



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC / ESSEC**

**Mathématiques — Option économique**

**2021**

*Mathématiques appliquées*

---

**Mathématiques appliquées — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## Partie 1 - Lois composées

1. Code adapté en Python. Pour  $t \in ]0, 1[$  fixé, la boucle compte le rang du premier tirage inférieur ou égal à  $t$ . Les essais sont indépendants, chacun ayant une probabilité de succès  $t$  dans le modèle uniforme continu. Le rang suit donc  $\mathcal{G}(t)$ .

### Python

```
import numpy.random as rd

def X(t):
    r = 1
    while rd.random() > t:
        r = r + 1
    return r

Y = rd.random()
while Y == 0:
    Y = rd.random()
Z = X(Y)
print(Z)
```

Les trois blancs sont donc  $t$ ,  $r + 1$  et  $X(Y)$ . Le tirage de  $Y$  est suivi de nouveaux tirages pour simuler la loi de paramètre observé. La précaution sur zéro garantit que le paramètre appartient au domaine de la fonction ; la borne supérieure 1 est déjà exclue par `rd.random()`.

Pour  $t > 0$ , la probabilité de poursuivre au-delà de  $m$  essais vaut  $(1 - t)^m \rightarrow 0$ . La fonction termine donc presque sûrement pour tout paramètre admissible. Le mélange ne possède pas nécessairement une durée moyenne d'exécution finie : la question 4 montrera précisément que son espérance est infinie. Il faut distinguer terminaison presque sûre et durée moyenne.

2. a) Sur l'événement  $[Y = y]$ , la définition du mélange donne  $Z = X_y$ . Ainsi

$$[Z = k] \cap [Y = y] = [X_y = k] \cap [Y = y].$$

La variable  $X_y$  est indépendante de  $Y$  ; par conséquent,

$$P([Z = k] \cap [Y = y]) = P(X_y = k)P(Y = y) = f_k(y)P(Y = y).$$

Cette identité vaut même si  $P(Y = y) = 0$ . Si cette probabilité est strictement positive, la définition de la probabilité conditionnelle permet de diviser et donne

$$P_{[Y=y]}(Z = k) = f_k(y).$$

2. b) La famille des événements  $[Y = y]$ , pour  $y \in Y(\Omega)$ , est un système complet au plus dénombrable. Les probabilités totales donnent

$$P(Z = k) = \sum_{y \in Y(\Omega)} f_k(y)P(Y = y).$$

La variable  $f_k(Y)$  est comprise entre 0 et 1 ; son espérance existe et le transfert identifie cette somme à  $E(f_k(Y))$ . C'est (1).

2. c) Posons  $q = 1 - p \in ]0, 1[$ . Les probabilités de  $Y$  sont positives et leur somme vaut

$$p^2 \sum_{n \geq 1} nq^{n-1} = p^2 / (1 - q)^2 = 1,$$

ce qui vérifie qu'il s'agit bien d'une loi.

Pour  $k \geq 1$ , la loi uniforme donne  $f_k(n) = 1/n$  si  $n \geq k$ , et 0 sinon. Par (1),

$$P(Z = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} np^2q^{n-1} = p^2 \frac{q^{k-1}}{1 - q} = pq^{k-1}.$$

La variable ne peut valoir 0, puisque tous les  $X_n$  sont strictement positifs. On reconnaît donc la loi  $\mathcal{G}(p)$  sur  $\mathbb{N}^*$ .

3. a) Pour chaque  $y \in J$ , la variable  $X_y$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et possède une espérance.

Sa définition donne

$$g(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) \geq 0.$$

Le transfert pour la variable discrète  $Y$ , avec l'hypothèse d'existence de  $E(g(Y))$ , donne alors

$$E(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} g(y) P(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) P(Y = y) \right).$$

Tous les termes sont positifs ou nuls et la somme vaut un réel fini par hypothèse.

3. b) En utilisant uniquement l'inversion des sommes admise par l'énoncé, puis la question 2,

$$E(g(Y)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} f_k(y) P(Y = y) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(Z = k).$$

Cette somme est finie. Comme  $Z$  est positive ou nulle, il s'agit aussi de la série de convergence absolue définissant son espérance. Ainsi  $E(Z)$  existe et vaut  $E(g(Y))$  : c'est (2).

Le prolongement de (1) et (2) aux mélanges non discrets utilisés ensuite est admis dans le sujet, avec les mêmes hypothèses d'existence ; aucune formule générale d'espérance conditionnelle n'est nécessaire.

4. a) Pour  $k \geq 1$ ,  $f_k(t) = t(1-t)^{k-1}$ . Cette fonction est bornée sur  $]0, 1[$ . Le résultat (1) admis pour ce mélange et le transfert pour la loi uniforme donnent

$$P(Z = k) = \int_0^1 t(1-t)^{k-1} dt.$$

## Méthode 1 — Séparer deux puissances.

Le changement de variable affine  $u = 1 - t$  donne

$$\int_0^1 (1-u)u^{k-1} du = \int_0^1 u^{k-1} du - \int_0^1 u^k du = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

## Méthode 2 — Intégration par parties.

On choisit la fonction  $t$  et une primitive  $-(1-t)^k/k$  de  $(1-t)^{k-1}$ . Le terme de bord est nul, d'où

$$\int_0^1 t(1-t)^{k-1} dt = \frac{1}{k} \int_0^1 (1-t)^k dt = \frac{1}{k(k+1)}.$$

La première méthode transforme l'intégrande en différence de monômes ; la seconde traite directement le produit initial. Les deux calculs se font sur un segment et restent valables pour  $k = 1$ .

On a  $Z \geq 1$  et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Z = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

car c'est une série harmonique privée de son premier terme. Ainsi  $Z$  n'admet pas d'espérance finie. La somme des probabilités est bien 1, puisque  $1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$  et que ses sommes partielles tendent vers 1.

4. b) La loi géométrique de paramètre  $t > 0$  possède l'espérance  $g(t) = 1/t$ . Pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t} = -\ln \varepsilon \rightarrow +\infty.$$

Le transfert montre donc que  $g(Y)$  n'admet pas d'espérance finie. L'hypothèse nécessaire pour appliquer (2) n'est pas satisfaite ; cela est cohérent avec la réponse à 4.a).

5. a) Pour  $t \geq 0$ , la loi de Poisson donne  $f_k(t) = t^k e^{-t} / k!$ , avec la valeur 1 pour  $k = 0, t = 0$ , et 0 pour  $k > 0, t = 0$ . La fonction  $f_k$  est comprise entre 0 et 1, donc son transfert est intégrable sous la loi de  $Y$ . Le résultat (1) admis dans le sujet donne

$$P(Z = k) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda e^{-(\lambda+1)t} dt.$$

Sur un segment  $[0, T]$ , le changement affine  $x = (\lambda + 1)t$ , de dérivée strictement positive, transforme cette intégrale en

$$\frac{\lambda}{(\lambda + 1)^{k+1}} \int_0^{(\lambda+1)T} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx.$$

On passe à la limite lorsque  $T \rightarrow +\infty$ . La convergence à gauche est déjà assurée par le transfert borné ; cela justifie aussi la convergence de l'intégrale à droite et fournit l'égalité demandée.

5. b) Pour  $k = 0$ ,  $\int_0^T e^{-x} dx = 1 - e^{-T} \rightarrow 1$ .

Supposons le résultat établi au rang  $k$ . Une intégration par parties sur  $[0, T]$  donne

$$\int_0^T \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^{-x} dx = -\frac{T^{k+1}}{(k+1)!} e^{-T} + \int_0^T \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx.$$

Le terme de bord en 0 est nul. Par croissance comparée,  $T^{k+1} e^{-T} \rightarrow 0$  ; le second terme tend vers 1 par l'hypothèse de récurrence. L'intégrale converge donc et vaut 1 au rang  $k + 1$ . Le résultat est établi pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

5. c) Les questions précédentes donnent, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$P(Z = k) = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^{k+1}}.$$

Posons  $p = \lambda / (\lambda + 1) \in ]0, 1[$ . Pour  $j \geq 1$ ,

$$P(Z + 1 = j) = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^j} = p(1 - p)^{j-1}.$$

Ainsi  $Z + 1$  suit  $\mathcal{G}(p)$ , et  $Z$  est cette variable géométrique diminuée de 1.

#### 5. d) Méthode 1 — Utiliser la loi reconnue.

La variable  $Z + 1$  possède l'espérance  $1/p = (\lambda + 1)/\lambda$ . Par transformation affine,  $Z$  possède une espérance et

$$E(Z) = \frac{\lambda + 1}{\lambda} - 1 = \frac{1}{\lambda}.$$

#### Méthode 2 — Utiliser le mélange.

Pour une loi de Poisson de paramètre  $t \geq 0$ ,  $g(t) = t$ , y compris lorsque  $t = 0$ . Alors  $g(Y) = Y$  possède l'espérance  $1/\lambda$  d'une loi exponentielle. L'admission (2) s'applique et donne  $E(Z) = 1/\lambda$ .

Les hypothèses d'existence sont vérifiées dans les deux approches. La première reconnaît une loi discrète usuelle ; la seconde utilise seulement l'espérance du paramètre du mélange, ce qui confirme la cohérence de (2).

## Partie 2 - Le modèle de Cori

6. Les individus infectés au jour  $n - k$  sont encore contagieux au jour  $n$  exactement lorsque  $0 \leq k \leq d$ . Il faut aussi  $n - k \geq 0$ , donc  $k \leq n$ . Il y en a  $Z_{n-k}$  et chacun contribue par  $\alpha_k$ . En additionnant ces contributions sur  $0 \leq k \leq \min(n, d)$ , on obtient (\*).

7. a) Les variables  $R_n$  et  $I_n$  possèdent une espérance et sont indépendantes par hypothèse. Le résultat sur le produit de variables indépendantes assure que  $Y_n = R_n I_n$  possède une espérance et

$$E(Y_n) = E(R_n)E(I_n) = r_n E(I_n).$$

Pour une loi de Poisson de paramètre  $t$ , la fonction  $g$  de la question 3 est  $g(t) = t$ . Ainsi  $g(Y_n) = Y_n$  possède une espérance. Le résultat (2), admis pour le mélange considéré,

donne l'existence de  $E(Z_{n+1})$  et l'égalité  $E(Z_{n+1}) = r_n E(I_n)$ .

7. b) On procède par récurrence forte. La variable certaine  $Z_0 = 1$  possède l'espérance  $z_0 = 1$ . Si les espérances de  $Z_0, \dots, Z_n$  existent, alors  $I_n$  est une combinaison linéaire finie de ces variables, donc possède l'espérance

$$E(I_n) = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}.$$

La question 7.a) donne alors l'existence de  $E(Z_{n+1})$  et la relation (3). Cela établit les deux propriétés pour tout  $n$ . Les variables comptant des individus sont positives ou nulles, donc tous les  $z_n$  sont positifs ou nuls.

8. Code adapté en Python. La liste `valeurs` contient successivement  $z_0, \dots, z_m$ . Pour calculer  $z_m$  avec  $m \geq 1$ , on utilise  $r_{m-1} = (m+1)/m$  et les termes d'indices  $m-1-k$ .

### Python

```
def z(Delta, n):
    d = len(Delta) - 1
    valeurs = [1]
    for m in range(1, n + 1):
        total = 0
        for k in range(min(m - 1, d) + 1):
            total = total + Delta[k] * valeurs[m - 1 - k]
        valeurs.append(((m + 1) / m) * total)
    return valeurs[n]
```

La borne supérieure de range est exclue : l'ajout de 1 permet d'inclure  $k = \min(m-1, d)$ . Tous les indices utilisés sont déjà calculés et sont positifs ou nuls. Si  $n = 0$ , la boucle est vide et la fonction renvoie 1, conformément à  $z_0 = 1$ . Aucun import n'est nécessaire.

Les deux programmes Python des questions 1 et 8 ont été exécutés sur des cas de contrôle. Les valeurs de la récurrence ont été comparées à un calcul indépendant ; les

simulations illustrent leur loi et ne remplacent pas les démonstrations.

## 9. Méthode 1 — Décomposer une réunion.

La formule  $P(U_n \cup V_n) = P(U_n) + P(V_n) - P(U_n \cap V_n)$  et la majoration d'une probabilité par 1 donnent

$$P(U_n) + P(V_n) - 1 \leq P(U_n \cap V_n) \leq 1.$$

Le membre de gauche tend vers 1, donc le théorème d'encadrement donne la limite 1.

## Méthode 2 — Contrôler l'événement contraire.

L'inclusion-exclusion pour deux événements implique la majoration

$$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D). \text{ Ainsi}$$

$$0 \leq 1 - P(U_n \cap V_n) = P(\overline{U_n} \cup \overline{V_n}) \leq 1 - P(U_n) + 1 - P(V_n) \rightarrow 0.$$

Les deux arguments ne supposent aucune indépendance. Le second met en évidence que la probabilité d'au moins une défaillance tend vers zéro ; il s'étend immédiatement à un nombre fixé d'événements.

10. a) L'événement d'extinction en temps fini est  $B = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ . En effet, s'éteindre signifie qu'à partir d'un certain jour il n'y a plus de nouvelle infection. De plus  $A_n \subset A_{n+1}$  : ne plus avoir de cas à partir du jour  $n$  implique ne plus en avoir à partir du jour  $n + 1$ . La continuité croissante de la probabilité donne donc

$$P(B) = \lim_n P(A_n).$$

10. b) Pour  $p \geq d$ , notons  $E_p = \bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]$ . Si  $P(E_d) = 0$ , l'inclusion  $E_p \subset E_d$  donne  $P(E_p) = 0$  pour tout  $p \geq d$ .

Supposons maintenant  $P(E_d) > 0$ . Montrons par récurrence que  $P(E_p) = P(E_d)$ .

L'initialisation  $p = d$  est immédiate. Supposons l'égalité vraie à un rang  $p \geq d$ ; alors  $P(E_p) > 0$ .

Sur  $E_p$ , les  $d + 1$  dernières variables  $Z_{n+p}, \dots, Z_{n+p-d}$  sont nulles, car  $n + p - d \geq n$ . La formule (\*) donne  $I_{n+p} = 0$ , puis  $Y_{n+p} = 0$ . Dans la construction de la loi composée de la partie 1, sur l'événement où le paramètre vaut 0, la variable de sortie est celle du paramètre 0. Cette dernière suit  $\mathcal{P}(0)$ , donc vaut 0 presque sûrement. Ainsi  $Z_{n+p+1} = 0$  presque sûrement sur  $E_p$ . Ce raisonnement porte sur l'événement  $[Y_{n+p} = 0]$ ; il ne conditionne jamais par un événement de probabilité nulle.

On a donc  $P_{E_p}(Z_{n+p+1} = 0) = 1$ . Par probabilités composées,

$$P(E_{p+1}) = P(E_p)P_{E_p}(Z_{n+p+1} = 0) = P(E_d).$$

L'égalité est héréditaire. Enfin, les événements  $E_p$  décroissent vers  $A_n$  quand  $p \rightarrow +\infty$ . La continuité décroissante donne  $P(A_n) = P(E_d)$  dans les deux cas.

**10. c)** Si  $B$  est presque sûr, 10.a) donne  $P(A_n) \rightarrow 1$ . Or  $A_n \subset [Z_n = 0]$ , donc  $P(Z_n = 0) \rightarrow 1$  par encadrement.

Réciproquement, supposons  $P(Z_n = 0) \rightarrow 1$ . Pour chacun des décalages fixes  $j = 0, \dots, d$ , on a aussi  $P(Z_{n+j} = 0) \rightarrow 1$ . En appliquant  $d$  fois la question 9 à ces  $d + 1$  événements, on obtient

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) \rightarrow 1.$$

Avec 10.b), puis 10.a), il vient  $P(B) = 1$ . Le nombre  $d$  est fixé; aucune hypothèse d'indépendance temporelle n'a été utilisée.

**10. d)** Méthode 1 — Caractérisation pour les lois entières.

La variable limite est la variable certaine 0. Si  $P(Z_n = 0) \rightarrow 1$ , alors, pour tout entier  $k \neq 0$ ,

$$0 \leq P(Z_n = k) \leq 1 - P(Z_n = 0) \rightarrow 0.$$

Les probabilités ponctuelles convergent donc vers celles de la variable certaine 0. La caractérisation de la convergence en loi pour des variables entières donne la conclusion. Réciproquement, cette caractérisation appliquée à  $k = 0$  donne  $P(Z_n = 0) \rightarrow 1$ .

## Méthode 2 — Fonctions de répartition.

Si  $P(Z_n = 0) \rightarrow 1$ , on a  $F_{Z_n}(x) = 0$  pour  $x < 0$ , et  $P(Z_n = 0) \leq F_{Z_n}(x) \leq 1$  pour  $x > 0$ . Ainsi les fonctions de répartition convergent vers celle de 0 en tous ses points de continuité, c'est-à-dire en tout  $x \neq 0$ . Réciproquement, la convergence en loi au point  $x = 1/2$  donne  $F_{Z_n}(1/2) \rightarrow 1$ . Comme  $Z_n$  est entière et positive ou nulle,  $F_{Z_n}(1/2) = P(Z_n = 0)$ .

La première méthode utilise directement le résultat du programme sur les lois entières ; la seconde en explicite ici le mécanisme sans demander la convergence des fonctions de répartition au point de discontinuité 0.

- 11. a)** Pour une loi de Poisson de paramètre  $t \geq 0$ ,  $f_0(t) = e^{-t}$ , y compris  $t = 0$ . Le résultat (1) de la partie 1, admis pour le mélange de paramètre  $Y_n$ , donne

$$P(Z_{n+1} = 0) = E(f_0(Y_n)) = E(e^{-Y_n}).$$

Cette espérance existe puisque  $Y_n \geq 0$ , donc  $0 \leq e^{-Y_n} \leq 1$ .

- 11. b)** La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ , car sa dérivée seconde est  $e^{-x} > 0$ . Elle est au-dessus de sa tangente en 0, ce qui donne  $e^{-x} \geq 1 - x$  pour tout réel  $x$ .

La variable  $Y_n$  possède une espérance par 7, et  $E(Y_n) = z_{n+1}$ . La croissance de l'espérance donne

$$1 \geq P(Z_{n+1} = 0) = E(e^{-Y_n}) \geq 1 - E(Y_n) = 1 - z_{n+1}.$$

Si  $z_n \rightarrow 0$ , les deux bornes tendent vers 1. Ainsi  $P(Z_n = 0) \rightarrow 1$  et 10.c) entraîne que  $B$  est presque sûr.

## Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

---

On a  $\alpha > 0$ ,  $a_k > 0$  pour tout  $k$ , et

$$\sum_{k=0}^d a_k = 1.$$

12. a) Le polynôme

$$t \mapsto \sum_{k=0}^d a_k t^{d-k}$$

est continu en 1 ; sa limite vaut

$$\sum a_k = 1.$$

**Méthode 1 — Contradiction et passage à la limite.**

---

S'il n'existait aucun  $\theta \in ]0, 1[$  satisfaisant l'inégalité demandée, on aurait

$$t^{d+1} \leq \rho \sum a_k t^{d-k}$$

pour tout  $t \in ]0, 1[$ . En faisant tendre  $t$  vers 1 par valeurs inférieures, on obtiendrait  $1 \leq \rho$ , en contradiction avec  $\rho < 1$ .

**Méthode 2 — Signe d'une fonction continue.**

Posons

$$q(t) = t^{d+1} - \rho \sum a_k t^{d-k}.$$

Cette fonction est continue et  $q(1) = 1 - \rho > 0$ . Par continuité, elle reste strictement positive dans un intervalle autour de 1. En choisissant  $\theta < 1$  assez proche de 1 et strictement positif, on obtient  $q(\theta) > 0$ .

La première méthode suit l'indication du sujet; la seconde précise directement pourquoi une inégalité stricte vraie en 1 persiste à proximité.

- 12.** b) Le nombre  $M$  est bien défini : le maximum porte sur un ensemble fini non vide et  $\theta^k > 0$ . De plus  $M \geq 0$ . Par définition,  $z_k \leq M\theta^k$  pour  $N \leq k \leq N + d$ .

Supposons que l'inégalité soit vraie jusqu'à un rang  $n \geq N + d$ . On a  $n \geq d$ , donc la relation (3) contient les  $d + 1$  termes. Pour chaque  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $n - k \geq N$  et l'hypothèse de récurrence donne

$$z_{n+1} = r_n \alpha \sum_{k=0}^d a_k z_{n-k} \leq \rho M \sum_{k=0}^d a_k \theta^{n-k} = M \theta^{n-d} \rho \sum_{k=0}^d a_k \theta^{d-k} \leq M \theta^{n+1}.$$

La dernière inégalité vient de 12.a) et de  $M \geq 0$ ; elle reste valable si  $M = 0$ . La récurrence forte est donc établie et la majoration vaut pour tout  $n \geq N$ .

- 12.** c) Comme  $0 < \theta < 1$ ,  $M\theta^n \rightarrow 0$ . Avec  $z_n \geq 0$  et la majoration précédente, le théorème d'encadrement donne  $z_n \rightarrow 0$ .

Le résultat fourni sous  $(H_2)$  appelle une rectification locale. Question adaptée au programme actuel : l'hypothèse de contagiosité moyenne encore positive au jour  $N$  est ajoutée à  $(H_2)$  pour assurer que le régime de croissance commence avec des individus contagieux.

Sans cette hypothèse, le résultat imprimé n'est pas toujours vrai. Si  $r_0 = \dots = r_d = 0$ , la

relation (3) donne  $z_1 = \dots = z_{d+1} = 0$ ; ensuite tous les  $z_n$  restent nuls, même en prenant  $r_n \alpha = 2$  pour  $n \geq d + 1$ . La condition de croissance éventuelle des contacts ne peut faire réapparaître une contamination déjà éteinte.

Résultat admis dans cette version adaptée : s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\rho > 1$  tels que  $r_n \alpha \geq \rho$  pour tout  $n \geq N$ , et si

$$\sum_{k=0}^{\min(N,d)} \alpha_k z_{N-k} > 0,$$

alors  $z_n \rightarrow +\infty$ . Ce résultat sera utilisé dans la question 17 pour exclure la convergence de la série sous  $(H_2)$ .

**13.** a) En prolongeant la suite par les valeurs nulles  $z_{-1}, \dots, z_{-d}$ , la relation (3) s'écrit, sous  $(H_3)$ ,

$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^d a_k z_{n-k}.$$

La matrice cherchée est donc

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, sa première ligne est  $L$ , ses coefficients d'indices  $(i, i - 1)$  valent 1 pour  $2 \leq i \leq d + 1$ , et tous les autres coefficients valent 0. Cette définition précise vaut aussi pour  $d = 1$ . La première ligne fournit  $z_{n+1}$  et les lignes suivantes décalent les coordonnées, d'où  $U_{n+1} = AU_n$ .

13. b) Au rang 0,  $A^0 U_0 = U_0$ . Si  $U_n = A^n U_0$ , alors  $U_{n+1} = AU_n = A^{n+1} U_0$ . Par récurrence,  $U_n = A^n U_0$  pour tout  $n \geq 0$ . La première ligne de  $U_{n+1} = AU_n$  donne enfin  $z_{n+1} = LU_n = LA^n U_0$ .

14. a) Question adaptée au programme actuel : l'indication propose une recherche directe de vecteurs propres, sans recours à un déterminant.

Ici  $A = \begin{pmatrix} 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Considérons les colonnes

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Les produits matriciels donnent

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V_1,$$

$$AV_2 = \begin{pmatrix} 1/6 - 4/3 + 2/3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} V_2,$$

$$AV_3 = \begin{pmatrix} 1/6 - 2 + 3/2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}V_3.$$

Ces vecteurs non nuls sont associés à trois valeurs propres distinctes, donc sont linéairement indépendants. Il y en a trois dans un espace de dimension trois : ils forment une base. La matrice de l'application dans cette base est diagonale, de diagonale  $(1, -1/2, -1/3)$  ; elle ne possède donc pas d'autre valeur propre. Ainsi  $\text{Sp}(A) = \{1, -1/2, -1/3\}$ .

14. b) Les trois colonnes de 14.a) constituent précisément la base demandée et ont chacune pour première composante 1. Pour voir comment les obtenir, les deux dernières lignes de  $AV = \lambda V$ , avec première coordonnée 1 et  $\lambda \neq 0$ , imposent successivement la deuxième coordonnée  $1/\lambda$  et la troisième  $1/\lambda^2$ . En prenant les trois valeurs propres, on retrouve  $V_1, V_2, V_3$  ci-dessus.

14. c) On a  $U_0 = {}^t(1 \ 0 \ 0)$ . L'égalité recherchée équivaut au système

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 1, \\ s_1 - 2s_2 - 3s_3 = 0, \\ s_1 + 4s_2 + 9s_3 = 0. \end{cases}$$

La troisième équation moins la deuxième donne  $6s_2 + 12s_3 = 0$ , donc  $s_2 = -2s_3$ . La deuxième donne alors  $s_1 = -s_3$ , puis la première  $-2s_3 = 1$ . Ainsi

$$(s_1, s_2, s_3) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

L'unicité découle aussi du fait que  $(V_1, V_2, V_3)$  est une base.

14. d) En appliquant  $A^n$  à la décomposition précédente,

$$U_n = \frac{1}{2}V_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n V_2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n V_3.$$

Toutes les premières coordonnées des  $V_i$  valent 1, donc

$$z_n = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Les deux suites géométriques tendent vers zéro. Il en résulte  $z_n \rightarrow 1/2 = s_1$ .

**15.** a) Question adaptée au programme actuel : l'indication guide la lecture successive des équations de la matrice concrète  $A$ .

Écrivons  $V = {}^t(v_0 \dots v_d)$ . Les  $d$  dernières lignes de  $AV = \lambda V$  donnent  $v_{j-1} = \lambda v_j$  pour  $j = 1, \dots, d$ . En remontant ces égalités,

$$V = v_d \begin{pmatrix} \lambda^d \\ \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $V \neq 0$ , alors  $v_d \neq 0$ . La première ligne devient

$$\sum_{j=0}^d a_j \lambda^{d-j} v_d = \lambda^{d+1} v_d,$$

d'où, après division par  $v_d$ , la relation demandée. Réciproquement, si cette relation est satisfaite, la colonne  ${}^t(\lambda^d \lambda^{d-1} \dots 1)$  est non nulle et vérifie toutes les lignes de l'équation propre;  $\lambda$  est donc valeur propre.

On a établi l'équivalence

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^d a_{d-k} \lambda^k.$$

Pour une valeur propre donnée, tous les vecteurs propres sont les multiples non nuls de cette même colonne. Le sous-espace propre est donc la droite qu'elle engendre, de dimension 1. À noter que 0 ne satisfait pas la relation, car  $a_d > 0$ .

15. b) Pour  $\lambda = 1$ , la relation de 15.a) est

$$1 = \sum_{k=0}^d a_k,$$

qui est vraie. L'espace propre est engendré par la colonne de  $d + 1$  coefficients égaux à 1. Sa somme vaut déjà  $d + 1$ , donc

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tout autre élément de cet espace propre est  $cV$  ; la somme de ses coordonnées vaut  $c(d + 1)$ , ce qui impose  $c = 1$  pour la normalisation demandée.

15. c) Une valeur propre est non nulle par 15.a). La relation propre peut donc se diviser par  $\lambda^d$  et s'écrit

$$\lambda = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^{-k}.$$

Pour  $\lambda = -1$ , le membre de droite vaut

$$\sum a_k (-1)^k.$$

Il est strictement supérieur à  $-1$ , car les coefficients sont positifs, leur somme est 1, et le terme  $a_0 > 0$  porte le signe positif. Il ne peut donc être égal au membre de gauche  $-1$ . Ainsi  $-1$  n'est pas valeur propre.

Si  $|\lambda| > 1$ , l'inégalité triangulaire donnerait

$$|\lambda| \leq \sum_{k=0}^d a_k |\lambda|^{-k} \leq \sum_{k=0}^d a_k = 1,$$

ce qui est contradictoire. Aucune telle valeur n'appartient donc au spectre.

**16.** a) Notons

$$\ell(W) = \sum_{k=0}^d b_k w_k.$$

On a

$$b_0 = \sum a_k = 1,$$

$b_d = a_d$ , et  $b_k = a_k + b_{k+1}$  pour  $k < d$ . D'après la forme de  $A$ ,

$$\ell(AW) = b_0 \sum_{j=0}^d a_j w_j + \sum_{k=1}^d b_k w_{k-1}.$$

Le coefficient de  $w_j$ , pour  $j < d$ , est  $a_j + b_{j+1} = b_j$ , et celui de  $w_d$  est  $a_d = b_d$ . Donc  $\ell(AW) = \ell(W)$ . Si  $W \in H$ , cette valeur est nulle, ce qui signifie  $AW \in H$ .

**16.** b) On a  $\ell(U_0) = b_0 = 1$ , tandis que

$$\ell(V) = \sum_{k=0}^d b_k > 0.$$

Par linéarité,

$$U_0 - sV \in H \iff 1 - s \sum_{k=0}^d b_k = 0.$$

Il existe donc un unique réel convenable :

$$s = \frac{1}{\sum_{k=0}^d b_k} = \frac{1}{\sum_{i=0}^d (i+1)a_i} > 0.$$

La deuxième expression vient d'un changement d'ordre dans une somme finie : chaque  $a_i$  apparaît dans  $b_0, \dots, b_i$ , donc exactement  $i+1$  fois.

**16.** c) Résultat admis dans cette version adaptée : pour tout  $W \in H$ ,  $LA^n W \rightarrow 0$ . Cette admission est déjà présente dans le sujet d'origine ; elle est utilisée uniquement pour les colonnes de  $H$ .

D'après 16.b),  $W = U_0 - sV$  appartient à  $H$ . De plus  $AV = V$ , donc  $A^n V = V$ , et

$$LV = \sum a_k = 1.$$

La question 13.b) donne alors

$$z_{n+1} = LA^n U_0 = sLA^n V + LA^n W = s + LA^n W \rightarrow s.$$

Le décalage d'indice ne change pas la limite :  $z_n \rightarrow s$ . Dans le cas particulier de 14,

$$\sum (i+1)a_i = 1/6 + 4/3 + 1/2 = 2,$$

donc la formule générale redonne bien  $s = 1/2$ .

17. Sous  $(H_1)$ ,  $0 \leq z_n \leq M\theta^n$  pour  $n \geq N$ , avec  $0 < \theta < 1$ . Les sommes partielles de la queue vérifient

$$0 \leq \sum_{n=N}^m z_n \leq M \sum_{n=N}^m \theta^n \leq \frac{M\theta^N}{1-\theta}.$$

Elles sont croissantes et majorées, donc convergentes. L'ajout des  $N$  premiers termes ne change pas la convergence :

$$\sum z_n$$

converge sous  $(H_1)$ .

Sous  $(H_2)$ , la conséquence admise, avec l'hypothèse de positivité précisée dans le sujet adapté, donne  $z_n \rightarrow +\infty$ ; les termes ne tendent donc pas vers zéro et la série diverge.

Sous  $(H_3)$ , la question 16 donne  $z_n \rightarrow s > 0$ , et la série diverge également. Parmi les trois régimes considérés, seul  $(H_1)$  donne donc une série convergente.

Pour interpréter ce résultat, le nombre cumulé de cas jusqu'au jour  $m$  est

$$T_m = \sum_{n=0}^m Z_n.$$

Sa moyenne est

$$E(T_m) = \sum_{n=0}^m z_n$$

par linéarité d'une somme finie. Sous  $(H_1)$ , ces nombres moyens cumulés restent bornés et ont une limite finie; sous  $(H_2)$  et  $(H_3)$ , ils tendent vers l'infini. L'extinction presque sûre sous  $(H_1)$  découle aussi de 12.c) et 11.b). Une divergence du cumul des moyennes ne suffit pas à conclure que la contamination ne s'éteint pas presque sûrement : la question porte ici sur les moyennes, pas directement sur chaque trajectoire.

## Relevé des adaptations

---

- 1 et 8 : code adapté en Python, avec conservation des blancs de 1, imports et documentation du tirage uniforme. En 1, un nouveau tirage écarte la valeur informatique 0 pour respecter le domaine  $]0, 1[$  du paramètre géométrique.
- 12, résultat fourni sous  $(H_2)$ , et 17 : ajout de

$$\sum_{k=0}^{\min(N,d)} \alpha_k z_{N-k} > 0.$$

Sans cette condition, des contacts nuls au début peuvent éteindre toute contamination avant le régime de croissance et rendre fausse la conclusion  $z_n \rightarrow +\infty$ . La correction est locale ; les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_3)$  sont inchangées.

- 14.a et 15.a : ajout d'indications pour rechercher les éléments propres par les équations de la matrice concrète, sans déterminant. Les résultats demandés et les dépendances entre questions sont conservés.