



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques — Option économique

2020

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I - Deux résultats généraux

1. a) Si $0 \leq x \leq y$, alors $[X \leq Y] \cap [Y \leq x] \subset [X \leq Y] \cap [Y \leq y]$. La croissance des probabilités donne $H(x) \leq H(y)$. De plus, $0 \leq H(x) \leq 1$. Ainsi H est croissante et majorée, donc admet une limite finie en $+\infty$.
1. b) Les événements $E_n = [X \leq Y] \cap [Y \leq n]$ sont croissants. Leur réunion est $[X \leq Y]$, puisque Y est à valeurs réelles finies. La continuité croissante des probabilités donne $H(n) \rightarrow P(X \leq Y)$. La limite de H en $+\infty$, dont l'existence est acquise, est aussi celle de cette suite ; elle vaut donc $P(X \leq Y)$.

Comme Y est positive et à densité, $P(Y \leq 0) = P(Y = 0) = 0$. Par conséquent $H(0) = 0$.

2. a) La différence correspond aux événements emboîtés de 1. a), d'où

$$H(v) - H(u) = P([X \leq Y] \cap [u < Y \leq v]).$$

Sur $[u < Y \leq v]$, l'événement $[X \leq u]$ implique $[X \leq Y]$, lequel implique $[X \leq v]$. Ainsi :

$$[X \leq u] \cap [u < Y \leq v] \subset [X \leq Y] \cap [u < Y \leq v] \subset [X \leq v] \cap [u < Y \leq v].$$

L'indépendance de X et Y permet de multiplier les probabilités des événements extérieurs. On obtient :

$$F_X(u)(F_Y(v) - F_Y(u)) \leq H(v) - H(u) \leq F_X(v)(F_Y(v) - F_Y(u)).$$

La division par $v - u > 0$ donne l'encadrement demandé.

2. b) Fixons $x > 0$. Pour $h > 0$, on applique 2. a) avec $u = x$, $v = x + h$. Les deux bornes du quotient de H tendent vers $F_X(x)f_Y(x)$: F_X est continue puisque X est à densité, et F_Y est dérivable en x puisque f_Y y est continue.

Pour $-x < h < 0$, on prend $u = x + h$, $v = x$. Le quotient obtenu est encore

$(H(x+h) - H(x))/h$, et ses deux bornes ont la même limite. Les quotients à droite et à gauche ont donc une limite commune. Ainsi $H'(x) = F_X(x)f_Y(x)$.

2. c) La fonction $g(t) = F_X(t)f_Y(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Posons $J(x) = \int_0^x g(t) dt$.
Le théorème fondamental de l'intégration donne $J' = g$ sur $]0, +\infty[$. Donc $(H - J)' = 0$ sur cet intervalle.

Pour $0 < a < b$, l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $H - J$ sur $[a, b]$, donne $|(H - J)(b) - (H - J)(a)| \leq 0$. Ainsi $H - J$ est constante sur $]0, +\infty[$. Enfin, $0 \leq H(x) \leq F_Y(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ et $J(x) \rightarrow 0$ par continuité de g . Cette constante vaut donc 0. L'égalité vaut aussi en 0, puisque $H(0) = J(0) = 0$.

3. Pour $x \geq 0$, 2. c) donne $\int_0^x F_X(t)f_Y(t) dt = H(x)$. Par 1. b), ce membre tend vers la probabilité finie $P(X \leq Y)$. L'intégrale impropre converge donc et sa valeur est $P(X \leq Y)$. La preuve n'utilise pas de formule générale de convolution.
4. Résultat admis dans cette version adaptée : $P(X < Y) = P(X \leq Y)$, les deux probabilités étant égales à l'intégrale de la question 3. Les événements $[X < Y]$ et $[X = Y]$ sont disjoints, de réunion $[X \leq Y]$. Donc $P(X = Y) = 0$. Cette absence d'égalité sera utilisée pour les courses entre délais exponentiels.

5. a) Pour tout réel x , $F_X(x) = P(U \leq x + \theta)$. Ainsi :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\theta, \\ 1 - e^{-\lambda(x+\theta)} & \text{si } x \geq -\theta. \end{cases}$$

Les deux expressions se raccordent en $-\theta$. Le cas $\theta = 0$ redonne la fonction de répartition de U .

5. b) Une transformation de U reste indépendante de V . Sur $[0, +\infty[$,
 $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda(t+\theta)}$ puisque $\theta \geq 0$. Le résultat de 3, avec $Y = V$, donne :

$$P(U - \theta \leq V) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda(t+\theta)}) \mu e^{-\mu t} dt.$$

Les deux intégrales exponentielles convergent ; leur calcul à partir des primitives sur $[0, R]$, puis passage à $R \rightarrow +\infty$, donne :

$$P(U - \theta \leq V) = \mu \frac{1}{\mu} - \mu e^{-\lambda\theta} \frac{1}{\lambda + \mu} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda\theta}.$$

En particulier, pour $\theta = 0$, $P(U \leq V) = \lambda/(\lambda + \mu)$.

Inégalité de Boole

6. a) Méthode 1 — Récurrence demandée

Au rang 1, l'inégalité est une égalité. Supposons-la vraie pour un entier $n \geq 1$. Pour deux événements C, D , $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \leq P(C) + P(D)$. Avec $C = \bigcup_{k=1}^n B_k$ et $D = B_{n+1}$, puis l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) + P(B_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(B_k).$$

La propriété est héréditaire et donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Indicatrices

Pour chaque réalisation, l'indicatrice de la réunion vaut 0 si aucun événement ne se réalise et 1 sinon. Elle est donc majorée par le nombre d'événements réalisés :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n B_k} \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{B_k}.$$

La croissance et la linéarité de l'espérance, appliquées à ces variables bornées, donnent l'inégalité. Cette méthode montre directement pourquoi le surcomptage ne peut que majorer la probabilité ; la première respecte la récurrence imposée.

6. b) Les événements $C_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$ sont croissants et de réunion $\bigcup_{k \geq 1} B_k$. Ainsi $P(C_n) \rightarrow P(\bigcup_{k \geq 1} B_k)$. Dans l'inégalité de 6. a), le membre de droite tend vers la somme finie de la série convergente supposée. Le passage à la limite donne exactement l'inégalité annoncée.

Partie II - Une compétition entre deux groupes

7. a) Le groupe A commence P_1 à $t = 0$ et enchaîne sans interruption les résolutions. La somme

$$\sum_{k=1}^n X_k$$

est donc le temps écoulé jusqu'à la résolution de P_n , autrement dit la date de cette résolution.

7. b) Les dates pour A sont 5, 7, 10, 12; celles pour B sont 2, 4, 8, 10. Le début de la liste est donc :

$$(Q_1, Q_2, P_1, P_2, Q_3, P_3, Q_4).$$

À la date 10, la convention impose de placer P_3 avant Q_4 . Ainsi

$$(U_1, \dots, U_7) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0).$$

La huitième résolution est soit celle de P_4 à la date 12, soit celle de Q_5 à la date $10 + Y_5$. Si $Y_5 < 2$, $U_8 = 0$; si $Y_5 \geq 2$, $U_8 = 1$, l'égalité étant départagée en faveur de A . La valeur de Y_5 n'est pas donnée : U_8 ne peut pas être déterminée.

7. c) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Les variables `sommeX` et `sommeY` contiennent les prochaines dates de résolution des deux groupes. Après avoir enregistré le gagnant de la course, on ajoute à sa date un nouveau délai indépendant. En cas d'égalité, le test donne la priorité à A , conformément à la convention du sujet.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

p = float(input("p="))
n = int(input("n="))
q = 1 - p
U = np.zeros(n, dtype=int)
sommeX = rd.exponential(1 / p)
sommeY = rd.exponential(1 / q)
mini = min(sommeX, sommeY)
for k in range(n):
    if sommeX == mini:
        U[k] = 1
        sommeX = sommeX + rd.exponential(1 / p)
    else:
        sommeY = sommeY + rd.exponential(1 / q)
    mini = min(sommeX, sommeY)
print(U)
```

Le tableau étant initialisé à zéro, la branche où B gagne ne modifie pas $U[k]$. Les échelles $1/p$ et $1/q$ donnent bien les paramètres p et q . Ce script suppose les entrées conformes $0 < p < 1$ et $n \geq 1$.

7. d) Le nombre de problèmes de A est la somme des indicatrices des victoires de A . On ajoute donc :

Python

```
print(np.sum(U))
```

Cette valeur est une réalisation de

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k.$$

8. a) Par la convention sur les égalités, $[U_1 = 1] = [X_1 \leq Y_1]$. Les variables sont indépendantes, de paramètres respectifs p et q , avec $p + q = 1$. La question 5. b), pour $\theta = 0$, donne $P(U_1 = 1) = p/(p + q) = p$.

8. b) i. Sur $[U_1 = 1]$, on a $Y_1 - X_1 \geq 0$. Pour $x < 0$, les événements $[Y_1 - X_1 \leq x]$ et $[U_1 = 1]$ sont donc incompatibles. Comme $P(U_1 = 1) = p > 0$, la probabilité conditionnelle vaut 0.

8. b) ii. Pour $x \geq 0$, l'intersection définissant la probabilité conditionnelle est $[X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x]$, donc la première égalité résulte de la division par p .

L'événement $[Y_1 > X_1 + x]$ est inclus dans $[X_1 \leq Y_1]$. En appliquant 5. b) avec $U = Y_1$, $V = X_1$, $\theta = x$, on trouve :

$$P(Y_1 > X_1 + x) = 1 - P(Y_1 - x \leq X_1) = pe^{-qx}.$$

Par différence, $P(X_1 \leq Y_1 \leq X_1 + x) = p - pe^{-qx}$. Ainsi $P_{[U_1=1]}(Y_1 - X_1 \leq x) = 1 - e^{-qx}$.

8. c) La fonction de répartition conditionnelle obtenue vaut 0 pour $x < 0$ et $1 - e^{-qx}$ pour $x \geq 0$. C'est celle de $\mathcal{E}(q)$: le délai restant à B conserve le paramètre q .

En échangeant les groupes et les paramètres, sachant $[U_1 = 0]$, le délai restant $X_1 - Y_1$ suit $\mathcal{E}(p)$. L'absence d'égalité, établie en 4, permet d'échanger les inégalités strictes et larges ici sans modifier les probabilités. Le groupe qui attend encore conserve donc sa loi de délai exponentiel.

8. d) Question adaptée au programme actuel : l'indication du sujet demande de préciser le redémarrage particulier des délais, au lieu de supposer une propriété générale de processus aléatoires.

On renforce la récurrence en considérant une histoire finie donnée des groupes gagnants, de probabilité non nulle. Avant la première résolution, les deux délais sont indépendants, de lois $\mathcal{E}(p)$ et $\mathcal{E}(q)$.

Supposons que cela reste vrai conditionnellement à l'histoire précédant une résolution. Le calcul de 8. b)-c) s'applique alors aux deux délais de cette course : si A gagne, le délai restant à B suit $\mathcal{E}(q)$; si B gagne, le délai restant à A suit $\mathcal{E}(p)$. Le gagnant commence un

nouveau problème, dont le délai est indépendant des délais déjà utilisés et de l'histoire observée, par l'indépendance initiale des suites. L'indice de cette nouvelle variable est fixé lorsque l'histoire et le gagnant sont fixés. Son délai est donc indépendant du délai restant de l'autre groupe. Après cette résolution, les deux délais sont de nouveau indépendants, de paramètres p et q . Cela établit la propriété renforcée par récurrence pour chaque histoire finie.

Par 5. b), la probabilité que A gagne la course suivante vaut donc p , quelle que soit cette histoire. En regroupant les histoires finies selon leur dernier gagnant, on en déduit :

$$P_{[U_n=1]}(U_{n+1} = 1) = p, \quad P_{[U_n=0]}(U_{n+1} = 1) = p.$$

Les deux conditionnements sont licites puisque l'hypothèse de récurrence donne $P(U_n = 1) = p > 0$ et $P(U_n = 0) = q > 0$.

8. e) La formule des probabilités totales donne :

$$P(U_{n+1} = 1) = pP(U_n = 1) + pP(U_n = 0) = p(p + q) = p.$$

Le rang initial est établi en 8. a), et l'hérédité vient d'être démontrée. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, U_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

9. Résultat admis dans cette version adaptée : pour chaque $n \geq 1$, les variables $U_1, \dots, U_n$ sont mutuellement indépendantes. Avec 8 et

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k,$$

on reconnaît une somme de n Bernoulli indépendantes de même paramètre. Donc S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et S_0 est certaine égale à 0.

10. a) Au rang 0, aucun problème n'est résolu : les deux groupes sont à égalité. Le choix $n = 0$ réalise l'événement A_0 . Donc $a_0 = 1$.

10. b) Après m résolutions, l'avance de A est $D_m = S_m - (m - S_m) = 2S_m - m$. Chaque nouvelle résolution ajoute 1 à cette avance si A gagne et retranche 1 sinon.

Sachant $U_1 = 1$, on part de l'avance 1 ; atteindre r revient à atteindre l'avance supplémentaire $r - 1$ avec la suite des gagnants $U_2, U_3, \dots$. Par 9, cette suite est indépendante de U_1 et a les mêmes lois finies que $U_1, U_2, \dots$. La probabilité est donc a_{r-1} . Pour $r = 1$, la cible est déjà atteinte à la première résolution et cette probabilité vaut bien $a_0 = 1$.

Sachant $U_1 = 0$, on part de l'avance -1 : il faut gagner $r + 1$ d'avance à partir de ce nouvel état, d'où a_{r+1} . Pour justifier les événements de durée illimitée à partir des lois finies, on considère d'abord l'atteinte avant un nombre fixé de résolutions, puis leur réunion croissante quand cette borne tend vers l'infini. La continuité croissante des probabilités donne les mêmes identités pour A_r .

10. c) Les événements $[U_1 = 1]$ et $[U_1 = 0]$ constituent un système complet, de probabilités p et q . Donc $a_r = pa_{r-1} + qa_{r+1}$. Comme $q > 0$, la résolution par rapport à a_{r+1} donne la récurrence demandée.

10. d) L'équation caractéristique réelle est $qz^2 - z + p = 0$. Son discriminant est $1 - 4pq = (1 - 2p)^2$ et ses racines sont 1 et p/q .

Si $p \neq 1/2$, ces racines sont distinctes. Il existe deux constantes réelles α, β telles que $a_r = \alpha + \beta(p/q)^r$ pour tout $r \geq 0$.

Si $p = 1/2$, les deux racines sont égales à 1. La récurrence s'écrit $a_{r+1} - a_r = a_r - a_{r-1}$: les différences sont constantes, et $a_r = \alpha + \beta r$. Cette démonstration directe couvre le cas de la racine double.

11. Si $p = 1/2$, $a_r = \alpha + \beta r$. Or $0 \leq a_r \leq 1$ pour tout r . Si $\beta > 0$, la suite tendrait vers $+\infty$; si $\beta < 0$, vers $-\infty$. Donc $\beta = 0$ et $\alpha = a_0 = 1$.

Si $p > 1/2$, $p/q > 1$, donc $(p/q)^r \rightarrow +\infty$. L'expression de 10. d) ne peut rester entre 0 et 1 que si $\beta = 0$. Alors $\alpha = a_0 = 1$. Dans les deux cas, $a_r = 1$ pour tout $r \geq 0$.

12. a) On fixe $k \in \mathbb{N}$; le cas $k = 0$ est inclus dans les calculs suivants.

12. a) i. L'avance après m résolutions est $D_m = 2S_m - m$. Si elle vaut $2k$, alors m est pair, donc $m = 2i$; de plus $m \geq 2k$ implique $i \geq k$, et l'égalité devient $S_{2i} = i + k$.

Réciproquement, chacune de ces égalités donne $D_{2i} = 2k$ à une date admissible. D'où l'égalité d'événements demandée. Elle vaut aussi pour $k = 0$, les deux côtés contenant l'événement certain du rang 0.

12. a) ii. Pour $i \geq 1$, S_{2i} suit $\mathcal{B}(2i, p)$ par 9. Comme $0 \leq i + k \leq 2i$, la formule de cette loi donne $P(S_{2i} = i + k) = \binom{2i}{i+k} p^{i+k} q^{i-k}$. Le seul cas $i = 0$ est $k = 0$; les deux membres valent alors 1, avec $\binom{0}{0} = 1$.

12. a) iii. Le binôme de Newton donne

$$\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} = (1 + 1)^{2i} = 4^i.$$

Les termes sont positifs ou nuls; chacun est donc majoré par leur somme, notamment $\binom{2i}{i+k} \leq 4^i$.

12. a) iv. Comme $p, q > 0$, on peut écrire :

$$P(S_{2i} = i + k) \leq 4^i p^{i+k} q^{i-k} = \left(\frac{p}{q}\right)^k (4pq)^i.$$

Sous l'hypothèse $p < 1/2$, $0 < 4pq < 1$. La série géométrique de droite converge. Par comparaison des séries positives, celle de gauche converge aussi et :

$$\sum_{i=k}^{+\infty} P(S_{2i} = i + k) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k \sum_{i=k}^{+\infty} (4pq)^i = \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{(4pq)^k}{1 - 4pq}.$$

12. b) Question adaptée au programme actuel. Rectification locale du PDF : la condition imprimée $p > 1/2$ est remplacée par $p < 1/2$, conformément à cette partie et à l'inégalité de 12. a) iv. Pour $p > 1/2$, 11 donne au contraire $a_{2k} = 1$.

Par 12. a) i et Boole pour une réunion dénombrable, dont la série majorante converge par 12. a) iv :

$$0 \leq a_{2k} \leq \frac{(4p^2)^k}{1 - 4pq}.$$

Comme $0 < p < 1/2$, $0 < 4p^2 < 1$; cette borne tend vers zéro. Ainsi $a_{2k} \rightarrow 0$.

12. c) Sous l'hypothèse $p < 1/2$, $0 < p/q < 1$. La formule de 10. d) donne $a_{2k} = \alpha + \beta(p/q)^{2k} \rightarrow \alpha$. Par 12. b), cette limite vaut 0, donc $\alpha = 0$. Avec $a_0 = 1$, on obtient $\beta = 1$. Ainsi $a_r = (p/q)^r$ pour tout $r \geq 0$.

Partie III - La blockchain et la stratégie de la double dépense

13. a) Si $T_n = k$, au moment de placer Q_n , exactement n problèmes de B et k de A ont été résolus. Le dernier problème est de B et occupe donc la position $n + k$. Parmi les $n + k - 1$ précédents se trouvent les k problèmes de A , d'où $S_{n+k-1} = k$ et $U_{n+k} = 0$.

Réciproquement, ces deux égalités signifient qu'il y a k problèmes de A et $n - 1$ de B avant la position $n + k$, puis un problème de B . C'est donc Q_n , et $T_n = k$. L'égalité d'événements est prouvée, y compris pour $n = 1, k = 0$ avec $S_0 = 0$.

13. b) Par 9, U_{n+k} est indépendante de $U_1, \dots, U_{n+k-1}$, et donc de leur somme S_{n+k-1} par le lemme des coalitions. Comme $P(U_{n+k} = 0) = q$, la formule binomiale donne :

$$P(T_n = k) = \binom{n+k-1}{k} p^k q^{n-1} q = \binom{n+k-1}{k} p^k q^n.$$

Le rang de la n -ième victoire de B est fini avec probabilité 1. En effet, pour $m \rightarrow \infty$, le nombre $m - S_m$ de victoires de B suit $\mathcal{B}(m, q)$ et, dès que $mq > n$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(m - S_m < n) \leq \frac{mpq}{(mq - n)^2} \rightarrow 0.$$

L'événement « moins de n victoires de B pour toujours » a donc une probabilité nulle. Les événements $[T_n = k]$ constituent ainsi un système complet à un événement négligeable près, ce qui suffit pour les probabilités totales ci-dessous.

14. a) Sachant $T_n = k$, les nombres de problèmes résolus sont k pour A et n pour B . Si $k \geq n + 1$, A est déjà strictement en tête au moment considéré : G_n est réalisé.

Si $0 \leq k \leq n$, il faut que l'avance future gagne $n + 1 - k$ unités pour devenir strictement positive. Sa probabilité est a_{n+1-k} . Pour le justifier sans propriété générale de temps

aléatoire, on fixe $T_n = k$: cette condition ne dépend que des $n + k$ premières variables U_j par 13. a), tandis que la suite $U_{n+k+1}, U_{n+k+2}, \dots$ en est indépendante et a les mêmes lois finies que la suite initiale. L'événement d'atteinte est une réunion croissante d'événements à horizon fini, ce qui étend cette indépendance au calcul de sa probabilité comme en 10. b).

La formule des probabilités totales sur les événements $[T_n = k]$ donne donc :

$$P(G_n) = P(T_n \geq n+1) + \sum_{k=0}^n P(T_n = k) a_{n+1-k}.$$

14. b) Si $p \geq 1/2$, 11 donne $a_{n+1-k} = 1$ pour chaque terme. Les événements $[T_n \geq n+1]$ et $[T_n = k], 0 \leq k \leq n$, forment un système complet à probabilité totale 1. Ainsi $P(G_n) = 1$.

14. c) Si $p < 1/2$, 12 donne $a_{n+1-k} = (p/q)^{n+1-k}$. Écrivons

$$P(T_n \geq n+1) = 1 - \sum_{k=0}^n P(T_n = k).$$

En remplaçant les probabilités avec 13. b), on obtient :

$$P(G_n) = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} p^k q^n \left(1 - \left(\frac{p}{q} \right)^{n+1-k} \right).$$

Or $p^k q^n (p/q)^{n+1-k} = p^{n+1} q^{k-1}$, y compris pour $k = 0$ puisque $q > 0$. Le développement donne la formule demandée.

15. a) Dans 14. c), la première somme est

$$q^n \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} p^k = u_n(p).$$

La seconde est :

$$p^{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} q^{k-1} = \frac{p}{q} \left(p^n \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} q^k \right) = \frac{p}{q} u_n(q).$$

Ainsi $P(G_n) = 1 - u_n(p) + (p/q)u_n(q)$.

15. b) Posons $A_k = \binom{n+k-1}{k}$ et $B_k = \binom{n+k}{k}$. On factorise sans division par $1-x$:

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = (1-x)^n \left((1-x) \sum_{k=0}^{n+1} B_k x^k - \sum_{k=0}^n A_k x^k \right).$$

Dans la parenthèse, le coefficient constant vaut $B_0 - A_0 = 0$. Pour $1 \leq k \leq n$, celui de x^k vaut $B_k - B_{k-1} - A_k = 0$, car Pascal donne $\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

Le coefficient de x^{n+1} est $B_{n+1} - B_n = \binom{2n+1}{n+1} - \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n+1}$, encore par Pascal. Celui de x^{n+2} est $-B_{n+1} = -\binom{2n+1}{n+1}$. Aucun autre coefficient n'est non nul. On obtient donc l'identité annoncée. Ce calcul est une identité entre polynômes, valable également pour $x = 0$ et $x = 1$.

15. c) Notons $A = \binom{2n}{n+1}$ et $B = \binom{2n+1}{n+1}$. D'après 15. a)-b) :

$$P(G_{n+1}) - P(G_n) = -q^n p^{n+1} (A - Bp) + \frac{p}{q} p^n q^{n+1} (A - Bq).$$

Les deux facteurs devant les parenthèses, au signe près, sont égaux à $p^{n+1}q^n$. Ainsi les termes en A s'annulent, et il reste :

$$P(G_{n+1}) - P(G_n) = B p^{n+1} q^n (p - q) = - \left(1 - \frac{p}{q} \right) (pq)^{n+1} \binom{2n+1}{n+1}.$$

15. d) Méthode 1 — Récurrence demandée

Pour $n = 1$, $u_1(x) = (1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$. Donc :

$$P(G_1) = p^2 + \frac{p}{q}(1 - q^2) = \frac{p}{q} + p(p - q) = \frac{p}{q} - \left(1 - \frac{p}{q}\right)pq.$$

C'est bien la formule pour $n = 1$, car $\binom{1}{1} = 1$. Supposons la formule vraie à un rang $n \geq 1$. La relation de 15. c) retranche exactement le terme d'indice $n + 1$ de la somme, puisque $\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2(n+1)-1}{n+1}$. Ainsi la formule est vraie au rang $n + 1$, et donc pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Somme télescopique finie

Pour $n \geq 2$, on somme 15. c) aux indices $j = 1, \dots, n - 1$. Le membre de gauche devient $P(G_n) - P(G_1)$. À droite, avec $k = j + 1$, on obtient

$$-(1 - p/q) \sum_{k=2}^n \binom{2k-1}{k} (pq)^k.$$

L'expression de $P(G_1)$ ci-dessus fournit le terme $k = 1$ et donne la même formule. La première méthode vérifie l'hérédité; la seconde met en évidence l'addition des diminutions successives.

16. a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Pour $1 \leq k \leq n$, la définition factorielle donne :

$$\frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

En partant de $\binom{n}{0} = 1$, on utilise la forme équivalente $\binom{n}{j} = \binom{n}{j-1}(n - j + 1)/j$. En Python, `//` est la division entière; ici chaque quotient est exact par l'identité précédente.

Python

```
def binom(n, k):  
    c = 1  
    for j in range(1, k + 1):  
        c = c * (n - j + 1) // j  
    return c
```

La fonction suppose n et k entiers avec $0 \leq k \leq n$. Pour $k = 0$, la boucle est vide et renvoie bien 1 ; pour $k = n$, elle renvoie aussi 1. Les entiers Python permettent de conserver exactement les coefficients calculés.

16. b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La formule de 15. c) permet de calculer les probabilités successives sans recalculer une somme entière. Pour des entrées décimales, le script suivant utilise la représentation rationnelle exacte documentée dans le sujet ; il évite qu'un arrondi fasse changer le résultat d'un test très proche du seuil.

Python

```
from fractions import Fraction  
  
def binom(n, k):  
    c = 1  
    for j in range(1, k + 1):  
        c = c * (n - j + 1) // j  
    return c  
  
p = Fraction(input("p="))  
epsilon = Fraction(input("epsilon="))  
q = 1 - p  
n = 1  
prob = p / q - (1 - p / q) * p * q  
while prob > epsilon:  
    prob = prob - (1 - p / q) * (p * q)**(n + 1) * binom(2*n + 1, n + 1)  
    n = n + 1
```

print(n)

On suppose les entrées conformes $0 < p < 1/2$ et $\varepsilon > 0$. La variable prob vaut exactement $P(G_n)$ à chaque test : cela est vrai à l'initialisation par 15. d) au rang 1, et conservé par 15. c). Le décrement est strictement positif puisque $1 - p/q > 0$ et $pq > 0$. La boucle examine donc les entiers successifs à partir de 1 et s'arrête au premier vérifiant le seuil. Si le seuil est déjà atteint pour $n = 1$, elle est vide.

Justifions que la boucle termine, sans invoquer de somme de série supplémentaire. Par définition, $u_n(p) = P(T_n \leq n)$. Cet événement signifie que la n -ième victoire de B a lieu au plus tard au rang $2n$, soit $S_{2n} \leq n$. La même identité, avec les paramètres échangés, donne $u_n(q) = P(S_{2n} \geq n)$, par symétrie de la loi binomiale. Ainsi 15. a) donne :

$$P(G_n) = P(S_{2n} \geq n+1) + \frac{p}{q}P(S_{2n} \geq n) \leq \left(1 + \frac{p}{q}\right) P(S_{2n} \geq n).$$

La variable S_{2n} a pour espérance $2np$ et variance $2npq$. Comme $n - 2np = n(1 - 2p) > 0$, Bienaymé-Tchebychev fournit :

$$P(G_n) \leq \frac{1}{q} \frac{2npq}{n^2(1-2p)^2} = \frac{2p}{n(1-2p)^2} \rightarrow 0.$$

La forme de Tchebychev avec $\geq$ s'obtient aussi en appliquant celle avec $>$ à une borne légèrement plus petite, puis en passant à la limite. Pour chaque $\varepsilon > 0$, le seuil est donc atteint en un nombre fini d'étapes. Le script calcule bien le plus petit entier demandé.

Pour $\varepsilon = 10^{-4}$, les valeurs exactes pour les abscisses de la figure sont :

p	n_p	p	n_p	p	n_p
0,10	7	0,18	13	0,26	27
0,11	7	0,19	14	0,27	30
0,12	8	0,20	16	0,28	33
0,13	9	0,21	17	0,29	37
0,14	9	0,22	19	0,30	41

p	n_p	p	n_p	p	n_p
0,15	10	0,23	21	0,31	46
0,16	11	0,24	22	0,32	52
0,17	12	0,25	25		

Relevé des adaptations

- 7. c)-d), 16. a)-b) : Code adapté en Python ; conservation des blancs de 7. c), documentation des échelles exponentielles, des entrées et des opérations utilisées. En 16, les divisions entières exactes et la représentation rationnelle des décimaux sont documentées pour fiabiliser le calcul du seuil.
- 8. d) : indication locale pour justifier le renouvellement particulier des deux délais indépendants après une résolution ; aucun résultat général sur les temps aléatoires n'est supposé connu.
- 12. b) : rectification de la condition imprimée $p > 1/2$ en $p < 1/2$. La condition d'origine contredit 11 et le contexte de la partie.
- 16. b), figure : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les bornes et graduations ont été relevées dans l'original ; les ordonnées sont calculées exactement avec les formules du sujet et concordent avec le tracé source. Les segments relient les valeurs obtenues pour $p = 0,10, 0,11, \dots, 0,32$.