer que cela équivaut aussi à la convergence en loi de (Z_n) vers 0.

11. a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(Z_{n+1} = 0) = E(e^{-Y_n}).$$

11. b) On suppose $z_n \rightarrow 0$. En déduire que B est presque sûr. On pourra montrer que, pour tout réel x , $e^{-x} \geq 1 - x$.

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

On conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite (z_n) définie par (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes sur (r_n) .

Pour tout réel x , on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient vaut x . Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on pose $a_k = \alpha_k / \alpha$.

12. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que $r_n \alpha \leq \rho$ pour tout $n \geq N$. On note (H_1) cette hypothèse.

12. a) Que vaut

$$\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^d a_k t^{d-k}$$

? En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\theta^{d+1} > \rho \sum_{k=0}^d a_k \theta^{d-k}.$$

On pourra raisonner par l'absurde.

On pose $M = \max_{k \in \llbracket N, N+d \rrbracket} z_k / \theta^k$.

12. b) Montrer que, pour tout $n \geq N$, $z_n \leq M\theta^n$.

12. c) En déduire que $z_n \rightarrow 0$.

On admet le résultat suivant : s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que $r_n \alpha \geq \rho$ pour tout $n \geq N$, et si

$$\sum_{k=0}^{\min(N,d)} \alpha_k z_{n-k} > 0,$$

alors $z_n \rightarrow +\infty$. On note (H_2) cet ensemble d'hypothèses.

Dans les questions 13 à 16, on suppose que $r_n = 1/\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note (H_3) cette hypothèse.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix},$$

avec $z_{-1} = \dots = z_{-d} = 0$.

13. a) Montrer qu'il existe une matrice carrée A d'ordre $d+1$, de première ligne $L = (a_0 \dots a_d)$, telle que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. b) En déduire que $U_n = A^n U_0$ pour tout $n \geq 0$, puis que $z_{n+1} = LA^n U_0$.

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = (1/6 \ 2/3 \ 1/6)$.

14. a) Montrer que $\text{Sp}(A) = \{1, -1/2, -1/3\}$. On pourra rechercher directement les vecteurs propres de première composante 1 et vérifier qu'ils forment une base.
14. b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur propre associé à 1, V_2 à $-1/2$ et V_3 à $-1/3$, chaque colonne ayant pour premier coefficient 1.
14. c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U_0 = s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3$.
14. d) En déduire que (z_n) converge vers s_1 .
15. On revient au cas général.
15. a) Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si

$$\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^d a_{d-k} \lambda^k,$$

et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1. On pourra utiliser successivement les équations des d dernières lignes de $AV = \lambda V$.

15. b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur propre colonne associé V dont la somme des composantes vaut $d + 1$.
15. c) Établir que $-1 \notin \text{Sp}(A)$ et que, si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \text{Sp}(A)$.
16. Pour $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on pose

$$b_k = \sum_{i=k}^d a_i.$$

On définit le sous-espace vectoriel

$$H = \left\{ W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R}) : \sum_{k=0}^d b_k w_k = 0 \right\}.$$

16. a) Montrer que, pour tout $W \in H$, $AW \in H$.

16. b) Déterminer l'unique réel s tel que $U_0 - sV \in H$.

16. c) On admet que, pour tout $W \in H$, $LA^n W \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. En déduire que $z_n \rightarrow s$.

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi (H_1) , (H_2) et (H_3) , la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$$

est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?