



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques — Option économique

2019

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

1. Dans cette question, on considère les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \text{ et le produit matriciel } M = CL.$$

1. a) i. Calculer M et M^2 .

1. a) ii. Déterminer le rang de M .

1. a) iii. La matrice M est-elle diagonalisable?

1. b) i. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer le produit $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. b) ii. Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie

$${}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. b) iii. Pour une telle matrice Q , calculer le produit PMQ .
2. La fonction Python suivante permet de multiplier la i -ième ligne L_i d'une matrice A par un réel a sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow aL_i$, où $a \neq 0$.

Les matrices sont représentées par des tableaux NumPy à deux dimensions dont le type de coefficients est flottant. Les numéros mathématiques de lignes i, j commencent à 1 ; les indices Python commencent à 0. `np.array(donnees, dtype=float)` crée un tableau de coefficients flottants à partir de listes de données. `A.copy()` crée une copie indépendante de A , `np.shape(A)` renvoie son couple de dimensions et `np.eye(n)` crée la matrice identité de taille n .

Python

```
import numpy as np

def multlig(a, i, A):
    n, p = np.shape(A)
    B = A.copy()
    for j in range(p):
        B[i - 1, j] = a * B[i - 1, j]
    return B
```

2. a) Donner le code Python de deux fonctions `addlig(b, i, j, A)` et `echlig(i, j, A)` permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice : $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ et $L_i \leftrightarrow L_j$, avec $i \neq j$. Les fonctions renvoient une nouvelle matrice et conservent A .
2. b) Expliquer pourquoi la fonction suivante retourne le même résultat B que la fonction `multlig`.

Python

```
def multligmat(a, i, A):
    n, p = np.shape(A)
    D = np.eye(n)
```

```
D[i - 1, i - 1] = a
B = np.dot(D, A)
return B
```

3. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1. Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa i -ième ligne et de sa j -ième colonne, qui vaut 1.

3. a) i. Justifier l'existence d'une matrice-colonne non nulle

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

et d'une matrice-ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.

3. a) ii. Calculer la matrice MC et en déduire une valeur propre de M .
3. a) iii. Montrer que, si le réel

$$\sum_{i=1}^n c_i \ell_i$$

est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.

3. b) i. À l'aide de l'égalité $M = CL$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $PMQ = E_{1,1}$. On pourra appliquer des opérations élémentaires inversibles à la colonne C , puis à la ligne L .

3. b) ii. En déduire que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i M Q_j = E_{i,j}$.

Problème

On définit et on étudie les fonctions génératrices des moments et les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité. Les cumulants d'ordre 3 et 4 permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui complètent la description d'une loi par son espérance et sa variance.

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires sont réelles et définies sur cet espace. Sous réserve d'existence, l'espérance et la variance de X sont notées $E(X)$ et $V(X)$.

Pour toute variable aléatoire X et tout réel t pour lequel e^{tX} admet une espérance, on pose $M_X(t) = E(e^{tX})$ et $K_X(t) = \ln(M_X(t))$. Ces fonctions sont respectivement appelées fonction génératrice des moments et fonction génératrice des cumulants de X .

La classe C^p signifie que les dérivées successives jusqu'à l'ordre p existent et sont continues. Lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, K_X est de classe C^p sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle cumulant d'ordre p de X le réel $Q_p(X) = K_X^{(p)}(0)$.

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs entières. On note S une variable à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $P(S = -1) = P(S = 1) = 1/2$.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$.

1. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que M_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. b) Justifier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $M_X^{(p)}(0) = E(X^p)$.
1. c) Soit Y une variable à valeurs dans $[-n, n]$ dont la fonction génératrice des moments est la même que celle de X . On note G_X et G_Y les polynômes définis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{2n} P(X = k - n)x^k, \quad G_Y(x) = \sum_{k=0}^{2n} P(Y = k - n)x^k.$$

1. c) i. Vérifier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité $G_X(e^t) = e^{nt}M_X(t)$.
1. c) ii. Justifier la relation $G_X(e^t) = G_Y(e^t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
1. c) iii. En déduire que Y suit la même loi que X .
2. On note X_2 une variable qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/2)$. On suppose que X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.
 2. a) i. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de Y_2 .
 2. a) ii. Calculer les probabilités $P(Y_2 = y)$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2 .
 2. b) Vérifier que la variable $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que Y_2 .
3. Le script Python suivant permet d'effectuer des simulations de la variable Y_2 définie dans la question précédente.

`rd.binomial(m,p,size=(n,2))` crée un tableau de n lignes et deux colonnes de tirages indépendants de loi $\mathcal{B}(m, p)$; les appels successifs sont indépendants.

`np.column_stack((u,v))` forme un tableau dont les colonnes sont les vecteurs u et v .

`A[:, j]` sélectionne toute la colonne d'indice j , et `*` effectue un produit terme à terme entre tableaux de même forme.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

n = 10

X = rd.binomial(2, 0.5, size=(n, 2))
B = rd.binomial(1, 0.5, size=(n, 2))
S = 2 * B - np.ones((n, 2))

Z1 = np.column_stack((S[:, 0] * X[:, 0], X[:, 0] - S[:, 0] - 1))
Z2 = np.column_stack((S[:, 0] * X[:, 0], X[:, 1] - S[:, 1] - 1))
```

3. a) Que contiennent les variables X et S après exécution des quatre premières instructions qui suivent les imports ?
3. b) Expliquer pourquoi, après exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices Z1 et Z2 contient une simulation de Y_2 .
3. c) On affecte à n une valeur beaucoup plus grande que 10, par exemple 100000, et on ajoute les instructions suivantes.

Python

```
p1 = np.sum(Z1[:, 0] == Z1[:, 1]) / n
p2 = np.sum(Z2[:, 0] == Z2[:, 1]) / n
```

La comparaison de deux colonnes produit un tableau de booléens ; `np.sum` compte les valeurs True. Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour p1 et p2 après exécution du script ?

4. On note X_n une variable qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. On suppose que X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = SX_n$.
4. a) Justifier que M_{X_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout réel t .

4. b) Montrer que $M_{Y_n}(t) = 2^{-(n+1)}((1 + e^t)^n + (1 + e^{-t})^n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En utilisant l'égalité $(1 + e^{-t})^n = e^{-nt}(1 + e^t)^n$, montrer que Y_n suit la même loi que $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et D_X le domaine de définition de K_X .
5. a) Donner la valeur de $K_X(0)$.
5. b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$. Justifier, pour tout réel t tel que $at \in D_X$, l'égalité $K_Y(t) = bt + K_X(at)$.
5. c) On suppose que X et $-X$ suivent la même loi. Que peut-on dire des cumulants d'ordre impair de X ?
6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et D_X, D_Y les domaines de définition de K_X, K_Y .
6. a) Montrer que $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$ pour tout $t \in D_X \cap D_Y$.
6. b) En déduire une relation entre les cumulants des variables X, Y et $X + Y$ lorsqu'ils sont définis.
7. Soit U une variable qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
7. a) Montrer que M_U est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par $M_U(t) = (e^t - 1)/t$ si $t \neq 0$, et $M_U(0) = 1$.
7. b) Calculer la dérivée de M_U en tout point $t \neq 0$.

7. c) Trouver la limite de $(M_U(t) - 1)/t$ lorsque t tend vers 0. On pourra appliquer Taylor-Young à la fonction exponentielle à l'ordre 2 en 0.
7. d) Montrer que M_U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour étudier la limite de sa dérivée en 0, on pourra appliquer directement Taylor-Young à l'ordre 2 à la fonction $t \mapsto (t - 1)e^t + 1$.
8. Soient $\alpha < \beta$ deux réels. Dans cette question, X suit la loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$.
8. a) Exprimer K_X en fonction de M_U , où U est la variable définie en 7.
8. b) Justifier que K_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et établir $Q_1(X) = E(X)$.
9. Soient $\lambda > 0$ et T une variable qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .
9. a) Déterminer M_T et K_T .
9. b) En déduire tous les cumulants de T .
10. Soit Z une variable qui suit la loi normale centrée réduite.
10. a) Justifier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx - x^2/2) dx$.
10. b) Montrer que M_Z est définie sur $\mathbb{R}$ et que $M_Z(t) = \exp(t^2/2)$.
10. c) En déduire tous les cumulants d'une variable de loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma > 0$.
11. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que T_n suit la loi de Poisson de paramètre n . On pose $W_n = (T_n - n)/\sqrt{n}$.

11. a) Justifier la convergence en loi de (W_n) vers une variable W dont on précisera la loi. On pourra considérer des variables indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1, puis utiliser la loi de leur somme et le théorème limite central.
11. b) Déterminer K_{W_n} .
11. c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $K_{W_n}(t) \rightarrow K_W(t)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On pourra appliquer directement Taylor-Young à l'ordre 2 à $x \mapsto e^x - 1 - x$ en 0.

Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, X est une variable telle que M_X soit de classe C^4 sur un intervalle ouvert I contenant 0. On choisit I symétrique par rapport à 0, quitte à le restreindre.

On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 et que $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Cette même propriété pourra être appliquée aux variables considérées ensuite lorsque leur fonction génératrice des moments est de classe C^4 sur I . On pose $\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$.

12. Justifier les égalités $Q_1(X) = E(X)$ et $Q_2(X) = V(X)$.
13. Soient X_1, X_2 deux variables indépendantes de même loi que X . On pose $S = X_1 - X_2$.
13. a) Montrer que S possède un moment d'ordre 4 et établir $E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6V(X)^2$.
13. b) Montrer que M_S et K_S sont de classe C^4 sur I et que, pour tout $t \in I$,

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t)M_S'(t) + 3K_S''(t)M_S''(t) + K_S'(t)M_S^{(3)}(t).$$

On pourra partir de $M_S' = K_S' M_S$ et dériver cette égalité trois fois en détaillant les étapes.

13. c) En déduire $E(S^4) = Q_4(S) + 3V(S)^2$.

14. Justifier que $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3V(X)^2$.