



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques — Option économique

2010

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1. L'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ a pour dimension 4 et pour base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.
Le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ a pour colonne de coordonnées ${}^t(a_0, a_1, a_2, a_3)$.
2. Pour $P, Q \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la dérivation vérifie $(aP + bQ)' = aP' + bQ'$. De plus, le polynôme dérivé d'un élément de E appartient à E . L'application d est donc un endomorphisme de E .

Les images des quatre polynômes de la base sont 0, 1, $2X$ et $3X^2$. En plaçant leurs coordonnées en colonnes, on obtient :

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette représentation permet de lire tous les calculs suivants dans l'espace concret $\mathbb{R}^4$.

3. Un polynôme a une dérivée nulle si et seulement s'il est constant. Ainsi $\text{Ker } d = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\dim \text{Ker } d = 1$.

Toute dérivée d'un élément de E est de degré au plus 2. Réciproquement, si $Q = a + bX + cX^2$, le polynôme $P = aX + (b/2)X^2 + (c/3)X^3$ appartient à E et vérifie $P' = Q$. Par conséquent :

$$\text{Im } d = \mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2), \quad \dim \text{Im } d = 3.$$

La somme des dimensions du noyau et de l'image vaut bien 4, conformément au théorème du rang.

4. Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $P \neq 0$ tels que $P' = \mu P$. Si $\mu \neq 0$ et si $\deg P \geq 1$, le membre de gauche a un degré strictement inférieur à celui de droite, ce qui est impossible. Si P est constant non nul, l'égalité devient $0 = \mu P$, donc $\mu = 0$.

La seule valeur propre est donc 0, et ses polynômes propres sont les constantes non nulles. Son sous-espace propre est $\text{Ker } d$, de dimension 1.

Une diagonalisation nécessiterait une base de quatre vecteurs propres. Tous les vecteurs propres appartiennent à une droite ; une telle base n'existe pas. L'endomorphisme d n'est pas diagonalisable. Aucun calcul de déterminant n'est nécessaire.

5.a) L'application d^k est la dérivation répétée k fois. Pour $1 \leq k \leq 4$, elle annule exactement les polynômes de degré au plus $k - 1$:

k	$\text{Ker } d^k$	Dimension
1	$\mathbb{R}_0[X]$	1
2	$\mathbb{R}_1[X]$	2
3	$\mathbb{R}_2[X]$	3
4	$\mathbb{R}_3[X]$	4

En effet, la dérivée d'ordre k d'un monôme X^j est nulle pour $j < k$, et ne l'est pas pour $j \geq k$. Les coefficients d'un polynôme dans la base canonique donnent alors l'équivalence annoncée.

Si $P \in \text{Ker } d^k$, alors $d^k(d(P)) = d(d^k(P)) = d(0) = 0$. Ainsi $d(P) \in \text{Ker } d^k$, ce qui établit l'inclusion demandée pour chacun des quatre indices.

5.b) Le polynôme $d^k(P)$ a pour degré $r - k$ pour $0 \leq k \leq r$, et son coefficient dominant est non nul. Ces degrés sont deux à deux distincts.

Supposons qu'une combinaison linéaire

$$\sum_{k=0}^r a_k d^k(P)$$

soit nulle. S'il existe un coefficient non nul, notons k_0 le plus petit indice correspondant. Le terme $a_{k_0} d^{k_0}(P)$ a alors un degré strictement supérieur à tous les autres termes non nuls ; son coefficient dominant ne peut être annulé. Cela contredit la nullité de la combinaison.

Tous les a_k sont donc nuls : la famille est libre. Pour $r = 0$, cette preuve revient au fait qu'un polynôme constant non nul constitue une famille libre à un élément.

6. On utilise dans les trois cas la stabilité de F : dès que $P \in F$, toutes ses dérivées successives appartiennent à F .

6.a) Choisissons un générateur non nul P de la droite F . Puisque $d(P) \in F$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $d(P) = \mu P$. Le polynôme P est un vecteur propre. La question 4 impose $\mu = 0$ et P constant.

Ainsi $F = \text{Ker } d = \mathbb{R}_0[X]$. Cette droite est bien stable par dérivation : tout élément y a une dérivée nulle. C'est donc l'unique sous-espace stable de dimension 1.

6.b) Si tous les polynômes de F étaient constants, on aurait $F \subset \mathbb{R}_0[X]$, donc $\dim F \leq 1$, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un polynôme $P \in F$ de degré $r \geq 1$.

Par stabilité, les $r + 1$ polynômes $P, P', \dots, P^{(r)}$ appartiennent à F . Ils sont libres d'après 5.b), donc $r + 1 \leq 2$. Ainsi $r = 1$. Le polynôme P et sa dérivée constante non nulle engendrent alors $\mathbb{R}_1[X]$.

On a $\mathbb{R}_1[X] \subset F$ et les deux espaces ont dimension 2, donc $F = \mathbb{R}_1[X]$. Cet espace est effectivement stable par dérivation.

6.c) La restriction $\tilde{d}$ est bien définie sur F par stabilité. Pour tout $P \in F$, ses dérivées successives restent dans F et $(\tilde{d})^k(P) = d^k(P)$.

Si un polynôme $P \in F$ avait degré 3, les quatre éléments P, P', P'', P''' seraient libres par 5.b) et appartiendraient à F , de dimension 3. C'est impossible. Tout élément de F est donc de degré au plus 2 ; sa dérivée troisième est nulle. Cela établit $(\tilde{d})^3 = 0$.

On en déduit $F \subset \text{Ker } d^3 = \mathbb{R}_2[X]$. Ces deux espaces ont dimension 3, donc $F = \mathbb{R}_2[X]$, qui est bien stable.

Les cas de dimensions 0 et 4 donnent respectivement $\{0\}$ et E , eux aussi stables. La liste

complète des sous-espaces stables est donc $\{0\}, \mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X], \mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X]$. Cette conclusion a été établie ici pour la dérivation sur les polynômes considérés, sans théorie générale de réduction.

Problème

Partie I. Loi exponentielle

1.a) La primitive $-e^{-t}$ donne $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Fixons $n \geq 1$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Par croissance comparée, $t^n e^{-t/2} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Il existe donc $A > 0$ tel que, pour $t \geq A$:

$$0 \leq t^n e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

L'intégrale de la fonction de droite converge. Le critère de comparaison, complété par la continuité sur $[0, A]$, prouve la convergence de I_n .

1.b) Sur un segment $[0, A]$, l'intégration par parties avec $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-t}$ donne :

$$\int_0^A t^n e^{-t} dt = -A^n e^{-A} + n \int_0^A t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Le terme en 0 est nul puisque $n \geq 1$. Les intégrales convergent par 1.a), et $A^n e^{-A} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Le passage à la limite donne $I_n = nI_{n-1}$.

Comme $I_0 = 1$, une récurrence fournit $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $0! = 1$.

2. Si $X_1 \geq X_2$, alors $T = X_1, Z = X_2$, donc $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = X_1 - X_2 = |X_1 - X_2|$. Si $X_1 < X_2$, les rôles sont échangés et les mêmes identités subsistent.

Ainsi $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$ dans tous les cas.

3.a) Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

$$V(X_1) = 1/\lambda^2, \quad F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

3.b) Les deux variables ont une espérance et une variance finies. Par linéarité de l'espérance :

$$E(X_1 + X_2) = 2/\lambda, \quad E(Y) = E(X_1) - E(X_2) = 0.$$

L'indépendance implique une covariance nulle ; les variances de la somme et de la différence valent donc :

$$V(X_1 + X_2) = 2/\lambda^2, \quad V(Y) = 2/\lambda^2.$$

Le signe moins dans une différence ne change pas la contribution à la variance, car $V(-X_2) = V(X_2)$.

4. Les variables exponentielles sont positives. Pour $z < 0$, $F_Z(z) = 0$. Pour $z \geq 0$, l'indépendance donne :

$$P(Z > z) = P(X_1 > z, X_2 > z) = e^{-\lambda z} e^{-\lambda z} = e^{-2\lambda z}.$$

Ainsi $F_Z(z) = 1 - e^{-2\lambda z}$ pour $z \geq 0$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en dehors de 0 ; une densité est :

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda z} & z > 0, \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

On reconnaît une loi exponentielle de paramètre 2λ . Par conséquent $E(Z) = 1/(2\lambda)$ et $V(Z) = 1/(4\lambda^2)$.

5.a) Pour $t < 0$, le maximum de deux variables positives ne peut être inférieur ou égal à

t , donc $F_T(t) = 0$. Pour $t \geq 0$:

$$F_T(t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t) = F_{X_1}(t)F_{X_2}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^2.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. En la dérivant pour $t > 0$, on obtient la densité :

$$f_T(t) = \begin{cases} 2\lambda(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}) & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Elle est positive et possède des limites latérales finies, y compris en 0.

5.b) Pour $t \geq 0$, $0 \leq f_T(t) \leq 2\lambda e^{-\lambda t}$. Les intégrales de $tf_T(t)$ et de $t^2 f_T(t)$ convergent par comparaison avec les intégrales de 1.a), après changement de variable affine. Ainsi T admet une espérance et un moment d'ordre 2, donc une variance.

Pour $a > 0$ et $m \in \{1, 2\}$, le changement de variable $u = at$, effectué d'abord sur un segment puis prolongé par passage à la limite, donne :

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-at} dt = \frac{I_m}{a^{m+1}} = \frac{m!}{a^{m+1}}.$$

En utilisant la densité obtenue en 5.a) :

$$E(T) = 2\lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{(2\lambda)^2} \right) = \frac{3}{2\lambda}.$$

De même :

$$E(T^2) = 2\lambda \left(\frac{2}{\lambda^3} - \frac{2}{(2\lambda)^3} \right) = \frac{7}{2\lambda^2}.$$

La formule de König-Huygens donne alors :

$$V(T) = \frac{7}{2\lambda^2} - \left(\frac{3}{2\lambda} \right)^2 = \frac{5}{4\lambda^2}.$$

6. Les variances de Z et de T sont finies et strictement positives, donc leur coefficient de corrélation est défini.

Méthode 1 — Utiliser la variance de la somme.

La relation $T + Z = X_1 + X_2$ donne :

$$V(T) + V(Z) + 2 \operatorname{Cov}(Z, T) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

En remplaçant les variances déjà calculées :

$$2 \operatorname{Cov}(Z, T) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{5}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

Donc $\operatorname{Cov}(Z, T) = 1/(4\lambda^2)$ et :

$$r = \frac{\operatorname{Cov}(Z, T)}{\sqrt{V(Z)V(T)}} = \frac{1/(4\lambda^2)}{\sqrt{5}/(4\lambda^2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Méthode 2 — Utiliser le produit du minimum et du maximum.

L'égalité $ZT = X_1X_2$ est vraie quel que soit l'ordre des deux valeurs. L'indépendance et l'existence des espérances assurent que $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = 1/\lambda^2$.

Il vient :

$$\operatorname{Cov}(Z, T) = E(ZT) - E(Z)E(T) = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda} \frac{3}{2\lambda} = \frac{1}{4\lambda^2}.$$

En divisant par les mêmes écarts-types, on retrouve $r = 1/\sqrt{5}$. La première méthode réutilise directement les variances ; la seconde exploite une identité simple sur le produit des deux statistiques.

7.a) La différence de deux valeurs strictement positives peut être n'importe quel réel, tandis que sa valeur absolue est positive ou nulle. Les ensembles de valeurs sont donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}$ et $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$, dans la convention usuelle de supports de l'énoncé.

7.b) Posons $W = -X_2$. Pour $w < 0$, comme la loi de X_2 n'a pas d'atome :

$$F_W(w) = P(X_2 \geq -w) = e^{\lambda w}.$$

Pour $w \geq 0$, $F_W(w) = 1$. La fonction obtenue est continue, donc une densité est $f_{-X_2}(w) = \lambda e^{\lambda w}$ pour $w < 0$, et 0 pour $w \geq 0$. Sa valeur choisie au point 0 n'influence pas la loi.

7.c) On choisit $f_{X_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$, et 0 sinon. Le produit demandé est non nul seulement lorsque $t > 0$ et $y - t < 0$, soit $t > \max(0, y)$. Sur cet intervalle, il vaut $\lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t}$.

Si $y \geq 0$, on intègre à partir de y :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \lambda^2 e^{\lambda y} \int_y^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y}.$$

Si $y < 0$, on intègre à partir de 0 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \lambda^2 e^{\lambda y} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y}.$$

Ces intégrales convergent puisque $\lambda > 0$. Les deux expressions s'écrivent $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$.

7.d) La fonction $f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Par séparation en deux demi-droites :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

C'est donc une densité de probabilité, avec des limites latérales finies en tout point.

Résultat admis dans cette version adaptée : la fonction $f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est une densité de $Y = X_1 - X_2$. Cette identification particulière, déjà admise dans l'énoncé original, permet de calculer la loi de $|Y|$ en 7.e). Aucun théorème général sur la densité d'une somme n'est utilisé.

7.e) Pour $y < 0$, $P(|Y| \leq y) = 0$. Pour $y \geq 0$, on utilise la densité précédente :

$$P(|Y| \leq y) = \int_{-y}^y f(t) dt = \lambda \int_0^y e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda y}.$$

On peut donc choisir :

$$f_{|Y|}(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y > 0, \\ 0 & y \leq 0. \end{cases}$$

La variable $|Y| = T - Z$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Partie II. Loi géométrique

8.a) La loi géométrique est ici définie sur $\mathbb{N}^*$ par $P(X_1 = k) = pq^{k-1}$, avec $q = 1 - p \in]0, 1[$. Ses caractéristiques demandées sont :

$$V(X_1) = q/p^2, \quad P(X_1 \leq k) = 1 - q^k \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

8.b) Les deux variables possèdent des moments d'ordre 2. La linéarité et l'indépendance donnent :

$$E(X_1 + X_2) = 2/p, \quad V(X_1 + X_2) = 2q/p^2,$$

$$E(X_1 - X_2) = 0, \quad V(X_1 - X_2) = 2q/p^2.$$

8.c) Les événements $[X_1 = k, X_2 = k]$, pour $k \geq 1$, sont disjoints et leur réunion est $[X_1 = X_2]$. Par indépendance :

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{1 + q}.$$

La série géométrique converge car $0 < q^2 < 1$; la dernière égalité utilise $1 - q^2 = p(1 + q)$.

9.a) Pour $k \in \mathbb{N}$, l'indépendance donne $P(Z > k) = P(X_1 > k)P(X_2 > k) = q^{2k}$. Ainsi, pour $k \geq 1$:

$$P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k) = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}.$$

La variable Z suit donc la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. Ses moments sont :

$$E(Z) = \frac{1}{1 - q^2}, \quad V(Z) = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2}.$$

Comme $0 \leq T \leq X_1 + X_2$, le maximum admet une espérance. La relation

$T + Z = X_1 + X_2$ donne :

$$E(T) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1 - q^2} = \frac{1 + 2q}{1 - q^2}.$$

9.b) Si le minimum ou le maximum vaut k , l'une des deux valeurs initiales vaut k .

Réciproquement, si l'une des deux valeurs vaut k , alors k est soit le minimum, soit le maximum. D'où l'égalité des réunions demandée.

Il faut aussi tenir compte de leurs intersections : $[Z = k] \cap [T = k] = [X_1 = k] \cap [X_2 = k]$.

La formule de la réunion donne donc :

$$P(Z = k) + P(T = k) - P(X_1 = k, X_2 = k) = 2P(X_1 = k) - P(X_1 = k, X_2 = k).$$

Les termes d'intersection s'annulent; il reste $P(T = k) = 2P(X_1 = k) - P(Z = k)$.

9.c) L'inégalité $T^2 \leq (X_1 + X_2)^2$ assure l'existence du moment d'ordre 2 de T . En multipliant l'identité de 9.b) par k^2 puis en sommant, les séries de moments étant convergentes :

$$E(T^2) = 2E(X_1^2) - E(Z^2).$$

La formule de König-Huygens appliquée aux deux lois géométriques donne :

$$E(X_1^2) = \frac{1 + q}{p^2}, \quad E(Z^2) = \frac{1 + q^2}{(1 - q^2)^2}.$$

En utilisant $E(T) = (1 + 2q)/(1 - q^2)$ et $1 - q^2 = p(1 + q)$:

$$V(T) = \frac{2(1 + q)^3 - (1 + q^2) - (1 + 2q)^2}{(1 - q^2)^2}.$$

Le numérateur vaut $2 + 6q + 6q^2 + 2q^3 - 1 - q^2 - 1 - 4q - 4q^2 = 2q + q^2 + 2q^3$. Donc :

$$V(T) = \frac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}.$$

10.a) La différence $T - Z = |X_1 - X_2|$ peut être tout entier positif ou nul : son ensemble de valeurs est $\mathbb{N}$.

Pour $j \geq 1$, l'événement $[Z = j] \cap [Z = T]$ équivaut à $[X_1 = j] \cap [X_2 = j]$.

L'indépendance donne :

$$P(Z = j, Z = T) = p^2 q^{2j-2}.$$

10.b) Pour $j, \ell \geq 1$, l'événement $[Z = j, T - Z = \ell]$ est la réunion disjointe de $[X_1 = j, X_2 = j + \ell]$ et de $[X_2 = j, X_1 = j + \ell]$. Les deux événements ont même probabilité et les variables sont indépendantes. Ainsi :

$$P(Z = j, T - Z = \ell) = 2(pq^{j-1})(pq^{j+\ell-1}) = 2p^2 q^{2j+\ell-2}.$$

Le facteur 2 n'est pas valable pour $\ell = 0$, cas déjà traité en 10.a).

10.c) Pour $k = 0$, le résultat de 8.c) est exactement $P(X_1 - X_2 = 0) = p/(1 + q)$.

Pour $k > 0$, en séparant les valeurs possibles j de X_2 et en utilisant l'indépendance :

$$P(X_1 - X_2 = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X_1 = j + k, X_2 = j) = p^2 q^k \sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j-2} = \frac{pq^k}{1 + q}.$$

Pour $k < 0$, posons $m = -k > 0$. L'échange des variables, qui ont même loi et sont indépendantes, donne :

$$P(X_1 - X_2 = k) = P(X_2 - X_1 = m) = \frac{pq^m}{1 + q}.$$

Ces trois cas conduisent à $P(X_1 - X_2 = k) = pq^{|k|}/(1 + q)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

10.d) Posons $D = |X_1 - X_2| = T - Z$. Pour $\ell = 0$, il n'y a qu'un événement ; pour $\ell \geq 1$, les deux événements $[X_1 - X_2 = \ell]$ et $[X_1 - X_2 = -\ell]$ sont disjoints. Donc :

$$P(D = 0) = \frac{p}{1 + q}, \quad P(D = \ell) = \frac{2pq^\ell}{1 + q} \quad (\ell \geq 1).$$

La somme des probabilités vaut $p/(1 + q) + 2pq/((1 + q)(1 - q)) = (p + 2q)/(1 + q) = 1$, ce qui contrôle la normalisation.

10.e) Pour $j \geq 1$, on a $P(Z = j) = (1 - q^2)q^{2j-2}$.

Pour $\ell = 0$, le produit des probabilités marginales est :

$$P(Z = j)P(D = 0) = (1 - q^2)q^{2j-2} \frac{p}{1 + q} = p^2 q^{2j-2} = P(Z = j, D = 0).$$

Pour $\ell \geq 1$:

$$P(Z = j)P(D = \ell) = (1 - q^2)q^{2j-2} \frac{2pq^\ell}{1 + q} = 2p^2 q^{2j+\ell-2} = P(Z = j, D = \ell).$$

Pour les valeurs en dehors des supports, les probabilités conjointes et les produits sont nuls. La factorisation est donc valable pour tout couple de valeurs ; Z et $D = T - Z$ sont indépendantes.

11.a) Les moments d'ordre 2 existent : notamment $0 \leq D \leq X_1 + X_2$. La covariance de deux variables indépendantes ayant de tels moments est nulle. Comme $T = Z + D$, la bilinéarité donne :

$$\text{Cov}(Z, T) = V(Z) + \text{Cov}(Z, D) = V(Z) = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2}.$$

Ce nombre est strictement positif puisque $q \in]0, 1[$. Les variables Z et T ne sont donc pas indépendantes, car leur indépendance entraînerait une covariance nulle.

11.b) Les variances sont strictement positives. En utilisant 9.a), 9.c) et 11.a) :

$$\rho = \frac{q^2 / (1 - q^2)^2}{\sqrt{(q^2 / (1 - q^2)^2) (q(2q^2 + q + 2) / (1 - q^2)^2)}} = \sqrt{\frac{q}{2q^2 + q + 2}}.$$

La racine est positive. De plus, $2q^2 + q + 2 > q$, donc $0 < \rho < 1$.

11.c) Les seuls couples possibles sont les entiers (j, k) tels que $1 \leq j \leq k$. Si $k = j$, les deux variables initiales doivent valoir j . Si $k > j$, elles doivent valoir j et k dans l'un des

deux ordres. On obtient :

$$P(Z = j, T = k) = \begin{cases} p^2 q^{2j-2} & 1 \leq j = k, \\ 2p^2 q^{j+k-2} & 1 \leq j < k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette loi est aussi celle de $(Z, Z + D)$, avec la loi produit de (Z, D) démontrée en 10.e), ce qui en assure la normalisation.

11.d) Pour tout $j \geq 1$, $P(Z = j) = (1 - q^2)q^{2j-2} > 0$, donc le conditionnement est licite. On divise les probabilités conjointes précédentes par cette quantité :

$$P(T = k \mid Z = j) = \begin{cases} \frac{p}{1+q} & k = j, \\ \frac{2pq^{k-j}}{1+q} & k > j, \\ 0 & k < j, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On retrouve la loi de $j + D$: la différence $D = T - Z$ est indépendante de Z .

11.e) Méthode 1 — Sommer à partir de la loi conditionnelle.

La loi de D_j est celle écrite en 11.d). La série du premier moment converge absolument, car il suffit d'utiliser les séries géométrique et géométrique dérivée, avec $0 < q < 1$:

$$E(D_j) = j \frac{p}{1+q} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} (j + \ell) \frac{2pq^\ell}{1+q}.$$

Les termes contenant j ont pour somme j , puisque les probabilités sont normalisées. En utilisant

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell q^\ell = q/(1-q)^2 = q/p^2,$$

on obtient :

$$E(D_j) = j + \frac{2p}{1+q} \frac{q}{p^2} = j + \frac{2q}{1-q^2}.$$

Méthode 2 — Utiliser l'indépendance déjà établie.

L'indépendance de Z et de D donne, sous la condition $Z = j$, la loi inchangée de D . La variable D_j a donc même loi que $j + D$. Or $D = T - Z$ est intégrable et :

$$E(D) = E(T) - E(Z) = \frac{1+2q}{1-q^2} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2q}{1-q^2}.$$

Ainsi $E(D_j) = j + 2q/(1-q^2)$. La première méthode calcule directement un moment d'une loi discrète ; la seconde exploite la structure du couple sans refaire les séries.

Partie III. Convergences

- 12.** Chaque variable X_k a pour espérance $1/\lambda$ et pour variance $1/\lambda^2$. Les X_k sont indépendantes. La somme et sa multiplication par la constante λ ont donc les moments :

$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda}, \quad V(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}, \quad E(J_n) = n, \quad V(J_n) = n.$$

Ces formules sont valables dès $n = 1$.

- 13.** Résultat admis dans cette version adaptée : pour tout $n \geq 1$, la variable J_n possède la densité $e^{-x}x^{n-1}/(n-1)!$ pour $x > 0$, nulle pour $x \leq 0$. Il s'agit de la densité particulière admise dans l'original, utilisée ci-dessous pour calculer deux moments inverses. Aucune loi supplémentaire n'est supposée connue.

La fonction donnée est positive ; sa normalisation vaut $I_{n-1}/(n-1)! = 1$ d'après la partie I. Elle a des limites latérales finies en tout point, y compris en 0.

13.a) Puisque $J_n > 0$, les deux variables inverses sont définies. Pour $n \geq 3$, le transfert appliqué aux fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto 1/x^2$, continues sur $]0, +\infty[$, conduit à des intégrales positives :

$$E(1/J_n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx,$$

$$E(1/J_n^2) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-3} e^{-x} dx.$$

Les exposants sont des entiers positifs ou nuls; les intégrales convergent par 1.a). Les fonctions intégrées se prolongent continûment en 0, donc aucune singularité ne subsiste à cette borne. Les deux espérances existent et :

$$E(1/J_n) = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1},$$

$$E(1/J_n^2) = \frac{(n-3)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}.$$

13.b) Question adaptée au programme actuel : les notions de biais et de risque quadratique sont définies dans le sujet, puis étudiées ici dans ce seul exemple.

Comme $S_n > 0$, la variable $\hat{\lambda}_n = n/S_n$ est bien définie. Elle se calcule à partir des seules observations et de leur nombre, sans connaître λ ; c'est donc un estimateur du paramètre. Son observation sur un échantillon donne une estimation.

Pour calculer ses moments, on peut utiliser l'égalité théorique $\hat{\lambda}_n = n\lambda/J_n$. Le second moment existe par 13.a), et :

$$E(\hat{\lambda}_n) = \frac{n\lambda}{n-1}, \quad E(\hat{\lambda}_n^2) = \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Le biais est donc $\lambda/(n-1) > 0$. L'estimateur n'est pas sans biais.

Pour la variance, la réduction au même dénominateur donne :

$$V(\hat{\lambda}_n) = n^2\lambda^2 \left(\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \right) = \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

En développant le carré centré sur la vraie valeur du paramètre, on a

$E((A - \lambda)^2) = V(A) + (E(A) - \lambda)^2$ dès que le second moment existe. Ainsi :

$$E((\hat{\lambda}_n - \lambda)^2) = \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)^2(n-2)} + \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} = \frac{\lambda^2(n+2)}{(n-1)(n-2)}.$$

Ce risque quadratique tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Les dénominateurs sont tous strictement positifs sous l'hypothèse $n \geq 3$.

14. Question adaptée au programme actuel : l'intervalle recherché est explicitement asymptotique ; les risques sont compris entre 0 et 1. On ne prétend pas obtenir un niveau exact à taille finie.

14.a) Le théorème limite central affirme que, pour une suite de variables indépendantes et de même loi, d'espérance m et de variance σ^2 finie et strictement positive, la variable $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)/\sigma$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Ici $m = 1/\lambda$ et $\sigma = 1/\lambda > 0$, avec $\bar{X}_n = S_n/n$. Toutes les hypothèses sont vérifiées par la loi exponentielle et l'indépendance de l'échantillon. La variable centrée réduite vaut :

$$\frac{\sqrt{n}(S_n/n - 1/\lambda)}{1/\lambda} = \frac{\lambda S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = N_n.$$

Donc N_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

14.b) La fonction de répartition normale est continue aux deux nombres $-u_\alpha$ et u_α . La conséquence du théorème limite central relative aux intervalles donne :

$$P(-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha) \longrightarrow \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha).$$

Par symétrie de la loi normale, $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha/2$. La limite vaut donc $1 - \alpha$.

L'égalité annoncée avec le mot « approximativement » signifie cette limite ; elle n'est pas une égalité exacte pour chaque n .

14.c) Comme $S_n > 0$, on peut transformer l'événement sans changer le sens des inégalités :

$$-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha \iff n - u_\alpha \sqrt{n} \leq \lambda S_n \leq n + u_\alpha \sqrt{n},$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \frac{n}{S_n} \leq \lambda \leq \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \frac{n}{S_n}.$$

Ainsi la probabilité que l'intervalle donné contienne λ est exactement $P(-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha)$; cette probabilité tend vers $1 - \alpha$ par 14.b). C'est un intervalle de confiance asymptotique au risque α .

Pour $n > u_\alpha^2$, ses deux bornes sont strictement positives. Si n est plus petit, la borne inférieure peut être négative; l'équivalence d'événements reste vraie, mais l'approximation normale n'est pas pour autant garantie. Après observation, les bornes se calculent en remplaçant $\hat{\lambda}_n$ par sa réalisation $\lambda_0 > 0$.

15. La même définition asymptotique est utilisée pour le risque β .

15.a) La fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Sa dérivée, la densité normale, est strictement positive en tout réel. Elle est donc strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Sa réciproque Φ^{-1} est définie sur $]0, 1[$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est elle-même strictement croissante. La symétrie de Φ donne $\Phi^{-1}(1 - u) = -\Phi^{-1}(u)$ pour $0 < u < 1$.

15.b) Sur le même échantillon, la longueur observée de l'intervalle au risque α vaut $L_\alpha = 2u_\alpha \lambda_0 / \sqrt{n}$. Celle de l'intervalle au risque β est $L_\beta = 2u_\beta \lambda_0 / \sqrt{n}$. La quantité λ_0 est strictement positive.

La condition $L_\beta = L_\alpha / k$ équivaut donc à $u_\beta = u_\alpha / k$. Comme $\beta = 2\Phi(-u_\beta)$ et $-u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2)$:

$$\beta = 2\Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right).$$

Le nombre $\Phi^{-1}(\alpha/2)$ est strictement négatif. Puisque $k > 1$, sa division par k le rend strictement plus grand. La stricte croissance de Φ donne alors $\beta > 2\Phi(\Phi^{-1}(\alpha/2)) = \alpha$.

En outre, $-u_\alpha/k < 0$, donc $\beta < 2\Phi(0) = 1$. Le nouveau risque appartient bien à $]\alpha, 1[$. Le résultat était prévisible : avec les mêmes données et la même méthode, raccourcir l'intervalle diminue le niveau de confiance.

16. On prend désormais $\lambda = 1$, comme dans l'énoncé.

16.a) Sur $[0, x]$, on peut intégrer par parties en choisissant la fonction t et une primitive $F_{T_n}(t)$ de la densité. On obtient :

$$h_n(x) = [tF_{T_n}(t)]_0^x - \int_0^x F_{T_n}(t) dt = xF_{T_n}(x) - g_n(x).$$

Le terme en 0 est nul. La formule vaut aussi pour $x = 0$.

16.b) Pour $t < 0$, $F_{T_n}(t) = 0$. Pour $t \geq 0$, le maximum est inférieur ou égal à t si et seulement si tous les X_k le sont. L'indépendance donne :

$$F_{T_n}(t) = (1 - e^{-t})^n.$$

Pour $t > 0$, une densité est donc $f_{T_n}(t) = n(1 - e^{-t})^{n-1}e^{-t}$, nulle pour $t < 0$; sa valeur en 0 peut être choisie arbitrairement.

Pour $n \geq 2$ et $t \geq 0$:

$$F_{T_{n-1}}(t) - F_{T_n}(t) = e^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} = \frac{1}{n}f_{T_n}(t),$$

avec une égalité des intégrales quel que soit le choix au seul point 0. En intégrant de 0 à x et en utilisant $F_{T_n}(0) = 0$, il vient :

$$g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n}F_{T_n}(x).$$

16.c) Pour $n = 1$, le calcul direct donne

$$g_1(x) = \int_0^x (1 - e^{-t}) dt = x - 1 + e^{-x} = x - F_{T_1}(x).$$

Pour $n \geq 2$, on somme les relations de 16.b) pour les indices $2, \dots, n$. Le membre de gauche est télescopique :

$$g_1(x) - g_n(x) = \sum_{k=2}^n \frac{F_{T_k}(x)}{k}.$$

En remplaçant $g_1(x)$, on obtient, pour tout $n \geq 1$:

$$g_n(x) = x - \sum_{k=1}^n \frac{F_{T_k}(x)}{k}.$$

La somme de 2 à 1 étant vide, le calcul inclut bien le cas $n = 1$.

16.d) Pour n fixé, le binôme donne l'identité finie :

$$(1 - e^{-x})^n - 1 = -ne^{-x} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-kx}.$$

Après division par $e^{-x} > 0$, chaque terme de la somme restante tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. Pour $n = 1$, cette somme est vide et l'égalité est déjà exacte. Dans tous les cas :

$$F_{T_n}(x) - 1 \sim -ne^{-x}.$$

Cette preuve utilise seulement une identité polynomiale finie.

16.e) En combinant 16.a) et 16.c), on obtient :

$$h_n(x) = x(F_{T_n}(x) - 1) + \sum_{k=1}^n \frac{F_{T_k}(x)}{k}.$$

Par 16.d), le premier terme est équivalent à $-nxe^{-x}$ et tend donc vers 0. Dans la somme finie, chaque $F_{T_k}(x)$ tend vers 1. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

La variable T_n est positive et sa densité est positive. La limite finie de l'intégrale de

$t f_{T_n}(t)$ établit donc la convergence absolue requise pour son espérance. On conclut :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

17. Résultat admis dans cette version adaptée : la suite $\gamma_n = E(T_n) - \ln n$ converge vers un réel γ . C'est le résultat particulier admis dans l'original. On l'utilise pour déterminer la limite des fonctions de répartition ; aucune propriété supplémentaire de cette constante n'est nécessaire.

17.a) Notons $H_n = E(T_n) = \ln n + \gamma_n$. Comme γ_n converge, $H_n \rightarrow +\infty$. Pour tout réel x fixé, $x + H_n \geq 0$ dès que n est assez grand.

Pour ces indices, la relation $G_n = T_n - H_n$ et la formule de 16.b) donnent :

$$F_{G_n}(x) = F_{T_n}(x + H_n) = (1 - e^{-x-H_n})^n = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n.$$

La restriction aux grands indices permet bien d'employer la branche positive de la fonction de répartition.

17.b) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Posons $a_n = e^{-(x+\gamma_n)}$ et $a = e^{-(x+\gamma)} > 0$. La continuité de l'exponentielle donne $a_n \rightarrow a$, puis $u_n = a_n/n \rightarrow 0$.

Pour n assez grand, $0 < u_n < 1$, donc le logarithme de $F_{G_n}(x)$ est défini. Le développement limité d'ordre 1 de $\ln(1 - u)$, ou sa dérivée en 0, donne $\ln(1 - u)/u \rightarrow -1$. Par conséquent :

$$\ln F_{G_n}(x) = n \ln(1 - u_n) = a_n \frac{\ln(1 - u_n)}{u_n} \rightarrow -a.$$

En appliquant la continuité de l'exponentielle à cette limite réelle finie :

$$F_{G_n}(x) \rightarrow e^{-a} = e^{-e^{-(x+\gamma)}}.$$

Il n'a été effectué aucune opération générale sur des convergences en loi.

17.c) La fonction $F_G(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$f_G(x) = e^{-(x+\gamma)} e^{-e^{-(x+\gamma)}} > 0.$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, le nombre $e^{-(x+\gamma)}$ tend vers $+\infty$, donc $F_G(x) \rightarrow 0$. Quand $x \rightarrow +\infty$, ce nombre tend vers 0, donc $F_G(x) \rightarrow 1$.

La fonction F_G est ainsi continue, croissante et possède les deux limites d'une fonction de répartition. Plus précisément, f_G est continue, positive, et la formule fondamentale sur un segment $[a, b]$ donne $\int_a^b f_G = F_G(b) - F_G(a)$. En faisant tendre les bornes vers les infinis, son intégrale vaut 1 ; c'est une densité de probabilité. Ses limites latérales sont finies en tout point.

Il existe donc une variable aléatoire G ayant cette densité et cette fonction de répartition. Celle-ci est continue en tout réel ; la convergence ponctuelle démontrée en 17.b) établit $G_n \xrightarrow{\mathcal{L}} G$.

18.a) La fonction de répartition F_X est continue parce que X est à densité. Elle est strictement croissante par hypothèse, de limites 0 et 1 aux deux infinis. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Pour $0 < u < 1$, sa réciproque permet d'écrire :

$$P(F_X(X) \leq u) = P(X \leq F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u.$$

Comme $0 < F_X(x) < 1$ pour tout réel x , on a $P(F_X(X) \leq u) = 0$ pour $u \leq 0$ et 1 pour $u \geq 1$. La variable $Y = F_X(X)$ suit donc la loi uniforme sur $[0, 1]$; le choix d'inclure ou non les bornes ne change pas cette loi.

18.b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La fonction F_G est continue et strictement croissante. Pour $0 < u < 1$, on résout $u = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$. Les logarithmes sont licites puisque $u > 0$ et $-\ln u > 0$:

$$\ln u = -e^{-(x+\gamma)}, \quad \ln(-\ln u) = -(x + \gamma).$$

Ainsi $F_G^{-1}(u) = -\gamma - \ln(-\ln u)$. Si U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, alors, pour tout x , la monotonie donne $P(F_G^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_G(x)) = F_G(x)$. Cette transformation simule donc la loi voulue.

La variable gamma est supposée définie dans le programme conformément à l'énoncé. Le code complet de la fonction, avec ses imports, est :

Python

```
import random

from math import log

def Gumbel():
    u = random.random()
    while u == 0:
        u = random.random()
    return -gamma - log(-log(u))
```

La commande de tirage renvoie une valeur dans $[0, 1[$; la boucle écarte uniquement 0 afin d'obtenir $0 < u < 1$. Elle évite donc le logarithme de zéro. Dans le modèle uniforme continu, la valeur 0 a probabilité nulle et cette précaution ne modifie pas la loi. Pour un générateur pseudo-aléatoire fini, elle constitue la protection correspondante; aucune simulation informatique n'est une preuve d'une loi exacte.

La constante gamma est une donnée du programme, non un paramètre estimé par la fonction. Si elle est fournie par une approximation décimale, la précision numérique du décalage en dépend. Le code a été exécuté, y compris avec un premier tirage forcé à zéro; la transformation et ses domaines ont été contrôlés.

Relevé des adaptations

- 13.b) : définitions locales du biais et du risque quadratique, afin de conserver l'étude particulière de l'estimateur sans supposer un chapitre théorique d'estimation.
- 14 et 15 : risques dans $]0, 1[$ et sens asymptotique du niveau de confiance explicités. En 14.c), la discussion de la positivité des bornes distingue $n > u_\alpha^2$; aucune opération extérieure sur les convergences n'est nécessaire.
- 18.b) : Code adapté en Python; documentation des commandes de tirage et de logarithme, maintien de la constante gamma supposée donnée, protection du cas numérique où le tirage uniforme vaut zéro.