



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques — Option économique

2010

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. On confond un polynôme de E et la fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$.

Soit d l'application définie sur E qui, à tout polynôme P , associe le polynôme $d(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P .

1. Rappeler sans démonstration la dimension de E et la base canonique $\mathcal{B}$ de E .
2. Montrer que d est un endomorphisme de E et donner la matrice associée à d dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer le noyau de d , $\text{Ker } d$, et l'image de d , $\text{Im } d$, ainsi que leurs dimensions respectives.
4. Déterminer les valeurs propres de d ainsi que les polynômes propres associés.
L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

On désigne par $(d^k)_{k \geq 0}$ la suite d'endomorphismes de E définie par $d^0 = I$, où I représente l'endomorphisme identité, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d^{k+1} = d^k \circ d$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } d^k$ désigne le noyau de d^k .

- 5.a) Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, le sous-espace $\text{Ker } d^k$ ainsi que sa dimension. Vérifier que, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $d(\text{Ker } d^k) \subset \text{Ker } d^k$.
 - 5.b) Soit P un polynôme de degré r , avec $r \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Montrer que la famille $(d^k(P))_{0 \leq k \leq r}$ est libre.
6. Dans cette question, on cherche à déterminer les sous-espaces vectoriels F de E tels que $d(F) \subset F$.
 - 6.a) On suppose que $\dim F = 1$. Montrer que F est un sous-espace propre de d . En déduire F .

6.b) On suppose que $\dim F = 2$. Montrer qu'il existe dans F un polynôme P de degré supérieur ou égal à 1. En déduire F .

6.c) On suppose que $\dim F = 3$. On note $\tilde{d}$ l'endomorphisme de F défini, pour tout $P \in F$, par $\tilde{d}(P) = d(P)$. Montrer que $(\tilde{d})^3 = 0$. En déduire F .

Problème

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X , et $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y .

Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X .

On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas des variables aléatoires à densité.

Pour un entier $n \geq 2$, on dit que les variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes si, pour tout n -uplet $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leq u_1], \dots, [X_n \leq u_n]$ sont indépendants.

L'objet du problème est double : d'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométrique et exponentielle ; d'autre part, mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle.

La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1.a) Rappeler la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

On pose alors $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . En déduire la valeur de I_n en fonction de n .

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ , d'espérance $1/\lambda$.

On pose $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

3.a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq x])$, pour tout réel x .

3.b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

4. Déterminer, pour tout réel z , $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

5.a) Montrer que, pour tout réel t :

$$F_T(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^2 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Exprimer, pour tout réel t , $f_T(t)$.

5.b) Justifier l'existence de $E(T)$ et de $V(T)$. Montrer que $E(T) = 3/(2\lambda)$ et $V(T) = 5/(4\lambda^2)$. On pourra utiliser des changements de variables affines.

6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T . Montrer que $r = 1/\sqrt{5}$.

7.a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.

7.b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.

7.c) Montrer que, pour tout réel y , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)f_{-X_2}(y-t) dt$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$. On distinguera les deux cas $y \geq 0$ et $y < 0$.

7.d) Établir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y .

7.e) Déterminer, pour tout réel y , $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie II. Loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p , d'espérance $1/p$.

On pose $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

8.a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq k])$, pour tout $k \in X_1(\Omega)$.

8.b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(X_1 - X_2)$ et $V(X_1 - X_2)$.

8.c) Établir la relation $P([X_1 = X_2]) = p/(1 + q)$.

9.a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.

9.b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$. En déduire la relation $P([T = k]) = 2P([X_1 = k]) - P([Z = k])$.

9.c) Établir la formule $V(T) = \frac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.

10.a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des événements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$. En déduire, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $P([Z = j] \cap [Z = T])$.

10.b) Montrer que, pour tout couple $(j, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P([Z = j] \cap [T - Z = \ell]) = 2p^2 q^{2j+\ell-2}$.

10.c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P([X_1 - X_2 = k]) = \frac{pq^{|k|}}{1+q}$. On distinguera trois cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.

10.d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

10.e) Établir, à l'aide des questions précédentes, que les variables aléatoires Z et $T - Z$ sont indépendantes.

11.a) À l'aide du résultat de la question 10.e), calculer $\text{Cov}(Z, T)$. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

11.b) Calculer, en fonction de q , le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T .

11.c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T) .

11.d) Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'événement $[Z = j]$.

11.e) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j , à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'événement $[Z = j]$. Calculer $E(D_j)$.

Partie III. Convergences

Dans les questions 12 à 15, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

et $J_n = \lambda S_n$.

12. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(J_n)$ et $V(J_n)$.

13. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par :

$$f_{J_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

13.a) À l'aide du théorème de transfert, établir, pour tout entier $n \geq 3$, l'existence de $E(1/J_n)$ et de $E(1/J_n^2)$; donner leurs valeurs respectives.

13.b) On pose, pour tout entier $n \geq 3$, $\hat{\lambda}_n = n/S_n$. Justifier que $\hat{\lambda}_n$ est un estimateur de λ . Est-il sans biais? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\hat{\lambda}_n$.

Pour cette question, le biais d'un estimateur A_n de λ est $E(A_n) - \lambda$; il est sans biais lorsque cette différence est nulle. Son risque quadratique est $E((A_n - \lambda)^2)$, sous réserve d'existence.

14. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α , avec $0 < \alpha < 1$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha/2$.

Un intervalle aléatoire est dit asymptotiquement de niveau de confiance $1 - \alpha$ si la probabilité qu'il contienne le paramètre tend vers $1 - \alpha$ lorsque n tend vers l'infini.

14.a) Énoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire $N_n = \lambda S_n / \sqrt{n} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

14.b) En déduire que, pour n assez grand, on a approximativement

$$P([-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha]) = 1 - \alpha.$$

14.c) Montrer que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \hat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \hat{\lambda}_n \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de λ au risque α . On note λ_0 la réalisation de $\hat{\lambda}_n$ sur le n -échantillon.

15. Avec le n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance asymptotique de λ au risque β , avec $0 < \beta < 1$ et $\beta \neq \alpha$, tel que la longueur de cet intervalle soit $k > 1$ fois plus petite que celle obtenue avec le risque α .

15.a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ . Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

15.b) Établir l'égalité $\beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right)$. En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible ?

Dans les questions 16 à 18, on suppose $\lambda = 1$.

16. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \geq 0$, on pose $g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t) dt$ et

$$h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t) dt.$$

16.a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et de $g_n(x)$.

16.b) Déterminer, pour tout réel t , l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de n et de t . Établir, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $x \geq 0$, la relation $g_{n-1}(x) - g_n(x) = F_{T_n}(x)/n$.

16.c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \geq 0$, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x , $F_{T_1}(x)$, $F_{T_2}(x)$, $\dots$, $F_{T_n}(x)$.

16.d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

16.e) Dédurre des questions c) et d) l'existence de $E(T_n)$ et montrer que

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^n 1/k.$$

17. On veut étudier, dans cette question, la convergence en loi de la suite des variables aléatoires $(G_n)_{n \geq 1}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $G_n = T_n - E(T_n)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est convergente; on note γ sa limite.

17.a) Montrer que, pour tout réel x et n assez grand, $F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.

17.b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$.

17.c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F_G(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

18.a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = F_X(X)$.

18.b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def Gumbel()` : qui permet de simuler la variable aléatoire G . On supposera que la constante γ est définie dans le programme par une variable nommée `gamma`.

La commande `random.random()`, après `import random`, renvoie un nombre pseudo-aléatoire uniforme dans $[0, 1[$. La fonction `log` de la bibliothèque `math` calcule le logarithme népérien d'un argument strictement positif. On veillera à n'appliquer les logarithmes qu'à des arguments de leur domaine.