



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques — Option économique

2011

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1.a) La matrice A est réelle et symétrique : ses coefficients vérifient $a_{i,j} = a_{j,i}$. Le résultat du cours sur les matrices symétriques réelles s'applique ; A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

1.b) Prenons $U = {}^t(1, 1, 1)$. Chacune des lignes de A a pour somme 1, donc $AU = U$. Comme $U \neq 0$, 1 est une valeur propre et U est un vecteur propre associé.

1.c) Méthode 1 — Construire directement une base propre

Posons $V = {}^t(1, -1, 0)$ et $W = {}^t(1, 0, -1)$. Les produits donnent

$$AV = {}^t(-1/2, 1/2, 0) = -\frac{1}{2}V, \quad AW = {}^t(-1/2, 0, 1/2) = -\frac{1}{2}W.$$

Pour vérifier que (U, V, W) est libre, écrivons $aU + bV + cW = 0$. Les trois coordonnées imposent $a + b + c = 0$, $a - b = 0$ et $a - c = 0$. Ainsi $b = c = a$, puis $3a = 0$, donc $a = b = c = 0$. Cette famille de trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans cette base, A a pour matrice $\text{diag}(1, -1/2, -1/2)$. Il n'y a donc pas d'autre valeur propre :

$$\text{Sp}(A) = \{1, -1/2\}, \quad E_1 = \text{Vect}(U), \quad E_{-1/2} = \text{Vect}(V, W).$$

Méthode 2 — Séparer la somme des coordonnées

Pour $Z = {}^t(z_1, z_2, z_3)$, posons $s = z_1 + z_2 + z_3$. La multiplication s'écrit

$$AZ = \frac{s}{2}U - \frac{1}{2}Z.$$

Sur le plan $H = \{Z : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$, cette relation devient $AZ = -Z/2$. Sur $\text{Vect}(U)$, elle devient $AZ = Z$. Tout vecteur possède la décomposition explicite

$$Z = \frac{s}{3}U + \left(Z - \frac{s}{3}U\right),$$

dont le second terme appartient à H . L'intersection de ces deux sous-espaces est nulle, car la somme des coordonnées de cU est $3c$. Une base du plan H est (V, W) : tout élément (z_1, z_2, z_3) de H vaut $-z_2V - z_3W$. On retrouve les deux espaces propres et la même base propre.

La première méthode fournit rapidement une base ; la seconde explique le rôle de la somme des coordonnées, qui sera utile pour les matrices de $\mathcal{S}_n$.

2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n$, l'égalité $AX_0 = X_0$ signifie exactement que chaque ligne de A a pour somme 1. La matrice nulle ne vérifie pas cette égalité puisque $X_0 \neq 0$. Elle n'appartient donc pas à $\mathcal{S}_n$, qui n'est pas un espace vectoriel pour les lois usuelles.

3. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n$. Pour tous i, j , le coefficient

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

est une somme de produits positifs ou nuls ; il est positif ou nul. De plus,

$$(AB)X_0 = A(BX_0) = AX_0 = X_0.$$

Le vecteur X_0 est non nul, donc 1 est bien valeur propre de AB , avec le vecteur propre requis. Les deux conditions définissant $\mathcal{S}_n$ sont vérifiées : $AB \in \mathcal{S}_n$.

4.a) Question adaptée au programme actuel : on explicite le cadre des valeurs propres réelles.

Par définition d'une valeur propre réelle, il existe un vecteur réel non nul

$Z = {}^t(z_1, \dots, z_n)$ tel que $AZ = \lambda Z$. La famille finie des nombres $|z_i|$ possède un maximum strictement positif. Choisissons k tel que $|z_k| = \max_i |z_i|$ et posons $V = Z/z_k$.

La division est permise car $z_k \neq 0$. Alors $AV = \lambda V$, $v_k = 1$ et, pour tout i , $|v_i| = |z_i|/|z_k| \leq 1$. C'est le vecteur demandé.

4.b) La ligne k de $AV = \lambda V$ et l'égalité $v_k = 1$ donnent

$$\lambda = \sum_{i=1}^n a_{k,i} v_i.$$

Comme $a_{k,i} \geq 0$, $|v_i| \leq 1$ et

$$\sum_i a_{k,i} = 1,$$

l'inégalité triangulaire donne

$$|\lambda| \leq \sum_{i=1}^n a_{k,i} |v_i| \leq \sum_{i=1}^n a_{k,i} = 1.$$

En isolant le terme $i = k$, on obtient aussi

$$\lambda - a_{k,k} = \sum_{i \neq k} a_{k,i} v_i,$$

puis

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq \sum_{i \neq k} a_{k,i} |v_i| \leq \sum_{i \neq k} a_{k,i} = 1 - a_{k,k}.$$

Les deux majorations sont établies sans recherche d'un polynôme spectral.

5. Supposons A non inversible. L'application $Z \mapsto AZ$ possède alors un noyau non nul, donc 0 est une valeur propre réelle de A . La seconde inégalité de 4.b), appliquée à $\lambda = 0$, donne, pour un certain k ,

$$a_{k,k} = |0 - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}.$$

Ainsi $a_{k,k} \leq 1/2$, ce qui contredit l'hypothèse valable sur toute la diagonale. Le noyau est donc nul et la matrice carrée A est inversible.

Problème

Partie I. Quelques exemples. Premières propriétés

Toutes les intégrales de cette partie portent sur des segments et leurs intégrandes sont continues. Elles existent donc. On a toujours $h > 0$.

1.a) Sur un segment symétrique, l'intégrale d'une fonction impaire est nulle, et celle d'une fonction paire est deux fois son intégrale sur $[0, h]$. Par les primitives des puissances,

$$\int_{-h}^h dt = 2h, \quad \int_{-h}^h t dt = 0, \quad \int_{-h}^h t^2 dt = \frac{2h^3}{3}.$$

En développant les intégrandes, il vient

$$\int_{-h}^h (x + t) dt = 2hx,$$

$$\int_{-h}^h t(x + t) dt = x \int_{-h}^h t dt + \int_{-h}^h t^2 dt = \frac{2h^3}{3},$$

$$\int_{-h}^h (x + t)^2 dt = 2hx^2 + \frac{2h^3}{3}.$$

1.b) On développe $t(x + t)^2 = x^2t + 2xt^2 + t^3$. Le premier et le dernier termes sont impairs; leur intégrale est nulle. Ainsi

$$\int_{-h}^h t(x + t)^2 dt = 2x \frac{2h^3}{3} = \frac{4h^3x}{3}.$$

1.c) Effectuons le changement affine $u = ht$ dans les intégrales initiales. Comme $h > 0$, les bornes $u = -h, h$ deviennent $t = -1, 1$ et $du = h dt$. On obtient

$$S_x(h) = \frac{1}{2h} h \int_{-1}^1 f(x+ht) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x+ht) dt,$$

$$G_x(h) = \frac{3}{2h^3} h^2 \int_{-1}^1 t f(x+ht) dt = \frac{3}{2h} \int_{-1}^1 t f(x+ht) dt.$$

2.a) Si k est pair, $(-1)^k = 1$ et $h^k(1 - (-1)^k) = 0$. Si k est impair, $(-1)^k = -1$ et l'expression vaut $2h^k$. Cela inclut le cas $k = 0$, pour lequel elle est nulle.

2.b) À $x = 0$, la première intégrande est t^n et la seconde est t^{n+1} . Les primitives et la parité donnent

$$S_0(h) = \begin{cases} \frac{h^n}{n+1} & n \text{ pair,} \\ 0 & n \text{ impair,} \end{cases} \quad G_0(h) = \begin{cases} 0 & n \text{ pair,} \\ \frac{3h^{n-1}}{n+2} & n \text{ impair.} \end{cases}$$

Pour $n = 0$, f est la fonction constante 1, donc $S_0(h) = 1$ et $G_0(h) = 0$. Pour $n = 1$, $S_0(h) = 0$ et $G_0(h) = 1$; ces deux cas sont compris dans les formules précédentes.

2.c) Question adaptée au programme actuel. Le cas $n = 0$ est séparé afin de ne pas écrire nx^{n-1} en $x = 0$ avec un exposant négatif.

Pour $n \geq 1$, le binôme fournit une somme finie :

$$(x+t)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} t^j.$$

On intègre terme à terme cette somme finie. Seuls les indices pairs interviennent dans S_x , et seuls les indices impairs dans G_x :

$$S_x(h) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \text{ pair}}} \binom{n}{j} x^{n-j} \frac{h^j}{j+1},$$

$$G_x(h) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \text{ impair}}} \frac{3}{j+2} \binom{n}{j} x^{n-j} h^{j-1}.$$

Dans la première somme, le terme $j = 0$ est x^n ; tous les autres sont divisibles par h^2 .

Dans la seconde, le terme $j = 1$ est nx^{n-1} ; les autres sont également divisibles par h^2 .

Plus précisément,

$$A_x(h) = \sum_{\substack{2 \leq j \leq n \\ j \text{ pair}}} \binom{n}{j} x^{n-j} \frac{h^{j-2}}{j+1}, \quad B_x(h) = \sum_{\substack{3 \leq j \leq n \\ j \text{ impair}}} \frac{3}{j+2} \binom{n}{j} x^{n-j} h^{j-3}.$$

Une somme vide désigne le polynôme nul. Ces deux expressions sont des polynômes en h . Elles ont une limite finie en 0, donc $h^2 A_x(h)$ et $h^2 B_x(h)$ tendent vers 0. Il en résulte $s(x) = x^n$ et $g(x) = nx^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Pour $n = 0$, les intégrales de la fonction constante donnent directement $S_x(h) = 1$ et $G_x(h) = 0$, pour tout x . Ainsi $s(x) = 1$ et $g(x) = 0$. Dans tous les cas, on a $s(x) = f(x)$ et $g(x) = f'(x)$ pour les fonctions polynomiales étudiées.

3.a) Pour $t > 0$, $(|t| - |0|)/t = 1$, tandis que pour $t < 0$, ce quotient vaut -1 . Les limites à droite et à gauche sont différentes. La fonction $f(t) = |t|$ n'est donc pas dérivable en 0.

3.b) La fonction $|t|$ est paire et $t|t|$ est impaire. On obtient

$$S_0(h) = \frac{1}{2h} 2 \int_0^h t dt = \frac{h}{2}, \quad G_0(h) = 0.$$

Ces deux quantités tendent vers 0. Ainsi $s(0) = g(0) = 0$, alors que $f'(0)$ n'existe pas : l'existence de $g(x)$ n'implique pas à elle seule la dérivabilité de f en x .

4.a) Comme f est continue, elle admet une primitive F sur son intervalle de définition. Le changement de variable affine $u = x + t$ donne

$$S_x(h) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(u) du = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}.$$

4.b) Méthode 1 — Utiliser la primitive

On réécrit la formule précédente sous la forme

$$S_x(h) = \frac{1}{2} \left(\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{F(x) - F(x-h)}{h} \right).$$

La fonction F est dérivable en x , de dérivée $f(x)$. Les deux quotients tendent donc vers $f(x)$: pour le second, il s'agit du quotient de dérivation avec accroissement $-h$. Ainsi $s(x) = f(x)$.

Méthode 2 — Encadrer directement la moyenne

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x , il existe $\delta \in]0, \alpha]$ tel que $|f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$ dès que $|t| \leq \delta$. Pour $0 < h \leq \delta$,

$$|S_x(h) - f(x)| \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(x+t) - f(x)| dt \leq \varepsilon.$$

La limite vaut à nouveau $f(x)$. La première preuve exploite la question précédente ; la seconde montre directement comment la continuité contrôle une moyenne sur un petit intervalle.

5.a) Question adaptée au programme actuel. Le domaine de v_x est limité à $[-\alpha, \alpha]$, car le préambule ne définit $f(x+t)$ que sur ce domaine en t .

Pour $t \neq 0$ dans cet intervalle, posons

$$v_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x), \quad v_x(0) = 0.$$

La fonction est continue pour $t \neq 0$, par continuité de f et parce que le dénominateur ne s'annule pas. La dérivabilité de f en x signifie exactement que la première fraction tend vers $f'(x)$ lorsque $t \rightarrow 0$. Ainsi $v_x(t) \rightarrow 0 = v_x(0)$: v_x est continue aussi en 0.

En multipliant sa définition par t , on obtient l'égalité demandée pour $t \neq 0$. Pour $t = 0$, elle se réduit à $f(x) = f(x)$; elle est donc vraie sur tout l'intervalle.

5.b) On multiplie l'égalité de 5.a) par t et on intègre :

$$\int_{-h}^h t f(x+t) dt = f(x) \int_{-h}^h t dt + f'(x) \int_{-h}^h t^2 dt + \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt.$$

Les deux intégrales élémentaires valent respectivement 0 et $2h^3/3$. Après multiplication par $3/(2h^3)$, il reste

$$G_x(h) = f'(x) + \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt.$$

5.c) Puisque v_x est continue en 0 et y vaut 0, il existe $\delta \in]0, \alpha]$ tel que $|v_x(t)| \leq \varepsilon$ pour $|t| \leq \delta$. Si $0 < h \leq \delta$,

$$\left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt \right| \leq \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t^2 |v_x(t)| dt \leq \frac{3\varepsilon}{2h^3} \frac{2h^3}{3} = \varepsilon.$$

C'est la majoration demandée, avec un δ indépendant de h .

5.d) La différence $G_x(h) - f'(x)$ tend vers 0 d'après 5.b) et 5.c). Par conséquent, $g(x)$ existe et $g(x) = f'(x)$.

6.a) Développons le carré :

$$(f(x+t) - (b+at))^2 = (f(x+t))^2 - 2bf(x+t) - 2atf(x+t) + b^2 + 2abt + a^2t^2.$$

L'intégrale de $2abt$ est nulle. Celles des deux derniers termes utiles sont $2hb^2$ et $2h^3a^2/3$. La linéarité de l'intégrale donne donc exactement

$$\varphi(a, b) = \int_{-h}^h (f(x+t))^2 dt - 2a \int_{-h}^h tf(x+t) dt - 2b \int_{-h}^h f(x+t) dt + \frac{2h^3}{3} a^2 + 2hb^2.$$

6.b) Question adaptée au programme actuel pour le préambule : la nature ouverte du domaine est indiquée.

Posons $J_0 = \int_{-h}^h f(x+t) dt$, $J_1 = \int_{-h}^h tf(x+t) dt$ et $C = \int_{-h}^h (f(x+t))^2 dt$. Ces trois nombres sont finis et ne dépendent pas de (a, b) . L'expression obtenue en 6.a) est donc un polynôme en (a, b) ; elle est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

Son gradient est

$$\nabla \varphi(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{4h^3}{3}a - 2J_1 \\ 4hb - 2J_0 \end{pmatrix}.$$

Comme $h > 0$, son annulation équivaut à $a = 3J_1/(2h^3)$ et $b = J_0/(2h)$. Le point critique est donc unique :

$$(a^*, b^*) = (G_x(h), S_x(h)).$$

La hessienne, constante, est $\nabla^2 \varphi = \text{diag}(4h^3/3, 4h)$. Ses deux valeurs propres sont strictement positives. Cela confirme en particulier le caractère non dégénéré du point critique, et donne un minimum local strict. La comparaison directe

$$\varphi(a, b) - \varphi(a^*, b^*) = \frac{2h^3}{3}(a - a^*)^2 + 2h(b - b^*)^2$$

montre même que ce point est l'unique minimum global. Ce complément résulte ici du polynôme explicite, sans dériver sous une intégrale.

Partie II. Probabilités

Pour chaque $h \in]0, \alpha]$, la continuité de f sur le segment $[x - h, x + h]$ implique qu'elle y est bornée. Les variables hX et $f(hX + x)$ sont donc bornées dans tous les cas étudiés. Leurs espérances, leurs moments d'ordre deux et l'espérance de leur produit existent. Les calculs de covariance et de variance qui suivent sont ainsi justifiés avant leur utilisation.

7.a) Pour une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, $E(X) = 1/2$ et $V(X) = (1/2)(1 - 1/2) = 1/4$. Les propriétés des transformations affines donnent

$$E(hX) = \frac{h}{2}, \quad V(hX) = \frac{h^2}{4}.$$

Cette variance est strictement positive puisque $h > 0$.

7.b) Écrivons $a = f(x)$ et $b = f(x + h)$. La variable $Y = f(hX + x)$ vaut a lorsque $X = 0$ et b lorsque $X = 1$, chaque événement ayant probabilité $1/2$. Le transfert sur cette loi finie donne

$$E(Y) = \frac{a + b}{2}, \quad E(Y^2) = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Par la formule de Koenig-Huygens,

$$V(Y) = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{(b - a)^2}{4}.$$

Le produit hXY vaut 0 si $X = 0$ et hb si $X = 1$. Ainsi $E(hXY) = hb/2$, d'où

$$\text{Cov}(hX, Y) = \frac{hb}{2} - \frac{h}{2} \frac{a + b}{2} = \frac{h(b - a)}{4}.$$

Cela fournit les trois expressions demandées, même lorsque $a = b$.

7.c) L'hypothèse $b \neq a$ assure $V(Y) > 0$. La corrélation est alors définie et

$$r_x(h) = \frac{h(b - a)/4}{\sqrt{(h^2/4)((b - a)^2/4)}} = \frac{b - a}{|b - a|}.$$

Elle vaut donc 1 si $f(x + h) > f(x)$ et -1 si $f(x + h) < f(x)$.

Pour déterminer la relation affine, vérifions directement les deux seules valeurs de X .

Pour $X = 0$ comme pour $X = 1$, on a $Y = a + (b - a)X$. Par conséquent,

$$f(hX + x) = f(x) + \frac{f(x + h) - f(x)}{h} hX.$$

La relation affine est donc vérifiée dans les deux événements, dont la réunion est l'univers.

7.d) Question adaptée au programme actuel : on précise le domaine de définition du coefficient.

Si $b = a$, $Y = a$ est constante et la relation affine précédente reste vraie avec un coefficient directeur nul. En revanche, $V(Y) = 0$; la formule de $r_x(h)$ aurait un dénominateur nul. Le coefficient de corrélation n'est donc pas défini dans ce cas.

8.a) Pour X uniforme sur $[-1, 1]$, on peut choisir la densité

$$p_X(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq u \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs de la densité aux deux bornes n'ont pas d'effet sur la loi. Cette densité a bien des limites latérales finies en tout point. Sa fonction de répartition est

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & u < -1, \\ \frac{u+1}{2} & -1 \leq u \leq 1, \\ 1 & u > 1. \end{cases}$$

La formule de la loi uniforme donne $E(X) = 0$ et $V(X) = (1 - (-1))^2/12 = 1/3$. On peut également les vérifier par $E(X) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u \, du = 0$ et $E(X^2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2 \, du = 1/3$.

8.b) Question adaptée au programme actuel pour le préambule de calcul : les moments sont obtenus par transfert à partir de la variable uniforme, sans supposer que sa transformée par f possède une densité.

Pour $Y = f(hX + x)$, le transfert est applicable à $u \mapsto f(hu + x)$ et à son carré, qui sont continus et bornés sur $[-1, 1]$. Le changement affine $t = hu$ donne

$$E(Y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(hu + x) \, du = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x + t) \, dt = S_x(h),$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (f(x + t))^2 \, dt.$$

Koenig-Huygens fournit alors

$$V(Y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (f(x+t))^2 dt - (S_x(h))^2.$$

Enfin, $E(hX) = 0$, donc la covariance est simplement $E(hXY)$. Le transfert, puis le même changement de variable, donnent

$$\text{Cov}(hX, Y) = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 u f(hu + x) du = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t f(x+t) dt = \frac{h^2}{3} G_x(h).$$

Aucune indépendance entre hX et Y n'est utilisée ; ces variables sont toutes deux des fonctions de X .

9.a) Question adaptée au programme actuel : le cas de variance nulle doit être distingué.

Comme f est paire et dérivable en 0, pour $t \neq 0$,

$$\frac{f(-t) - f(0)}{-t} = -\frac{f(t) - f(0)}{t}.$$

Les deux quotients ont la même limite $f'(0)$ lorsque $t \rightarrow 0$. Ainsi $f'(0) = -f'(0)$ et $f'(0) = 0$.

La fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire, donc $G_0(h) = 0$. D'après 8.b), $\text{Cov}(hX, f(hX)) = 0$. Puisque $V(hX) = h^2/3 > 0$, on conclut $r_0(h) = 0$ lorsque $V(f(hX)) > 0$.

Si f est constante sur $[-h, h]$, alors $f(hX)$ est constante et sa variance est nulle ; $r_0(h)$ n'est pas défini. Réciproquement, si cette variance est nulle, la fonction continue $(f(t) - S_0(h))^2$, positive ou nulle, a une intégrale nulle sur $[-h, h]$. Elle est identiquement nulle : sinon, la continuité donnerait un petit intervalle sur lequel son intégrale est strictement positive. Ainsi f est constante sur ce segment. Cette distinction traite tous les cas.

9.b) L'entier impair n est au moins égal à 1. Pour $n = 1$, $f'(0) = 1$; pour $n \geq 3$, $f'(0) = 0$.

Par symétrie, $E((hX)^n) = 0$. Le transfert des puissances donne

$$V((hX)^n) = E((hX)^{2n}) = \frac{h^{2n}}{2n+1} > 0.$$

De même, $E(hX) = 0$ et

$$\text{Cov}(hX, (hX)^n) = E((hX)^{n+1}) = \frac{h^{n+1}}{n+2},$$

car $n+1$ est pair. Avec $V(hX) = h^2/3$, on obtient

$$r_0(h) = \frac{h^{n+1}/(n+2)}{(h/\sqrt{3})(h^n/\sqrt{2n+1})} = \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2}.$$

Cette expression ne dépend pas de h , donc sa limite en 0^+ est le même nombre. Pour $n=1$, elle vaut 1; pour les autres entiers impairs, la dérivée est nulle mais la corrélation limite reste strictement positive.

10.a) La question 5.d) donne $G_x(h) \rightarrow f'(x)$. Puisque $f'(x) \neq 0$, la formule de 8.b) conduit au quotient

$$\frac{\text{Cov}(hX, f(hX+x))}{h^2 f'(x)/3} = \frac{G_x(h)}{f'(x)} \rightarrow 1.$$

Ainsi $\text{Cov}(hX, f(hX+x)) \sim h^2 f'(x)/3$. Le signe de $f'(x)$ peut être positif ou négatif; il n'empêche pas cet équivalent.

10.b) Notons $c = f'(x) \neq 0$. Comme $f(x) = 0$, 5.a) donne $f(x+t) = ct + tv_x(t)$.

L'intégrale du terme ct sur $[-h, h]$ est nulle, d'où, par 8.b),

$$E(f(hX+x)) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h tv_x(t) dt.$$

En élevant l'égalité au carré,

$$(f(x+t))^2 = c^2 t^2 + t^2(v_x(t)^2 + 2cv_x(t)) = c^2 t^2 + t^2 w_x(t).$$

Le transfert donne ensuite

$$E((f(hX+x))^2) = \frac{c^2}{2h} \frac{2h^3}{3} + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt = \frac{h^2 c^2}{3} + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt.$$

La fonction w_x est continue et $w_x(0) = 0$, puisque v_x possède ces propriétés.

10.c) On utilise séparément les deux continuités en 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, si h est assez petit, $|v_x(t)| \leq \varepsilon$ pour $|t| \leq h$. Alors

$$\left| \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h t v_x(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{h^2} \int_{-h}^h |t| dt = \varepsilon.$$

Cette expression tend donc vers 0. De même, pour h assez petit, $|w_x(t)| \leq \varepsilon$ sur $[-h, h]$, et

$$\left| \frac{1}{h^3} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{h^3} \frac{2h^3}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

L'arbitraire de ε montre que la seconde expression tend aussi vers 0. On n'a échangé aucune limite avec une intégrale.

10.d) La première limite de 10.c) et 10.b) donnent $E(f(hX + x)) = o(h)$, donc $(E(f(hX + x)))^2 = o(h^2)$. La seconde donne

$$E((f(hX + x))^2) = \frac{h^2 c^2}{3} + o(h^2).$$

Il s'ensuit, par Koenig-Huygens,

$$V(f(hX + x)) = \frac{h^2 c^2}{3} + o(h^2) \sim \frac{h^2}{3} (f'(x))^2.$$

Le coefficient $c^2/3$ est strictement positif. En particulier, la variance est strictement positive pour tout $h > 0$ assez petit, ce qui justifie l'utilisation de la corrélation dans la question suivante.

10.e) Avec $V(hX) = h^2/3$ et l'équivalent précédent, la positivité des variances donne

$$\sqrt{V(hX)V(f(hX + x))} \sim \frac{h^2}{3} |f'(x)|.$$

En divisant l'équivalent de 10.a) par celui-ci, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h) = \frac{f'(x)}{|f'(x)|} = \begin{cases} 1 & f'(x) > 0, \\ -1 & f'(x) < 0. \end{cases}$$

La valeur absolue au dénominateur est nécessaire, même lorsque la dérivée est négative.

11. Posons $\tilde{f}(u) = f(u) - f(x)$. Cette fonction est continue sur le même segment, dérivable en x , et $\tilde{f}(x) = 0$, $\tilde{f}'(x) = f'(x) \neq 0$. Les résultats de 10 s'appliquent donc à $\tilde{f}$.

Soustraire une constante ne change ni la variance ni la covariance avec hX :

$$V(\tilde{f}(hX + x)) = V(f(hX + x)), \quad \text{Cov}(hX, \tilde{f}(hX + x)) = \text{Cov}(hX, f(hX + x)).$$

Les deux coefficients de corrélation sont donc égaux dès qu'ils sont définis. Celui de $\tilde{f}$ l'est pour $h > 0$ assez petit d'après 10.d). Par conséquent,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h) = \frac{f'(x)}{|f'(x)|}.$$

La valeur non nulle de $f'(x)$ n'influence pas cette limite.

Partie III. Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur

Les dérivations de cette partie portent sur les polynômes explicitement donnés ou sur la fonction C^∞ du préambule. Les limites seront établies par des intégrations par parties sur le segment $[-1, 1]$ et par des majorations. Aucun développement limité d'ordre supérieur n'est nécessaire.

12.a) On développe seulement les trois polynômes demandés :

$$P_0(t) = 1, \quad P'_0(t) = P''_0(t) = 0;$$

$$P_1(t) = \frac{t^2 - 1}{2}, \quad P'_1(t) = t, \quad P''_1(t) = 1;$$

$$P_2(t) = \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{8}, \quad P'_2(t) = \frac{t^3 - t}{2}, \quad P''_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

12.b) Question adaptée au programme actuel : le cas où la dérivée est nulle est explicité.

Le terme dominant de P_n est $t^{2n}/(2^n n!)$, de coefficient non nul. Donc $\deg P_n = 2n$, y compris pour $n = 0$.

Chaque dérivation d'un polynôme de degré positif diminue son degré de 1 : le terme de plus haut degré ne disparaît pas tant que son exposant est positif. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 2n$,

$$\deg P_n^{(k)} = 2n - k.$$

Pour $k > 2n$, la dérivée est le polynôme nul, auquel on attribue, avec la convention usuelle, le degré $-\infty$. Cette précision couvre notamment $n = 0$, où toutes les dérivées d'ordre au moins 1 sont nulles.

12.c) En dérivant successivement n fois le terme $t^{2n}/(2^n n!)$, son coefficient est multiplié par $(2n)(2n-1)\cdots(n+1) = (2n)!/n!$. Le terme dominant de $P_n^{(n)}$ est donc

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} t^n.$$

En dérivant $2n$ fois P_n , tous les termes de degré inférieur à $2n$ s'annulent; il reste la constante

$$P_n^{(2n)}(t) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Pour $n = 0$, les deux résultats redonnent bien $P_0 = 1$.

12.d) Question adaptée au programme actuel : la construction par une dérivation à chaque étape évite de supposer une formule générale de dérivation d'un produit à un ordre quelconque.

Pour $k = 0$, la factorisation est vraie avec $T_0(t) = 1/(2^n n!)$, de degré 0. Supposons obtenue une factorisation pour un indice $k < n$. Une seule dérivation, utilisant la règle du produit, donne

$$P_n^{(k+1)}(t) = (t^2 - 1)^{n-k-1} (2(n-k)tT_k(t) + (t^2 - 1)T_k'(t)).$$

On peut donc poser

$$T_{k+1}(t) = 2(n-k)tT_k(t) + (t^2 - 1)T_k'(t).$$

Si T_k est de degré k et de coefficient dominant $c_k \neq 0$, le coefficient de t^{k+1} dans T_{k+1} est $(2(n-k) + k)c_k = (2n-k)c_k$. Il est non nul pour $k < n$, donc T_{k+1} est bien de degré $k+1$. La récurrence établit la factorisation demandée.

Pour $0 \leq k \leq n-1$, l'exposant $n-k$ est au moins égal à 1. Le facteur $(t^2 - 1)^{n-k}$ s'annule donc en $t = 1$ et en $t = -1$. Ainsi

$$P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0 \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

12.e) Méthode 1 — Utiliser la factorisation indiquée

Écrivons $I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$. Le changement affine $t = 2u - 1$ donne $1 - t^2 = 4u(1-u)$ et $dt = 2 du$, donc

$$I_n = 2^{2n+1} \int_0^1 u^n (1-u)^n du.$$

Pour des entiers $p, q \geq 0$, posons $B_{p,q} = \int_0^1 u^p (1-u)^q du$. Il ne s'agit ici que d'une notation pour une intégrale de polynôme. Si $q \geq 1$, une intégration par parties, avec la primitive $u^{p+1}/(p+1)$, fournit

$$B_{p,q} = \left[\frac{u^{p+1}}{p+1} (1-u)^q \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 u^{p+1} (1-u)^{q-1} du = \frac{q}{p+1} B_{p+1,q-1}.$$

Les termes de bord sont nuls. En répétant cette relation n fois et en utilisant

$B_{2n,0} = 1/(2n+1)$, on obtient, pour $n \geq 1$,

$$B_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} \frac{1}{2n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Pour $n = 0$, $B_{0,0} = 1$ et la même formule est vraie. Par conséquent,

$$I_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Méthode 2 — Établir une récurrence entre les intégrales

Pour $n \geq 1$, la fonction $t(1-t^2)^n$ s'annule aux deux bornes du segment. En intégrant sa dérivée, on obtient

$$0 = \int_{-1}^1 ((1-t^2)^n - 2nt^2(1-t^2)^{n-1}) dt.$$

Or $t^2(1-t^2)^{n-1} = (1-t^2)^{n-1} - (1-t^2)^n$. Ainsi $0 = I_n - 2n(I_{n-1} - I_n)$, soit

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

Comme $I_0 = 2$, on en déduit

$$I_n = 2 \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1} = \frac{2^{n+1}n!}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

La première méthode suit l'indication et traite un produit de puissances ; la seconde réduit chaque intégrale à la précédente et donne une vérification indépendante de la constante.

13.a) Les fonctions R et $P_n^{(n-1)}$ sont des polynômes, donc de classe C^1 sur le segment. Une intégration par parties donne

$$\int_{-1}^1 R(t) P_n^{(n)}(t) dt = [R(t) P_n^{(n-1)}(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 R'(t) P_n^{(n-1)}(t) dt.$$

Le terme de bord est nul, car $P_n^{(n-1)}(1) = P_n^{(n-1)}(-1) = 0$ d'après 12.d). L'égalité demandée en résulte.

13.b) On répète l'opération en transférant une dérivation de P_n vers R . Après j opérations, pour $0 \leq j \leq n$, on a

$$\int_{-1}^1 R(t) P_n^{(n)}(t) dt = (-1)^j \int_{-1}^1 R^{(j)}(t) P_n^{(n-j)}(t) dt.$$

L'initialisation $j = 0$ est l'égalité elle-même. Si $j < n$, une nouvelle intégration par parties donne cette formule à l'indice $j + 1$: le terme de bord contient $P_n^{(n-j-1)}$, nul en -1 et 1 puisque $0 \leq n - j - 1 \leq n - 1$. Toutes les fonctions sont des polynômes, donc les opérations sont permises. Pour $j = n$, on obtient

$$\int_{-1}^1 R(t) P_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_{-1}^1 R^{(n)}(t) P_n(t) dt.$$

13.c) Si $\deg R < n$, alors $R^{(n)}$ est nul. Le membre de droite de 13.b) est donc nul, d'où

$$\int_{-1}^1 R(t) P_n^{(n)}(t) dt = 0.$$

Le résultat vaut aussi pour le polynôme nul.

13.d) Prenons $R = P_n^{(n)}$, polynôme de degré n . Sa dérivée d'ordre n est $P_n^{(2n)} = (2n)!/(2^n n!)$ d'après 12.c). Par 13.b),

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n(t) dt.$$

Or $P_n(t) = (-1)^n (1 - t^2)^n / (2^n n!)$. Les deux signes se compensent et, avec 12.e),

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

Le résultat demandé est donc $2/(2n+1)$. Il est également vrai pour $n=0$, car

$$\int_{-1}^1 P_0(t)^2 dt = 2; \text{ ce cas servira en 15.}$$

14.a) Pour $n=0$, $P_0^{(0)} = 1$ et le facteur multiplicatif vaut $1/2$. D'après 1.c), l'expression dont on prend la limite est $S_x(h)$. La question 4.b) donne donc $L_0(x) = f(x)$.

Pour $n=1$, $P_1'(t) = t$ et le facteur vaut $3!/(2^2 h) = 3/(2h)$. L'expression est alors $G_x(h)$, encore d'après 1.c). La question 5.d), applicable puisque f est C^∞ , fournit $L_1(x) = f'(x)$.

14.b) Pour $n=0$, l'identité est immédiate. Supposons $n \geq 1$. La fonction $t \mapsto f(x+ht)$ est C^∞ sur $[-1, 1]$ et sa dérivée d'ordre j est $h^j f^{(j)}(x+ht)$, ce que l'on établit par la règle de dérivation d'une composée, à chaque étape.

On reprend alors les n intégrations par parties de 13.b), cette fois avec cette fonction à la place du polynôme R . Elles restent légitimes, puisque toutes les dérivées nécessaires sont continues. À chaque étape, le terme de bord contient une dérivée de P_n d'ordre inférieur à n ; il est nul par 12.d). On obtient

$$\int_{-1}^1 f(x+ht) P_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n h^n \int_{-1}^1 f^{(n)}(x+ht) P_n(t) dt.$$

En remplaçant $P_n(t)$ par $(-1)^n(1-t^2)^n/(2^n n!)$, les signes se compensent. Ainsi

$$\int_{-1}^1 f(x+ht)P_n^{(n)}(t) dt = \frac{h^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x+ht)(1-t^2)^n dt.$$

14.c) Méthode 1 — Appliquer la décomposition de 5.a)

La fonction $f^{(n)}$ est dérivable en x . Le résultat de 5.a), appliqué sur un intervalle autour de x , donne une fonction v continue en 0, avec $v(0) = 0$, telle que, pour u assez proche de 0,

$$f^{(n)}(x+u) - f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x)u + uv(u).$$

Prenons $u = ht$ avec $-1 \leq t \leq 1$ et $h > 0$ assez petit. La fonction $t(1-t^2)^n$ est impaire ; son intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle. Par conséquent,

$$\int_{-1}^1 (f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x))(1-t^2)^n dt = h \int_{-1}^1 tv(ht)(1-t^2)^n dt.$$

Par continuité de v en 0, on peut choisir h assez petit pour avoir $|v(ht)| \leq 1$ pour tout $t \in [-1, 1]$. Le membre de droite a alors une valeur absolue au plus égale à

$$h \int_{-1}^1 |t|(1-t^2)^n dt \leq h \int_{-1}^1 |t| dt = h,$$

qui tend vers 0. Cela prouve la limite imposée par la question.

Méthode 2 — Utiliser seulement la continuité de la dérivée considérée

Pour tout $\varepsilon > 0$, la continuité de $f^{(n)}$ en x donne $\delta > 0$ tel que $|f^{(n)}(x+u) - f^{(n)}(x)| \leq \varepsilon$ si $|u| \leq \delta$. Pour $0 < h \leq \delta$ et $|t| \leq 1$, on a $|ht| \leq \delta$. La valeur absolue de l'intégrale de la question est donc majorée par

$$\varepsilon \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \varepsilon I_n.$$

Le nombre I_n est fini et ne dépend pas de h ; la limite est donc nulle. Cette seconde preuve montre que, pour cette étape, la continuité de $f^{(n)}$ suffit; la première suit la méthode demandée en réutilisant 5.a).

Il reste à identifier $L_n(x)$. D'après 14.b), l'expression qui le définit se réécrit

$$\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x+ht)(1-t^2)^n dt.$$

La limite que nous venons d'établir montre que l'intégrale tend vers $f^{(n)}(x)I_n$. La formule de 12.e) donne

$$\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2} I_n = 1.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n(x)$ existe et $L_n(x) = f^{(n)}(x)$. Cette preuve construit le résultat particulier par intégrations par parties et majorations, sans utiliser une formule générale de développement limité à l'ordre n .

15.a) Posons $H_k = P_k^{(k)}$. D'après 12.c), H_k est de degré k , avec un coefficient dominant non nul, pour tout $0 \leq k \leq n$.

Supposons

$$\sum_{k=0}^n c_k H_k = 0.$$

Si un coefficient est non nul, soit j le plus grand indice tel que $c_j \neq 0$. Le terme de degré j de cette somme provient uniquement de $c_j H_j$ et son coefficient est non nul. La somme ne peut donc pas être le polynôme nul : contradiction. Tous les c_k sont nuls et la famille est libre.

Elle possède $n+1$ éléments dans l'espace concret $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension $n+1$. C'est donc une base, et tout Q_n y admet une unique écriture

$$Q_n = \sum_{k=0}^n a_k H_k.$$

15.b) Commençons par les intégrales des produits. Si $0 \leq j < k \leq n$, alors $\deg H_j = j < k$. En appliquant 13.c) à $R = H_j$ et à l'entier $k \geq 1$, on obtient

$$\int_{-1}^1 H_j(t) H_k(t) dt = 0.$$

Le résultat vaut aussi si $k < j$, en échangeant les deux facteurs. Enfin, 13.d) donne

$\int_{-1}^1 H_k(t)^2 dt = 2/(2k+1)$ pour $k \geq 1$, et le cas $k = 0$ donne directement l'intégrale de 1, soit 2.

Le développement du carré est une somme finie :

$$\int_{-1}^1 Q_n(t)^2 dt = \sum_{k=0}^n a_k^2 \int_{-1}^1 H_k(t)^2 dt + 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n} a_j a_k \int_{-1}^1 H_j(t) H_k(t) dt.$$

La seconde somme est nulle. Il reste exactement

$$\int_{-1}^1 Q_n(t)^2 dt = \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2.$$

Le calcul repose uniquement sur les intégrales précédentes, sans faire appel à une théorie supplémentaire sur les espaces polynomiaux.

15.c) Toutes les intégrales existent : la fonction $f(x + \alpha t)$ est continue sur $[-1, 1]$, et les H_k sont des polynômes. Notons $C = \int_{-1}^1 (f(x + \alpha t))^2 dt$. En développant le carré puis en utilisant 15.b) et les définitions des y_k ,

$$\Phi_n(Q_n) = C - 2 \sum_{k=0}^n a_k y_k + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2.$$

Pour chaque k , l'identité de complétion du carré est

$$\frac{2}{2k+1} a_k^2 - 2a_k y_k = \frac{2}{2k+1} \left(a_k - \frac{2k+1}{2} y_k \right)^2 - \frac{2k+1}{2} y_k^2.$$

En sommant ces identités finies et en ajoutant C , on obtient la formule demandée :

$$\Phi_n(Q_n) = C + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} \left(a_k - \frac{2k+1}{2} y_k \right)^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} y_k^2.$$

15.d) Les nombres C et y_k sont fixés par f , x et α . Dans 15.c), les seuls termes dépendant de Q_n sont les carrés, dont les coefficients $2/(2k+1)$ sont strictement positifs.

La somme atteint sa plus petite valeur, 0, exactement lorsque tous ces carrés s'annulent. Les coefficients minimisants sont donc, de manière unique,

$$a_k^* = \frac{2k+1}{2} y_k \quad (0 \leq k \leq n).$$

L'unicité des coordonnées dans la base de 15.a) donne l'unique polynôme minimisant :

$$Q_n^*(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} y_k P_k^{(k)}(t).$$

La valeur minimale est

$$C - \sum_{k=0}^n (2k+1) y_k^2 / 2.$$

Il s'agit bien d'un minimum global, puisque chaque autre choix de coefficients ajoute une somme de carrés positifs ou nuls. Cette démonstration n'utilise pas de calcul différentiel dans un espace de dimension supérieure à deux.

Relevé des adaptations

- Exercice 4 : la valeur propre considérée est explicitement réelle, conformément au cadre de réduction matricielle demandé ; tous les arguments restent dans $\mathbb{R}^n$.

- Problème 2.c) : le cas $n = 0$ est traité séparément ; cela évite l'expression indéfinie nx^{n-1} lorsque $n = 0$ et $x = 0$, tout en conservant l'étude de tous les entiers naturels.
- Problème 5.a) : domaine de v_x et de l'égalité limité à $[-\alpha, \alpha]$. Le préambule original ne définit f que sur $[x - \alpha, x + \alpha]$, alors que cette question annonçait une égalité pour tout réel t .
- Problème 6, préambule : le domaine $\mathbb{R}^2$ est indiqué comme ouvert ; le corrigé utilise gradient, hessienne diagonale et comparaison directe.
- Problème 7.d), préambule de 8 et 9.a) : conditions de définition de la corrélation explicitées, cas de variance nulle conservés et traités. Les moments des fonctions de la variable uniforme sont calculés par transfert à partir de celle-ci, sans supposer que chaque fonction transformée possède une densité.
- Problème 12.b) : cas de la dérivée polynomiale nulle précisé lorsque $k > 2n$.
- Problème 12.d) : indication de récurrence par une dérivation à chaque étape, pour ne pas supposer de formule générale de dérivation à un ordre quelconque.