



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques — Option économique

2011

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

1.b) Vérifier que 1 est une valeur propre de A et déterminer un vecteur-colonne propre associé.

1.c) Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A .

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

- pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{i,j} \geq 0$;
- A admet la valeur propre 1 et $X_0 = {}^t(1, \dots, 1)$ est un vecteur-colonne propre associé.

2. L'ensemble $\mathcal{S}_n$, muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel ?

3. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n$ est une matrice de $\mathcal{S}_n$.

Soient $A \in \mathcal{S}_n$ et λ une valeur propre réelle de A .

4.a) Montrer qu'il existe un vecteur-colonne propre $V = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ associé à λ et un entier $k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $v_k = 1$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|v_i| \leq 1$.

4.b) En déduire que $|\lambda| \leq 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$.

5. Montrer que si tous les éléments diagonaux d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n$ sont strictement supérieurs à $1/2$, alors A est inversible.

Problème

Dans tout le problème, x est un réel fixé, $\alpha > 0$ et f est une fonction réelle définie et continue sur $[x - \alpha, x + \alpha]$.

Pour $0 < h \leq \alpha$, on pose

$$S_x(h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt, \quad G_x(h) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t f(x+t) dt.$$

Sous réserve d'existence, on note

$$s(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} S_x(h), \quad g(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} G_x(h).$$

L'objet du problème est l'étude d'une généralisation de la notion de dérivée à partir de fonctions définies par des intégrales. La partie III est indépendante de la partie II; la partie II est largement indépendante de la partie I.

Partie I. Quelques exemples. Premières propriétés

1.a) Calculer $\int_{-h}^h dt$, $\int_{-h}^h (x+t) dt$, $\int_{-h}^h t(x+t) dt$ et $\int_{-h}^h (x+t)^2 dt$.

1.b) Montrer que $\int_{-h}^h t(x+t)^2 dt = \frac{4h^3x}{3}$.

1.c) Établir les deux formules

$$S_x(h) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x+ht) dt, \quad G_x(h) = \frac{3}{2h} \int_{-1}^1 t f(x+ht) dt.$$

Dans la question 2 uniquement, n est un entier naturel donné et $f(t) = t^n$.

2.a) Soit k un entier naturel. Calculer, suivant la parité de k , la valeur de $h^k(1 - (-1)^k)$.

2.b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ lorsque $x = 0$.

2.c) Pour $n \geq 1$, à l'aide de la formule du binôme, montrer que

$$S_x(h) = x^n + h^2 A_x(h), \quad G_x(h) = nx^{n-1} + h^2 B_x(h),$$

où A_x et B_x sont des fonctions polynomiales en h dont les coefficients dépendent de x .
Traiter séparément le cas $n = 0$. En déduire l'existence et l'expression de $s(x)$ et de $g(x)$.

Dans la question 3 uniquement, $f(t) = |t|$ et $x = 0$.

3.a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3.b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ pour $x = 0$. En déduire l'existence et la valeur de $s(0)$ et de $g(0)$.

Dans les questions 4 à 6, on revient au cas général.

4.a) Exprimer $S_x(h)$ à l'aide d'une primitive F de f .

4.b) Établir l'existence de $s(x)$ et montrer que $s(x) = f(x)$.

Dans la question 5, on suppose f dérivable en x , de dérivée $f'(x)$.

5.a) Montrer l'existence d'une fonction v_x définie et continue sur $[-\alpha, \alpha]$, vérifiant $v_x(0) = 0$ et, pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$,

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + tv_x(t).$$

5.b) En déduire l'égalité

$$G_x(h) = f'(x) + \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt.$$

5.c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta]$, alors

$$\left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

5.d) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $f'(x)$.

Dans la question 6, $h \in]0, \alpha]$ est fixé et l'on définit sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$

$$\varphi(a, b) = \int_{-h}^h (f(x+t) - (b+at))^2 dt.$$

6.a) Établir la relation

$$\varphi(a, b) = \int_{-h}^h (f(x+t))^2 dt - 2a \int_{-h}^h t f(x+t) dt - 2b \int_{-h}^h f(x+t) dt + \frac{2h^3}{3} a^2 + 2hb^2.$$

6.b) Montrer que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (a^*, b^*) , que l'on exprimera en fonction de $S_x(h)$ et de $G_x(h)$.

Partie II. Probabilités

Les notations sont celles de la partie I. Les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note E , V et Cov l'espérance, la variance et la covariance. On suppose f dérivable en x , de dérivée $f'(x)$.

Si X est une variable aléatoire, on s'intéresse au coefficient de corrélation linéaire $r_x(h)$ entre hX et $f(hX+x)$, dans les cas particuliers qui suivent. Ce coefficient n'est défini que lorsque les deux variances sont strictement positives.

7.a) Dans la question 7 uniquement, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Rappeler $E(X)$ et $V(X)$. En déduire $E(hX)$ et $V(hX)$.

7.b) Montrer que $E(f(hX+x)) = \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x))$. Calculer $V(f(hX+x))$ et $\text{Cov}(hX, f(hX+x))$.

7.c) On suppose $f(x+h) \neq f(x)$. Calculer $r_x(h)$. En déduire l'existence d'une relation affine entre $f(hX+x)$ et hX . Expliciter cette relation en fonction de $f(x)$ et de $f(x+h)$.

7.d) Vérifier la validité de la relation précédente lorsque $f(x+h) = f(x)$; préciser alors si le coefficient de corrélation est défini.

Dans les questions 8 à 11, X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On utilisera, dans ce cas, le

transfert à partir de X pour les fonctions continues considérées, ainsi que

$$\text{Cov}(U, W) = E(UW) - E(U)E(W), \quad r(U, W) = \frac{\text{Cov}(U, W)}{\sqrt{V(U)V(W)}},$$

la seconde formule étant utilisée seulement lorsque $V(U)V(W) > 0$. Les propriétés usuelles de l'espérance et de la variance s'appliquent aux variables étudiées; il n'est pas demandé que $f(hX + x)$ possède une densité.

8.a) Rappeler une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X .

8.b) Établir les égalités

$$E(f(hX + x)) = S_x(h),$$

$$V(f(hX + x)) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (f(x+t))^2 dt - (S_x(h))^2,$$

$$\text{Cov}(hX, f(hX + x)) = \frac{h^2}{3} G_x(h).$$

Dans la question 9, on suppose $x = 0$.

9.a) Si f est paire, calculer $f'(0)$ et $r_0(h)$ lorsque ce dernier est défini. Examiner aussi le cas où f est constante sur $[-h, h]$.

9.b) Soit n un entier naturel impair et $f(t) = t^n$. Calculer $f'(0)$, $r_0(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_0(h)$.

Dans la question 10, on suppose $f'(x) \neq 0$ et $f(x) = 0$.

10.a) Montrer que $\text{Cov}(hX, f(hX + x))$ est équivalente à $\frac{h^2}{3} f'(x)$ lorsque h tend vers 0^+ .

10.b) On pose $w_x(t) = v_x(t)^2 + 2f'(x)v_x(t)$, où v_x est définie à la question 5.a). Établir

$$E(f(hX + x)) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t v_x(t) dt,$$

$$E((f(hX + x))^2) = \frac{h^2}{3} (f'(x))^2 + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt.$$

10.c) Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h t v_x(t) dt = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^3} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt = 0.$$

10.d) En déduire un équivalent de $V(f(hX + x))$ lorsque h tend vers 0^+ .

10.e) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h)$.

11. On suppose $f'(x) \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. Que peut-on dire de $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h)$?

Partie III. Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur

Dans cette partie, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel k , $f^{(k)}$ désigne sa dérivée d'ordre k , avec $f^{(0)} = f$. On confond tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ avec sa fonction polynomiale associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} (t^2 - 1)^n.$$

12.a) Calculer $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, ainsi que leurs dérivées première et seconde.

12.b) Déterminer le degré de P_n et, pour tout entier naturel k , celui de sa dérivée k -ième $P_n^{(k)}$; préciser le cas où elle est nulle.

12.c) Déterminer le terme de plus haut degré de $P_n^{(n)}(t)$ ainsi que la valeur de $P_n^{(2n)}(t)$.

12.d) Soit $n \geq 1$. Montrer que, pour $0 \leq k \leq n - 1$, on peut écrire

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2 - 1)^{n-k} T_k(t),$$

où T_k est un polynôme de degré k . En déduire $P_n^{(k)}(1)$ et $P_n^{(k)}(-1)$ pour $0 \leq k \leq n - 1$.

On pourra dériver une fois la factorisation obtenue à l'étape précédente pour construire T_{k+1} .

12.e) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

On remarquera que $1-t^2 = (1-t)(1+t)$.

Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

13.a) Montrer que
$$\int_{-1}^1 R(t)P_n^{(n)}(t) dt = - \int_{-1}^1 R'(t)P_n^{(n-1)}(t) dt.$$

13.b) En déduire
$$\int_{-1}^1 R(t)P_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_{-1}^1 R^{(n)}(t)P_n(t) dt.$$

13.c) Si R est de degré strictement inférieur à n , calculer
$$\int_{-1}^1 R(t)P_n^{(n)}(t) dt.$$

13.d) En choisissant un polynôme R particulier, calculer
$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, sous réserve d'existence,

$$L_n(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2n+1)!}{2^{n+1}h^n n!} \int_{-1}^1 f(x+ht)P_n^{(n)}(t) dt.$$

14.a) À l'aide des questions 4 et 5, vérifier que $L_0(x) = f(x)$ et $L_1(x) = f'(x)$.

14.b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^1 f(x+ht)P_n^{(n)}(t) dt = \frac{h^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x+ht)(1-t^2)^n dt.$$

14.c) En appliquant le résultat de 5.a) à la fonction $f^{(n)}$, montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 (f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x))(1-t^2)^n dt = 0.$$

En déduire l'existence et l'expression de $L_n(x)$.

On rappelle que $\alpha > 0$ est le réel défini dans le préambule. Soit $n \geq 1$ et soit Q_n un polynôme de degré inférieur ou égal à n . On pose

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^1 (f(x+\alpha t) - Q_n(t))^2 dt.$$

15.a) Montrer que $(P_0, P_1', P_2'', \dots, P_n^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On écrit alors

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(k)}(t).$$

15.b) En utilisant la question 13, établir

$$\int_{-1}^1 (Q_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2.$$

15.c) Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $y_k = \int_{-1}^1 f(x + \alpha t) P_k^{(k)}(t) dt$. Montrer que

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^1 (f(x + \alpha t))^2 dt + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} \left(a_k - \frac{2k+1}{2} y_k \right)^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} y_k^2.$$

15.d) Pour quel polynôme Q_n^* la quantité $\Phi_n(Q_n)$ est-elle minimale? Exprimer, pour $0 \leq k \leq n$, le coefficient a_k^* de Q_n^* en fonction de k et de y_k .