



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques — Option économique

2019

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1. a) i. Le coefficient (i, j) du produit CL est $c_i \ell_j$. Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le produit LC est la matrice d'ordre 1 de coefficient $0 + 2 - 2 = 0$. Par associativité, $M^2 = C(LC)L = 0$.

1. a) ii. Les colonnes de M sont respectivement C , $2C$ et $-C$. Comme $C \neq 0$, leur espace engendré est la droite $\text{Vect}(C)$. Le rang de M vaut donc 1.

1. a) iii. Si $MV = \lambda V$ avec $V \neq 0$, alors $0 = M^2V = \lambda^2V$; puisque λ est réel, $\lambda = 0$. Si M était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont toutes les valeurs diagonales sont nulles, donc serait nulle. Or sa deuxième ligne n'est pas nulle. Ainsi M n'est pas diagonalisable.

Le fait que PMQ sera diagonale à la question suivante ne contredit pas cette conclusion : les matrices de gauche et de droite n'y sont pas supposées inverses l'une de l'autre.

1. b) i. Pour $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, on a $PX = {}^t(x_2, x_1, x_3 - 2x_2)$. Pour toute colonne $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$, l'équation $PX = Y$ possède l'unique solution $X = {}^t(y_2, y_1, y_3 + 2y_1)$. Donc P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PC = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. b) ii. En transposant la relation demandée, il faut obtenir $LQ = (1 \ 0 \ 0)$. On peut choisir

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes ont pour produits avec L respectivement 1, $-2 + 2 = 0$ et $1 - 1 = 0$. De plus, Q est triangulaire avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1, donc inversible ;

on peut vérifier directement que son inverse est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi sa transposée

satisfait bien la condition.

1. b) iii. Pour toute matrice Q satisfaisant cette condition, l'associativité donne

$$PMQ = (PC)(LQ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) Code adapté en Python. Les numéros de lignes sont convertis en indices en soustrayant 1. On copie le tableau avant toute modification.

Python

```
import numpy as np

def addlig(b, i, j, A):
    n, p = np.shape(A)
    B = A.copy()
    for k in range(p):
```

```

    B[i - 1, k] = B[i - 1, k] + b * B[j - 1, k]

return B

```

```

def echlig(i, j, A):
    n, p = np.shape(A)
    B = A.copy()
    for k in range(p):
        ancien = B[i - 1, k]
        B[i - 1, k] = B[j - 1, k]
        B[j - 1, k] = ancien
    return B

```

Dans `addlig`, la ligne j n'est pas modifiée puisque $i \neq j$. Dans `echlig`, la variable `ancien` conserve le coefficient qui serait perdu lors de la première affectation. Les deux boucles parcourent toutes les colonnes, de l'indice 0 à l'indice $p - 1$. Les tableaux sont de type flottant comme précisé dans le sujet ; les opérations peuvent donc produire des coefficients non entiers. Aucun coefficient de A n'est modifié.

2. b) Code adapté en Python. La matrice D est diagonale : son coefficient diagonal d'indice i vaut a , tous les autres valent 1. Pour tout coefficient de DA ,

$$(DA)_{k,\ell} = \sum_{h=1}^n d_{k,h} a_{h,\ell} = d_{k,k} a_{k,\ell}.$$

La ligne i est donc multipliée par a et les autres sont conservées. C'est exactement le résultat de `multlig`. `np.dot(D, A)` effectue ce produit matriciel et crée un nouveau tableau.

3. a) i. Puisque M est de rang 1, elle possède une colonne non nulle C et toutes ses colonnes appartiennent à la droite qu'elle engendre. Pour chaque j , il existe donc un réel ℓ_j tel que la colonne j soit $\ell_j C$. En posant $L = (\ell_1 \cdots \ell_n)$, le produit CL possède ces mêmes colonnes et vaut M . Si C est la colonne de numéro j_0 , alors $\ell_{j_0} = 1$, donc $L \neq 0$.

3. a) ii. Le produit LC a pour coefficient

$$s = \sum_{i=1}^n \ell_i c_i.$$

Ainsi $MC = C(LC) = sC$. Comme $C \neq 0$, s est une valeur propre de M et C est un vecteur propre associé. Cette conclusion vaut aussi si $s = 0$.

3. a) iii. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(M) = n - 1$. Tous les vecteurs de ce noyau sont des vecteurs propres pour 0, sauf le vecteur nul. Si $s \neq 0$, $MC = sC \neq 0$, donc $C \notin \text{Ker}(M)$.

Choisissons une base $(V_2, \dots, V_n)$ de $\text{Ker}(M)$. La famille $(C, V_2, \dots, V_n)$ est libre : si

$$aC + \sum_{j=2}^n b_j V_j = 0,$$

l'application de M donne $asC = 0$, donc $a = 0$; les autres coefficients sont ensuite nuls par liberté de la base du noyau. Cette famille de n colonnes forme une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice est $\text{diag}(s, 0, \dots, 0)$. Ainsi M est diagonalisable.

3. b) i. Question adaptée au programme actuel : l'indication conduit à une construction concrète par opérations élémentaires.

La colonne C est non nulle. Échangeons d'abord sa première ligne avec une ligne de coefficient non nul. Multiplions ensuite la première ligne par l'inverse de ce coefficient : elle vaut alors 1. Pour chaque autre ligne, soustrayons à cette ligne son coefficient actuel multiplié par la première. La colonne devient $e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0)$.

Chacune de ces opérations est réversible : un échange se répète pour s'inverser, une multiplication par un réel non nul s'inverse par multiplication par son inverse, et une addition de ligne s'inverse en changeant le signe du coefficient. Les matrices représentant ces opérations sont donc inversibles. Leur produit P l'est aussi et satisfait $PC = e_1$.

Appliquons le même procédé à la ligne non nulle L , avec cette fois des opérations sur les colonnes : échanger la première colonne avec une colonne de coefficient non nul, normaliser ce coefficient, puis retrancher des multiples de la première colonne aux autres. Ces opérations correspondent à une multiplication à droite par une matrice inversible Q et donnent $LQ = {}^t(e_1)$.

Alors $PMQ = (PC)(LQ) = e_1 {}^t(e_1) = E_{1,1}$. Il ne s'agit pas d'un changement de base unique imposant $Q = P^{-1}$; la construction reste donc valable lorsque M n'est pas diagonalisable.

3. b) ii. Soit R_i la matrice qui échange les lignes 1 et i par multiplication à gauche, avec $R_1 = I_n$. Soit S_j celle qui échange les colonnes 1 et j par multiplication à droite, avec $S_1 = I_n$. Ces matrices sont inversibles et sont chacune leur propre inverse.

Le seul coefficient non nul de $R_i E_{1,1} S_j$ se trouve en position (i, j) et vaut 1. En posant $P_i = R_i P$ et $Q_j = Q S_j$, produits de matrices inversibles, on obtient donc $P_i M Q_j = E_{i,j}$ pour tous les indices demandés.

Problème

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

1. a) La variable X prend un nombre fini de valeurs ; la variable e^{tX} est donc bornée pour chaque t fixé et possède une espérance. Le transfert donne

$$M_X(t) = \sum_{j=-n}^n e^{tj} P(X = j).$$

C'est une somme finie de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc M_X est elle-même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. b) Pour un entier j fixé, une récurrence utilisant la dérivation de l'exponentielle donne $(e^{tj})^{(p)} = j^p e^{tj}$, pour tout $p \geq 1$. On dérive donc la somme finie précédente terme à terme :

$$M_X^{(p)}(t) = \sum_{j=-n}^n j^p e^{tj} P(X = j).$$

En $t = 0$, cette somme vaut

$$\sum_{j=-n}^n j^p P(X = j) = E(X^p),$$

dont l'existence est assurée par le support fini. Il n'y a ici aucune dérivation d'une série infinie.

1. c) Les deux polynômes codent les probabilités des valeurs entières, avec le décalage de n indiqué dans leur définition.

1. c) i. En posant $j = k - n$, on calcule

$$G_X(e^t) = \sum_{k=0}^{2n} P(X = k - n) e^{tk} = e^{nt} \sum_{j=-n}^n P(X = j) e^{tj} = e^{nt} M_X(t).$$

1. c) ii. Le même calcul pour Y donne $G_Y(e^t) = e^{nt} M_Y(t)$. L'hypothèse $M_X = M_Y$ implique donc $G_X(e^t) = G_Y(e^t)$ pour tout réel t .
1. c) iii. Lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, e^t parcourt $]0, +\infty[$. Le polynôme $G_X - G_Y$, de degré au plus $2n$, possède donc une infinité de racines distinctes. Un polynôme non nul de degré au plus $2n$ ne peut en avoir plus de $2n$; ce polynôme est donc nul.

Ses coefficients sont alors égaux : pour $k = 0, \dots, 2n$, $P(X = k - n) = P(Y = k - n)$. Les autres valeurs ont une probabilité nulle pour les deux variables. Ainsi X et Y ont la

même loi. Cette preuve établit seulement la propriété nécessaire pour les variables à support fini de cette partie.

2. a) i. La variable X_2 peut valoir 0, 1 ou 2, et S peut valoir -1 ou 1 . L'ensemble des valeurs de $Y_2 = SX_2$ est donc $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Chacune de ces valeurs possède une probabilité strictement positive, comme le confirme le calcul suivant.

2. a) ii. La loi binomiale donne $P(X_2 = 0) = 1/4$, $P(X_2 = 1) = 1/2$ et $P(X_2 = 2) = 1/4$. Pour $j = 1, 2$, l'indépendance donne $P(Y_2 = j) = P(Y_2 = -j) = \frac{1}{2}P(X_2 = j)$. De plus $Y_2 = 0$ équivaut à $X_2 = 0$. Ainsi

y	-2	-1	0	1	2
$P(Y_2 = y)$	$1/8$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/8$

La somme vaut 1, ce qui contrôle la loi obtenue.

2. b) Posons $V = X_2 - (S + 1)$. Lorsque $S = -1$, $V = X_2$; lorsque $S = 1$, $V = X_2 - 2$. Les deux cas ont chacun la probabilité $1/2$ et X_2 conserve sa loi sous chacun d'eux par indépendance. Pour $y = -2, -1$, on obtient respectivement $(1/2)(1/4) = 1/8$ et $(1/2)(1/2) = 1/4$. Pour $y = 1, 2$, on obtient les mêmes valeurs dans l'autre branche. Enfin

$$P(V = 0) = \frac{1}{2}P(X_2 = 0) + \frac{1}{2}P(X_2 = 2) = \frac{1}{4}.$$

La loi est exactement celle du tableau de 2.a). Ainsi V et Y_2 ont la même loi, sans être nécessairement égales pour une même réalisation.

3. a) Code adapté en Python. X est un tableau de forme $(n, 2)$ dont tous les coefficients sont des simulations indépendantes de $\mathcal{B}(2, 1/2)$. Les coefficients de B sont des Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$, indépendantes aussi de X . Donc chacun des coefficients de $S=2*B-1$ vaut -1 ou 1 avec probabilité $1/2$. Les coefficients de S sont indépendants entre eux et de tous ceux de X .

3. b) Pour chaque ligne, la première colonne de Z1 et de Z2 utilise un couple indépendant de lois S, X_2 et simule donc SX_2 . La deuxième colonne de Z1 simule $X_2 - (S + 1)$ avec le même couple que sa première colonne. La deuxième colonne de Z2 utilise le couple indépendant de l'autre colonne de X, S . Par 2.b), chaque coefficient des deux secondes colonnes a bien lui aussi la loi de Y_2 .

Cela ne rend pas les deux coefficients d'une ligne de Z1 indépendants : ils utilisent les mêmes tirages. Dans Z2, ils utilisent deux groupes disjoints de tirages indépendants et sont indépendants par le lemme des coalitions.

3. c) Pour Z1, l'égalité des deux coefficients d'une ligne est l'événement $SX_2 = X_2 - S - 1$. Si $S = 1$, elle devient $X_2 = X_2 - 2$, impossible. Si $S = -1$, elle devient $-X_2 = X_2$, donc $X_2 = 0$. Sa probabilité vaut $P(S = -1)P(X_2 = 0) = 1/8$.

Pour Z2, les deux coefficients sont indépendants et ont chacun la loi de Y_2 . La probabilité de leur égalité est

$$\sum_{y=-2}^2 P(Y_2 = y)^2 = 2 \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{32}.$$

Les indicatrices d'égalité obtenues pour les différentes lignes sont indépendantes, de même loi de Bernoulli. La loi faible des grands nombres permet donc d'approcher p_1 par $1/8 = 0.125$ et p_2 par $7/32 = 0.21875$ pour un grand nombre de lignes. Ce sont des approximations par simulation, et non des égalités imposées aux fréquences observées.

Voici le script Python complet, avec les imports nécessaires :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

n = 100000

X = rd.binomial(2, 0.5, size=(n, 2))
B = rd.binomial(1, 0.5, size=(n, 2))
S = 2 * B - np.ones((n, 2))
```

```
Z1 = np.column_stack((S[:, 0] * X[:, 0], X[:, 0] - S[:, 0] - 1))
Z2 = np.column_stack((S[:, 0] * X[:, 0], X[:, 1] - S[:, 1] - 1))
p1 = np.sum(Z1[:, 0] == Z1[:, 1]) / n
p2 = np.sum(Z2[:, 0] == Z2[:, 1]) / n
```

Les fonctions matricielles et ce script ont été exécutés sur des cas de contrôle. Les probabilités $1/8$ et $7/32$ ci-dessus sont établies par le calcul, indépendamment des valeurs simulées.

4. a) La variable X_n est à support fini $\{0, \dots, n\}$, donc e^{tX_n} possède une espérance pour tout réel t . La loi binomiale et le binôme de Newton donnent

$$M_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{-n} e^{tk} = 2^{-n} (1 + e^t)^n.$$

4. b) Méthode 1 — Fonctions génératrices des moments

En conditionnant par les deux valeurs de S et en utilisant l'indépendance,

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2} M_{X_n}(t) + \frac{1}{2} M_{X_n}(-t) = 2^{-(n+1)} ((1 + e^t)^n + (1 + e^{-t})^n).$$

L'identité indiquée dans le sujet permet de factoriser :

$$M_{Y_n}(t) = 2^{-n} (1 + e^t)^n \frac{1 + e^{-nt}}{2}.$$

Prenons H_n indépendante de X_n , à valeurs 0 et n , avec probabilité $1/2$ pour chacune.

Alors $E(e^{-tH_n}) = (1 + e^{-nt})/2$. L'indépendance des facteurs intégrables donne

$$M_{X_n - H_n}(t) = M_{X_n}(t) E(e^{-tH_n}) = M_{Y_n}(t).$$

Les deux variables sont à valeurs dans $[-n, n]$. Le résultat établi en 1.c) permet de conclure qu'elles ont la même loi.

Méthode 2 — Mélange de deux lois translatées

La symétrie des coefficients binomiaux donne $n - X_n$ de même loi que X_n . Donc $X_n - n$ a la même loi que $-X_n$. La variable $X_n - H_n$ est, selon la valeur indépendante de H_n , un mélange équiprobable des lois de X_n et de $X_n - n$, donc des lois de X_n et de $-X_n$. C'est précisément le mélange défini par SX_n . On retrouve la même loi. La première méthode utilise l'identité de fonctions demandée; la seconde explique directement le rôle du décalage aléatoire H_n .

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. a) Pour toute variable réelle X , $e^{0X} = 1$. Ainsi $M_X(0) = 1$ et $K_X(0) = \ln 1 = 0$.
5. b) Pour t tel que $at \in D_X$, e^{atX} possède une espérance finie. L'égalité $e^{t(aX+b)} = e^{bt}e^{atX}$ prouve que $M_Y(t)$ existe et vaut $e^{bt}M_X(at)$. Ces nombres sont strictement positifs. En prenant leur logarithme,

$$K_Y(t) = bt + K_X(at).$$

Cela couvre aussi $a = 0$, où Y est certaine égale à b et $K_Y(t) = bt$ sur $\mathbb{R}$.

5. c) L'égalité en loi entraîne $M_{-X}(t) = M_X(t)$ chaque fois que ces fonctions sont définies. Par 5.b), $K_{-X}(t) = K_X(-t)$; ainsi K_X est paire et son domaine est symétrique. Si $Q_p(X)$ est défini, on dérive $K_X(t) = K_X(-t)$ p fois sur un voisinage symétrique de 0 :

$$K_X^{(p)}(t) = (-1)^p K_X^{(p)}(-t).$$

En 0, pour p impair, $Q_p(X) = -Q_p(X)$, donc $Q_p(X) = 0$. Cette conclusion porte sur les cumulants qui existent au sens de la définition.

6. a) Pour $t \in D_X \cap D_Y$, les variables e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes, comme fonctions de variables indépendantes, et possèdent chacune une espérance finie. Le résultat du programme sur l'espérance d'un produit indépendant donne l'existence de $M_{X+Y}(t)$ et

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{tX}e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t).$$

Le logarithme transforme ce produit de nombres strictement positifs en somme :

$$K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t).$$

6. b) Si les cumulants d'ordre p de X et de Y sont définis, leurs fonctions K sont de classe C^p sur un même petit intervalle ouvert contenant 0. La relation de 6.a) y montre que K_{X+Y} est aussi de classe C^p . Par dérivation d'une somme finie en 0,

$$Q_p(X + Y) = Q_p(X) + Q_p(Y).$$

L'indépendance est indispensable à la factorisation utilisée avant dérivation.

7. a) Comme $0 \leq U \leq 1$, e^{tU} est bornée pour tout t fixé. Le transfert pour la densité uniforme donne $M_U(t) = \int_0^1 e^{tx} dx$. Pour $t \neq 0$, une primitive est e^{tx}/t , donc $M_U(t) = (e^t - 1)/t$. Pour $t = 0$, l'intégrale vaut 1.

7. b) Pour $t \neq 0$, le quotient est dérivable et

$$M'_U(t) = \frac{te^t - (e^t - 1)}{t^2} = \frac{(t - 1)e^t + 1}{t^2}.$$

7. c) Question adaptée au programme actuel : l'indication permet un emploi direct de Taylor-Young à l'ordre deux. Comme $\exp$ est de classe C^2 , $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \rightarrow 0$. Pour $t \neq 0$,

$$\frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(t) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Ce quotient est le taux d'accroissement en 0 puisque $M_U(0) = 1$. Ainsi M_U est dérivable en 0 et $M'_U(0) = 1/2$.

7. d) Question adaptée au programme actuel : on étudie directement le numérateur sans supposer de règle générale de calcul sur les développements limités. Posons $g(t) = (t - 1)e^t + 1$. Cette fonction est de classe C^2 et

$$g(0) = 0, \quad g'(t) = te^t, \quad g'(0) = 0, \quad g''(t) = (1 + t)e^t, \quad g''(0) = 1.$$

Taylor-Young appliqué à g donne $g(t) = t^2/2 + o(t^2)$. Pour $t \neq 0$, 7.b) implique donc $M'_U(t) \rightarrow 1/2 = M'_U(0)$. La dérivée est continue en 0, et elle est continue ailleurs par sa formule explicite. Ainsi M_U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On n'utilise pas de théorème de prolongement de la dérivée : la dérivabilité en 0 a déjà été établie par 7.c).

8. a) La variable $\alpha + (\beta - \alpha)U$ suit la même loi que X , par transformation affine d'une uniforme. Par 5.b),

$$K_X(t) = \alpha t + K_U((\beta - \alpha)t) = \alpha t + \ln(M_U((\beta - \alpha)t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction M_U est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

8. b) La fonction M_U est de classe C^1 par 7.d), et strictement positive, donc son logarithme est de classe C^1 . L'expression de 8.a) montre que K_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$K'_X(0) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{M'_U(0)}{M_U(0)} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

C'est précisément l'espérance de la loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$. Ainsi $Q_1(X) = E(X)$.

9. a) Pour tout réel t , la série du transfert a des termes positifs et s'écrit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}.$$

La série exponentielle converge pour ce paramètre réel, ce qui justifie l'existence de l'espérance. Donc $M_T(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$ et $K_T(t) = \lambda(e^t - 1)$ sur $\mathbb{R}$.

9. b) Pour tout $p \geq 1$, les dérivations successives de cette expression explicite donnent $K_T^{(p)}(t) = \lambda e^t$. Ainsi tous les cumulants existent et $Q_p(T) = \lambda$. Il n'est pas nécessaire de dériver la série du transfert.

10. a) La complétion du carré donne $tx - x^2/2 = t^2/2 - (x - t)^2/2$. La fonction intégrée est donc $e^{t^2/2} e^{-(x-t)^2/2}$. Le changement affine $u = x - t$, effectué d'abord sur un segment puis aux deux bornes infinies, la ramène à une constante finie multipliée par l'intégrale de la densité normale centrée réduite. Cette dernière converge et a une masse totale égale à 1. L'intégrale demandée converge donc et vaut $\sqrt{2\pi} e^{t^2/2}$.

10. b) Par 10.a), le transfert est absolument convergent, car l'intégrande est positif. Ainsi M_Z est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - x^2/2} dx = e^{t^2/2}.$$

10. c) Toute variable N de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma > 0$ a la loi de $\mu + \sigma Z$. Les questions 5.b) et 10.b) donnent

$$K_N(t) = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}.$$

C'est un polynôme, donc une fonction de classe C^∞ . Ses dérivées en 0 donnent $Q_1(N) = \mu$, $Q_2(N) = \sigma^2$ et $Q_p(N) = 0$ pour tout entier $p \geq 3$.

11. a) Question adaptée au programme actuel : l'indication justifie l'approximation normale d'une loi de Poisson par une application du théorème limite central.

Considérons des variables $(V_j)_{j \geq 1}$ indépendantes de même loi $\mathcal{P}(1)$. Elles possèdent toutes l'espérance 1 et la variance 1. Par stabilité des sommes de Poisson indépendantes,

$$R_n = \sum_{j=1}^n V_j$$

suit $\mathcal{P}(n)$, donc a la même loi que T_n .

Le théorème limite central donne $(R_n - n)/\sqrt{n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ en loi. Pour chaque n , $(R_n - n)/\sqrt{n}$ et W_n ont la même loi, donc les mêmes fonctions de répartition. Par définition de la convergence en loi, W_n converge vers une variable W de loi normale centrée réduite. Il n'est pas nécessaire que les variables T_n soient indépendantes entre elles.

11. b) Les questions 5.b) et 9.a), appliquées à $a = 1/\sqrt{n}$ et $b = -\sqrt{n}$, donnent

$$K_{W_n}(t) = -\sqrt{n}t + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) = n \left(e^{t/\sqrt{n}} - 1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \right),$$

pour tout réel t .

11. c) Question adaptée au programme actuel : on applique directement Taylor-Young à $h(x) = e^x - 1 - x$. Cette fonction de classe C^2 vérifie $h(0) = h'(0) = 0$ et $h''(0) = 1$. Donc $h(x) = x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$.

Pour $t \neq 0$ fixé, $t/\sqrt{n} \rightarrow 0$ et

$$K_{W_n}(t) = nh(t/\sqrt{n}) = \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t/\sqrt{n}) \rightarrow \frac{t^2}{2} = K_W(t).$$

Pour $t = 0$, les deux fonctions valent déjà 0 pour tout n . La convergence est donc établie pour tout réel t , par calcul direct ; on n'utilise pas de théorème reliant automatiquement la convergence en loi et celle des fonctions génératrices.

Partie III. Cumulant d'ordre 4

12. Puisque $M_X > 0$ sur I , $K_X = \ln M_X$ est de classe C^4 . Les règles de dérivation donnent

$$K'_X = \frac{M'_X}{M_X}, \quad K''_X = \frac{M''_X}{M_X} - \left(\frac{M'_X}{M_X} \right)^2.$$

En 0, $M_X(0) = 1$ et les identités de moments admises dans le sujet fournissent

$$Q_1(X) = E(X), \quad Q_2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X).$$

Les moments d'ordre un et deux existent par l'admission de la partie, donc la formule de Koenig-Huygens s'applique.

- 13. a)** Posons $m = E(X)$, $A = X_1 - m$ et $B = X_2 - m$. Les variables A, B sont indépendantes, centrées, de même loi, avec $E(A^2) = E(B^2) = V(X)$ et $E(A^4) = E(B^4) = \mu_4(X)$. Les moments sont finis : pour $a, b \geq 0$, la convexité de $u \mapsto u^4$ donne $(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$, ce qui contrôle le centrage puis la différence.

En particulier, $|S|^4 = |A - B|^4 \leq 8(|A|^4 + |B|^4)$; par croissance de l'espérance, S possède un moment d'ordre quatre. On peut développer la puissance exacte

$$S^4 = A^4 - 4A^3B + 6A^2B^2 - 4AB^3 + B^4.$$

Les espérances des produits existent par indépendance et existence des moments jusqu'à l'ordre quatre. Comme $E(A) = E(B) = 0$, $E(A^3B) = E(A^3)E(B) = 0$ et $E(AB^3) = 0$. De plus $E(A^2B^2) = E(A^2)E(B^2) = V(X)^2$. Ainsi

$$E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6V(X)^2.$$

- 13. b)** Question adaptée au programme actuel : I est choisi symétrique, pour pouvoir y utiliser simultanément $M_X(t)$ et $M_X(-t)$; les dérivations successives sont guidées.

Par indépendance, pour $t \in I$, $M_S(t) = M_X(t)M_X(-t)$ et $K_S(t) = K_X(t) + K_X(-t)$. Ces expressions sont définies sur I parce qu'il est symétrique. Elles sont de classe C^4 par les règles de produit et de composition. Les fonctions génératrices des moments sont strictement positives, donc le logarithme n'introduit aucun problème de domaine.

Partons de $M'_S = K'_S M_S$. Une première dérivation donne

$$M''_S = K''_S M_S + K'_S M'_S.$$

Une deuxième dérivation, en dérivant séparément chacun des deux produits, donne

$$M^{(3)}_S = K^{(3)}_S M_S + 2K''_S M'_S + K'_S M''_S.$$

Une troisième dérivation donne les termes $K_S^{(4)}M_S + K_S^{(3)}M'_S$, puis $2K_S^{(3)}M'_S + 2K_S''M''_S$, puis $K_S''M''_S + K'_SM_S^{(3)}$. En les regroupant,

$$M_S^{(4)} = K_S^{(4)}M_S + 3K_S^{(3)}M'_S + 3K_S''M''_S + K'_SM_S^{(3)}.$$

Cette identité résulte de trois dérivations particulières de produits, sans formule générale de Leibniz ni développement limité d'ordre quatre.

- 13. c)** On a $E(S) = E(X_1) - E(X_2) = 0$, donc $M'_S(0) = 0$ et $K'_S(0) = Q_1(S) = 0$, par les identités admises et 12. De plus $M_S(0) = 1$, $M''_S(0) = E(S^2) = V(S)$ et $K''_S(0) = V(S)$.

L'identité admise entre moment et dérivée quatrième s'applique à S , puisque M_S est de classe C^4 sur I . En évaluant 13.b) en 0, les termes contenant $M'_S(0)$ et $K'_S(0)$ disparaissent. Il reste

$$E(S^4) = Q_4(S) + 3V(S)^2.$$

- 14.** Les variables X_1 et $-X_2$ sont indépendantes. Par 6.b), $Q_4(S) = Q_4(X_1) + Q_4(-X_2)$. Or 5.b) donne $K_{-X_2}(t) = K_X(-t)$; quatre dérivations fournissent $Q_4(-X_2) = Q_4(X)$. Comme X_1 et X ont la même loi, $Q_4(S) = 2Q_4(X)$.

Par indépendance et la formule de variance d'une somme,

$$V(S) = V(X_1) + V(-X_2) = 2V(X). \text{ La question 13.c) devient donc}$$

$$E(S^4) = 2Q_4(X) + 12V(X)^2. \text{ En comparant avec 13.a),}$$

$$2\mu_4(X) + 6V(X)^2 = 2Q_4(X) + 12V(X)^2.$$

On isole $Q_4(X)$ et on divise par 2 : $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3V(X)^2$, ce qui est la relation demandée.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, problème 3 : Code adapté en Python, avec documentation des tableaux, des tirages, des comparaisons et des copies. Les fonctions de l'exercice conservent la matrice d'entrée et utilisent des coefficients flottants; les décalages d'indices sont explicites.

- Exercice 3.b) i : indication de construction par opérations élémentaires inversibles pour transformer concrètement la colonne et la ligne, sans théorie abstraite de décomposition.
- Problème 7.c)-d) et 11.c) : indications pour appliquer directement Taylor-Young à des fonctions précises, à l'ordre deux uniquement, sans technique générale de calcul sur les développements limités ni prolongement automatique d'une dérivée.
- Problème 11.a) : indication permettant de justifier l'approximation normale de la loi de Poisson par stabilité des sommes et théorème limite central.
- Problème 13.b), préambule de partie III : restriction de I à un intervalle ouvert symétrique contenant 0. L'hypothèse originale assurait seulement que I contenait 0 ; sans symétrie, $-t$ peut sortir de I et l'assertion sur tout I n'est pas justifiée. La propriété admise entre dérivées et moments est explicitement applicable aux variables de la suite ; trois dérivations de produits sont guidées pour l'identité d'ordre quatre.